国内名校骨干教师

教辅 华东师大版

高考数学
百题大过关

赵祥枝　张瑞炳　编著

下册

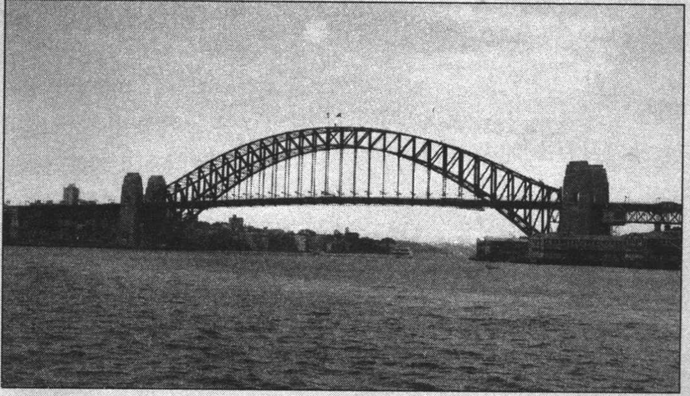
百题帮你过高考大关
百题助你创人生辉煌

华东师范大学出版社

编 著 张瑞炳 赵祥枝

高考数学百题大过关

下册



华 东 师 范 大 学 出 版 社

图书在版编目(CIP)数据

高考数学百题大过关.下册/张瑞炳　赵祥枝编著.—上海：华东师范大学出版社，2005.3

ISBN 7-5617-4173-1

Ⅰ.高…　Ⅱ.张…　Ⅲ.数学课-高中-习题-升学参考资料　Ⅳ.G634.605

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 025831 号

高考数学百题大过关下册

编　　著　张瑞炳　赵祥枝
策划组稿　李金凤　徐惟简
责任编辑　审校部编辑工作组
特约编辑　金兆辉
封面设计　卢晓红
版式设计　蒋　克

出版发行　华东师范大学出版社
　　　　　市场部　电话 021-62865537
　　　　　门市(邮购)电话:021-62869887
　　　　　门市地址　华东师大校内先锋路口
业务电话　上海地区 021-62232873
　　　　　华东　中南地区 021-62458734
　　　　　华北　东北地区 021-62571961
　　　　　西南　西北地区 021-62232893
业务传真　021-62860410　62602316
http://www.ecnupress.com.cn
社　　址　上海市中山北路 3663 号
　　　　　邮编 200062

印 刷 者　上海市印刷三厂
开　　本　787×1092　16 开
印　　张　11.75
字　　数　256 千字
版　　次　2005 年 6 月第一版
印　　次　2005 年 6 月第一次
印　　数　11000
书　　号　ISBN 7-5617-4173-1/G·2398
定　　价　14.00 元

出 版 人　朱杰人

丛书前言

目前，市面上有关中高考复习的训练用书不胜其多，但不少书的训练题或失之偏少，或庞杂无度。如果选择几种资料同时用，人们又发现重复者不少，而空白点依然多多。结果既费钱又费时，还未必能完全过关。怎样在有限的时间里让学生得到充分而全面的训练，怎样使这种训练既达到一定的量又保证相当高的质，这成为不少有识之士经常想到的问题。根据不少有经验的初三和高三老师的反映，如果在每一个中高考训练点，精心设计百把道互不重复且有一定梯度的训练题，那么，该训练点的要求就可以到位、可以过关了。为此，我们组织编写了这样一套中高考“百题大过关”。

丛书共21种，《中考百题大过关》9种，《高考百题大过关》12种，涵盖中高考语文、数学、英语、物理、化学五个主要学科。这套丛书，我们力求体现四个特点：

一是丰富性。丛书涉及的内容囊括了中高考所有知识点，所有知识点均由百把道题目组成。其覆盖面之广，内容之丰富，都是许多丛书所没有的。

二是层次性。题目不是杂乱无章地随意排列，而是富有层次性的。每个知识点题目的安排一般分为三个层次：第一层次是精选1990年以来的相关中高考题，第二个层次是难度稍小一点的训练题，第三层次是难度稍大一点的训练题。这样，既能让读者了解近年来的中高考命题特点及其走向，又能得到渐次加深的足够量的训练。

三是指导性。为了方便使用本丛书的老师和同学，对有一定难度的题目，丛书不仅提供准确的答案，还力求作最为详尽的解说，目的在于让读者知其然更知其所以然。同学们有了这套书，就等于请回了一位不走的辅导老师。

四是权威性。丛书的编写者都是国内名校骨干教师，有些还是参加国家教育部“名师工程”的著名特级教师，在省市区享有盛名。凝聚了这样一批既有丰富的实践经验，又有深厚理论修养的优秀教师群体的智慧，是本丛书高质量得以保证的重要原因。

愿这套丛书，能帮助我们的考生闯过中高考大关，也愿我们的考生能以中高考为新起点，创造美好的未来。

华东师范大学出版社

目　　录

引领导航

素质教育是21世纪中学数学教育的重要标志之一，为实施真正的素质教育，中学数学教育在教育理念、课程标准、教育评价等各方面进行了一系列的改革尝试. 随着数学课程改革的深入，高考作为检测中学生数学素养的选拔性考试，不但要考查出考生数学知识的积累是否达到进入高校学习的基本水平，而且要以数学知识为载体，测量出考生将知识迁移到不同情境的能力. 因此，每年的高考试题在原有的基础上继续改革创新，加大应用性和能力型题目的考查，体现出考能力、考素质的要求. 近年来，高考解答题(后三题)逐步形成"四化"趋势，即实际问题数学化；学科问题综合化；问题内容创新化；形式结构开放化.

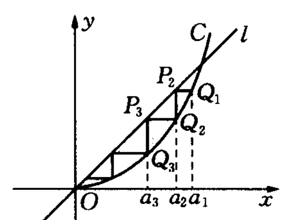
例1　王先生因病到医院求医，医生给他开了处方药(片剂)，要求每天早晚各服一片. 已知该药片每片220毫克，他的肾脏每12小时从体内排出这种药的60%，并且如果这种药在他体内的残留量超过386毫克，就将产生副作用，请问：

(1) 王先生第一天上午8时第一次服药，则第二天早晨8时服完药时，药在他体内的残留量是多少?

(2) 如果王先生坚持长期服用此药，会不会产生副作用，为什么?

解：(1) 设第 n 次服药后，药在他体内的残留量为 a_n 毫克，依题意，$a_1 = 220$，$a_2 = 220 + a_1(1-60\%) = 220\times 1.4$，$a_3 = 220 + a_2(1-60\%) = 220 + 220\times 0.4 + 220\times 0.4^2 = 343.2$(毫克)，第二天早晨是他第三次服药，故服药后药在体内的残留量为343.2(毫克).

(2) 依题意 $a_n = 220 + a_{n-1}(1-60\%) = 220 + 0.4a_{n-1} = 220 + 0.4(220 + 0.4a_{n-2}) = \cdots = 220 + 0.4\times 220 + 0.4^2\times 220 + \cdots + 0.4^{n-1}\times 220 = 220(1 + 0.4 + 0.4^2 + \cdots + 0.4^{n-1}) = 220\times\dfrac{1-0.4^n}{1-0.4} = 220\times\dfrac{1-0.4^n}{0.6} = \dfrac{1\,100}{3}\times(1-0.4^n)$，若长期服药，药在体内的残留量为 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(220\times\dfrac{1-0.4^n}{0.6}\right) = \dfrac{1\,100}{3} < 386$. 所以不会产生副作用.



例2　(2003年江苏卷)设 $a > 0$，如图，已知直线 l：$y = ax$ 及曲线 C：$y = x^2$，C 上的点 Q_1 的横坐标为 $a_1(0 < a_1 < a)$. 从 C 上的点 $Q_n(n \geqslant 1)$ 作直线平行于 x 轴，交直线 l 于点 P_{n+1}，再从点 P_{n+1} 作直线平行于 y 轴，交曲线 C 于点 Q_{n+1}. $Q_n(n = 1, 2, 3, \cdots)$ 的横坐标构成数列 $\{a_n\}$.

(1) 试求 a_{n+1} 与 a_n 的关系，并求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2) 当 $a = 1$，$a_1 \leqslant \dfrac{1}{2}$ 时，证明 $\sum\limits_{k=1}^{n}(a_k - a_{k+1})a_{k+2} < \dfrac{1}{32}$；

(3) 当 $a = 1$ 时，证明 $\sum\limits_{k=1}^{n}(a_k - a_{k+1})a_{k+2} < \dfrac{1}{3}$.

(1) 解:因为 $Q_n(a_n, a_n^2)$, $P_{n+1}\left(\frac{1}{a}\cdot a_n^2, a_n^2\right)$, $Q_{n+1}\left(\frac{1}{a}\cdot a_n^2, \frac{1}{a^2}a_n^4\right)$, 所以 $a_{n+1}=\frac{1}{a}\cdot a_n^2$, 于是 $a_n=\frac{1}{a}\cdot a_{n-1}^2=\frac{1}{a}\left(\frac{1}{a}\cdot a_{n-2}^2\right)^2=\left(\frac{1}{a}\right)^{1+2}\cdot a_{n-2}^{2^2}=\left(\frac{1}{a}\right)^{1+2}\cdot\left(\frac{1}{a}\cdot a_{n-3}^2\right)^{2^2}=\left(\frac{1}{a}\right)^{1+2+2^2}\cdot a_{n-3}^{2^3}=\cdots=\left(\frac{1}{a}\right)^{1+2+\cdots+2^{n-2}}a_1^{2^{n-1}}=\left(\frac{1}{a}\right)^{2^{n-1}-1}\cdot a_1^{2^{n-1}}=a\left(\frac{a_1}{a}\right)^{2^{n-1}}$, 即 $a_n=a\left(\frac{a_1}{a}\right)^{2^{n-1}}$.

(2) 证明:由 $a=1$ 知 $a_{n+1}=a_n^2$. 因为 $a_1\leqslant\frac{1}{2}$, 所以 $a_2\leqslant\frac{1}{4}$, $a_3\leqslant\frac{1}{16}$. 又因为当 $k\geqslant 1$ 时, $a_{k+2}\leqslant a_3\leqslant\frac{1}{16}$. 所以 $\sum\limits_{k=1}^{n}(a_k-a_{k+1})a_{k+2}\leqslant\frac{1}{16}\sum\limits_{k=1}^{n}(a_k-a_{k+1})=\frac{1}{16}\cdot(a_1-a_{n+1})<\frac{1}{32}$.

(3) 证明:由(1)知,当 $a=1$ 时, $a_n=a_1^{2^{n-1}}$. 因此 $\sum\limits_{k=1}^{n}(a_k-a_{k+1})a_{k+2}=\sum\limits_{k=1}^{n}(a_1^{2^{k-1}}-a_1^{2^k})a_1^{2^{k+1}}\leqslant\sum\limits_{i=1}^{2^n-1}(a_1^i-a_1^{i+1})a_1^{2i+2}=(1-a_1)a_1^2\sum\limits_{i=1}^{2^n-1}a_1^{3i}<(1-a_1)a_1^2\cdot\frac{a_1^3}{1-a_1^3}=\frac{a_1^5}{1+a_1+a_1^2}<\frac{1}{3}$.

例 3 (2000 年上海卷)规定 $C_x^m=\frac{x\cdot(x-1)\cdot\cdots\cdot(x-m+1)}{m!}$, 其中 $x\in\mathbf{R}$, m 是正整数,且 $C_x^0=1$, 这是组合数 C_n^m(n、m 是正整数,且 $m\leqslant n$ 的一种推广).

(1) 求 C_{-15}^5 的值;

(2) 组合数的两个性质:①$C_n^m=C_n^{n-m}$. ②$C_n^m+C_n^{m-1}=C_{n+1}^m$. 是否都能推广到 C_x^m($x\in\mathbf{R}$, m 是正整数)的情形?若能推广,请写出推广的形式,并给出证明;若不能,则说明理由.

(3) 已知组合数 C_n^m 是正整数,证明:当 $x\in\mathbf{Z}$, m 是正整数时, $C_x^m\in\mathbf{Z}$.

解:(1) $C_{-15}^5=\frac{(-15)\cdot(-16)\cdot\cdots\cdot(-19)}{5!}=-C_{19}^5=-11\ 628$.

(2) 解:性质①不能推广. 例如当 $x=\sqrt{2}$ 时, $C_{\sqrt{2}}^1$ 有定义;但 $C_{\sqrt{2}}^{\sqrt{2}-1}$ 无意义;性质②能推广,它的推广形式是 $C_x^m+C_x^{m-1}=C_{x+1}^m$, $x\in\mathbf{R}$, m 是正整数,事实上当 $m=1$ 时,有 $C_x^1+C_x^0=x+1=C_{x+1}^1$, 当 $m\geqslant 2$ 时, $C_x^m+C_x^{m-1}=\frac{x\cdot(x-1)\cdot\cdots\cdot(x-m+1)}{m!}+\frac{x\cdot(x-1)\cdot\cdots\cdot(x-m+2)}{(m-1)!}=\frac{x\cdot(x-1)\cdot\cdots\cdot(x-m+2)}{(m-1)!}\left(\frac{x-m+1}{m}+1\right)=\frac{x\cdot(x-1)\cdot\cdots\cdot(x-m+2)\cdot(x+1)}{m!}=C_{x+1}^m$.

(3) 证明:当 $x\geqslant m$ 时,组合数 $C_x^m\in\mathbf{Z}$. 当 $0\leqslant x<m$ 时, $C_x^m=0\in\mathbf{Z}$. 当 $x<0$ 时,因为 $-x+m-1>0$, 所以 $C_x^m=\frac{x\cdot(x-1)\cdot\cdots\cdot(x-m+1)}{m!}=(-1)^m\cdot\frac{(-x+m-1)\cdot\cdots\cdot(-x+1)\cdot(-x)}{m!}=(-1)^m C_{-x+m-1}^m\in\mathbf{Z}$.

例 4 (2002 年全国卷)(1) 给出两块相同的正三角形纸片(如图 1,图 2),要求用其中一块剪拼成一个正三棱锥模型,另一块剪拼成一个正三棱柱模型,使它们的全面积都与原三角形的面积相等,请设计一种剪拼方法,分别用虚线标示在图 1、图 2 中,并作简要说明;

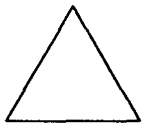


图 1

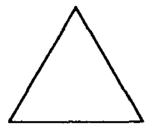


图 2

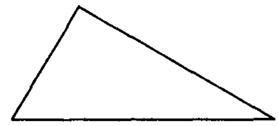


图 3

(2) 试比较你剪拼的正三棱锥与正三棱柱的体积的大小;

(3) (本小题为附加题)如果给出的是一块任意三角形的纸片(如图 3),要求剪拼成一个直三棱柱模型,使它的全面积与给出的三角形的面积相等,请设计一种剪拼方法,用虚线标示在图 3 中,并作简要说明.

解:(1) 如图 4,沿正三角形三边中点连线折起,可拼得一个正三棱锥. 如图 5,正三角形三个角上剪出三个相同的四边形,其较长的一组邻边边长为三角形边长的 $\frac{1}{4}$,有一组对角为直角. 余下部分按虚线折起,可成为一个缺上底的正三棱柱,而剪出的三个相同的四边形恰好拼成这个正三棱柱的上底.

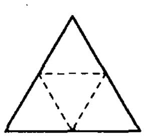


图 4

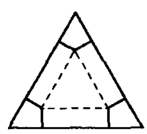


图 5

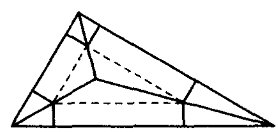


图 6

(2) 依上面剪拼的方法,有 $V_{柱} > V_{锥}$. 推理如下:设给出正三角形纸片的边长为 2,那么,正三棱锥与正三棱柱的底面都是边长为 1 的正三角形,其面积为 $\frac{\sqrt{3}}{4}$. 现在计算它们的高:$h_{锥} = \sqrt{1 - \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{6}}{3}$, $h_{柱} = \frac{1}{2}\tan 30° = \frac{\sqrt{3}}{6}$. 所以 $V_{锥} - V_{柱} = \left(\frac{1}{3}h_{锥} - h_{柱}\right) \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = \left(\frac{\sqrt{6}}{9} - \frac{\sqrt{3}}{6}\right) \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{2\sqrt{2} - 3}{24} < 0$, 即 $V_{柱} > V_{锥}$.

(3) 如图 6,分别连结三角形的内心与各顶点,得到三条线段,再以这三条线段的中点为顶点作三角形. 以新作的三角形为直三棱柱的底面,过新三角形的三个顶点向原三角形三边作垂线,沿六条垂线剪下三个四边形,可以拼接成直三棱柱的上底,余下部分按虚线折起,成为一个缺上底的直三棱柱,即可得到直三棱柱模型.

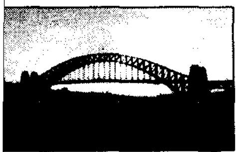
例 5 (2004 年北京卷)给定有限个正数满足条件 T:每个数都不大于 50 且总和 $L = 1\,275$. 现将这些数按下列要求进行分组,每组数之和不大于 150 且分组的步骤是:首先,从这些数中选择这样一些数构成第一组,使得 150 与这组数之和的差 r_1 与所有可能的其他选择相比是最小的,r_1 称为第一组余差;然后,在去掉已选入第一组的数后,对余下的数按第一组的选择方式构成第二组,这时的余差为 r_2;如此继续构成第三组(余差为 r_3)、第四组(余差为 r_4)、…,直到第 N 组(余差为 r_N)把这些数全部分完为止.

(1) 判断 $r_1, r_2, \cdots, r_N$ 的大小关系,并指出除第 N 组外的每组至少含有几个数;

(2) 当构成第 $n\ (n<N)$ 组后,指出余下的每个数与 r_n 的大小关系,并证明 $r_{n-1} > \dfrac{150n-L}{n-1}$;

(3) 对任何满足条件 T 的有限个正数,证明:$N \leqslant 11$.

解:(1) $r_1 \leqslant r_2 \leqslant \cdots \leqslant r_N$. 除第 N 组外的每组至少含有 $\dfrac{150}{50}=3$ 个数.



(2) 当第 n 组形成后,因为 $n<N$,所以还有数没分完,这时余下的每个数必大于余差 r_n. 余下数之和也大于第 n 组的余差 r_n,则 $L-[(150-r_1)+(150-r_2)+\cdots+(150-r_n)]>r_n$,由此可得 $r_1+r_2+r_3+\cdots+r_{n-1}>150n-L$. 因为 $(n-1)r_{n-1} \geqslant r_1+r_2+\cdots+r_{n-1}$,所以,$r_{n-1}>\dfrac{150n-L}{n-1}$.

(3) 用反证法证明结论. 假设 $N>11$,即第 11 组形成后,还有数没分完,由(1)和(2)可知,余下的每个数都大于第 11 组的余差 r_{11},且 $r_{11} \geqslant r_{10}$,故余下的每个数 $>r_{11} \geqslant r_{10} > \dfrac{150\times 11-1\,275}{10}=37.5$…①. 因为第 11 组数中至少含有 3 个数,所以第 11 组数之和大于 $37.5\times 3=112.5$. 此时第 11 组的余差 $r_{11}=150-$ 第 11 组数之和 $<150-112.5=37.5$,这与①式中 $r_{11}>37.5$ 矛盾,所以 $N \leqslant 11$.

例 6 (2004 年上海卷)设 $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2), \cdots, P_n(x_n, y_n)\ (n \geqslant 3, n \in \mathbf{N}^*)$ 是二次曲线 C 上的点,且 $a_1=|OP_1|^2, a_2=|OP_2|^2, \cdots, a_n=|OP_n|^2$ 构成了一个公差为 $d\ (d \neq 0)$ 的等差数列,其中 O 是坐标原点. 记 $S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$.

(1) 若 C 的方程为 $\dfrac{x^2}{100}+\dfrac{y^2}{25}=1$,$n=3$,点 $P_1(10, 0)$ 且 $S_3=255$,求点 P_3 的坐标;(只需写出一个)

(2) 若 C 的方程为 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$,点 $P_1(a, 0)$,对于给定的正整数 n,当公差 d 变化时,求 S_n 的最小值;

(3) 请选定一条除椭圆外的二次曲线 C 及 C 上一点 P_1,对于给定的正整数 n,写出符合条件的点 $P_1, P_2, \cdots, P_n$ 存在的充要条件,并说明理由.

(1) 解:$a_1=|OP_1|^2=100$,由 $S_3=\dfrac{3}{2}(a_1+a_3)=255$,得 $a_3=|OP_3|^2=70$.

由 $\begin{cases}\dfrac{x_3^2}{100}+\dfrac{y_3^2}{25}=1,\\ x_3^2+y_3^2=70,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x_3^2=60,\\ y_3^2=10.\end{cases}$ 所以点 P_3 的坐标可以为$(2\sqrt{15}, \sqrt{10})$.

(2) 解法 1:原点 O 到二次曲线 C:$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ 上各点的最小距离为 b,最大距离为 a. 因为 $a_1=|OP_1|^2=a^2$,所以 $d<0$,且 $a_n=|OP_n|^2=a^2+(n-1)d \geqslant b^2$,所以 $\dfrac{b^2-a^2}{n-1} \leqslant d<0$. 又因为 $n \geqslant 3$,$\dfrac{n(n-1)}{2}>0$,所以 $S_n=na^2+\dfrac{n(n-1)}{2}d$ 在 $\left[\dfrac{b^2-a^2}{n-1}, 0\right)$ 上递增,故 S_n 的最小值为 $na^2+\dfrac{n(n-1)}{2}\times\dfrac{b^2-a^2}{n-1}=\dfrac{n(a^2+b^2)}{2}$.

解法 2：对每个正整数 k $(2 \leqslant k \leqslant n)$，由 $\begin{cases} x_k^2 + y_k^2 = a^2 + (k-1)d, \\ \dfrac{x_k^2}{a^2} + \dfrac{y_k^2}{b^2} = 1, \end{cases}$ 解得 $y_k^2 = \dfrac{-b^2(k-1)d}{a^2-b^2}$. 因为 $0 < y_k^2 \leqslant b^2$，得 $\dfrac{b^2-a^2}{k-1} \leqslant d < 0$，所以 $\dfrac{b^2-a^2}{n-1} \leqslant d < 0$. 以下与解法 1 相同.

(3) 解法 1：若双曲线 C：$\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$，点 $P_1(a, 0)$，则对于给定的 n，点 $P_1, P_2, \cdots, P_n$ 存在的充要条件是 $d > 0$. 因为原点 O 到双曲线 C 上各点的距离 $h \in [|a|, +\infty)$，且 $|OP_1|^2 = a^2$，所以点 $P_1, P_2, \cdots, P_n$ 存在当且仅当 $|OP_n|^2 > |OP_1|^2$，即 $d > 0$.

解法 2：若抛物线 C：$y^2 = 2px$，点 $P_1(0, 0)$，则对于给定的 n，点 $P_1, P_2, \cdots, P_n$ 存在的充要条件是 $d > 0$，理由同上.

解法 3：若圆 C：$(x-a)^2 + y^2 = a^2 (a \neq 0)$，点 $P_1(0, 0)$，则对于给定的 n，点 $P_1, P_2, \cdots, P_n$ 存在的充要条件是 $0 < d \leqslant \dfrac{4a^2}{n-1}$. 因为原点 O 到圆 C 上各点的最小距离为 0，最大距离为 $2|a|$，且 $|OP_1|^2 = 0$，所以 $d > 0$ 且 $|OP_n|^2 = (n-1)d \leqslant 4a^2$. 即 $0 < d \leqslant \dfrac{4a^2}{n-1}$.

函数不仅是高中数学的核心内容，还是学习高等数学的基础，所以在高考中，函数知识占有极其重要的地位，其试题不但形式多样，而且突出考查学生联系与转化、分类与讨论、数与形结合等重要的数学思想．知识覆盖面广、综合性强、思维力度大、能力要求高，是高考考数学思想、数学方法、能力、素质的主阵地．在高考解答题中，文科大多以对数函数为背景，结合对数运算，以考查对数函数的性质及图象等题型为主；理科解答题多以方程或二次函数为背景，综合考查函数、方程和不等式的知识，重视代数推理能力．此类试题，一般要经过变形转化，归结为二次函数问题解决．这是近年高考的重点和热点．在此基础上，理解和掌握常见的平移、对称变换方法．以基本函数为基础，强化由式到图和由图到式的转化训练．

专题一　函数

1 (2004 年福建卷)

已知 $f(x)=\dfrac{2x-a}{x^2+2}$ $(x\in\mathbf{R})$ 在区间$[-1,1]$上是增函数.

(1) 求实数 a 的值所组成的集合 A;

(2) 设关于 x 的方程 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 的两根为 x_1、x_2. 试问:是否存在实数 m,使得不等式 $m^2+tm+1\geqslant|x_1-x_2|$ 对任意 $a\in A$ 及 $t\in[-1,1]$ 恒成立?若存在,求出 m 的取值范围;若不存在,请说明理由.

2 如图 1-1,在函数 $y=\log_a x$ $(0<a<1,\ x\geqslant1)$ 的图象上有 A, B, C 三点,它们的横坐标分别为 t, $t+2$, $t+4$, 设$\triangle ABC$ 的面积为 S.

(1) 求 S 关于 t 的函数表达式;

(2) 判断 $S(t)$的单调性;

(3) 求函数 $S(t)$的值域.

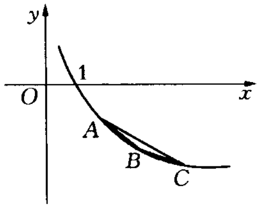


图 1-1

3 已知函数 $f(x)=\dfrac{2x^2+bx+c}{x^2+1}$ $(b<0)$ 的值域为$[1,3]$.

(1) 求 b, c 的值;

(2) 判断 $F(x)=\lg f(x)$ 在$[-1,1]$上的单调性,并给出证明;

(3) 若 $t\in\mathbf{R}$, 求证: $\lg\dfrac{7}{5}\leqslant F\left(\left|t-\dfrac{1}{6}\right|-\left|t+\dfrac{1}{6}\right|\right)\leqslant\lg\dfrac{13}{5}$.

4 已知函数 $y=f(x)=\dfrac{ax^2+1}{bx+c}$ $(a, c\in\mathbf{R},\ a>0,\ b\in\mathbf{N}^*)$ 是奇函数,当 $x>0$ 时, $f(x)$有最小值 2,且 $f(1)<\dfrac{5}{2}$.

(1) 试求函数 $f(x)$的解析式;

(2) 问函数 $f(x)$图象上是否存在关于点$(1,0)$对称的两点,若存在,求出点的坐标;若不存在,请说明理由.

5 设 $f(x)=\lg\frac{1+2^x+3^x+\cdots+(n-1)^x+n^x\cdot a}{n}$ 其中 a 是实数,n 是任意给定的正整数,且 $n\geqslant 2$,如果 $f(x)$ 当 $x\in(-\infty,1]$ 时有意义,求 a 的取值范围.

6 已知函数 $f(x)=\log_a(x+\sqrt{x^2-2})\ (a>0,\ a\neq 1)$ 的反函数为 $f^{-1}(x)$,设 $g(n)=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot f^{-1}(n+\log_a\sqrt{2})$,若 $g(n)<\frac{3^n+3^{-n}}{2}\ (n\in\mathbf{N}^*)$,求 a 的取值范围.

7 已知函数 $f(x)=\log_a\frac{x-3}{x+3}$ 的定义域为$[\alpha,\beta)$,值域为 $(\log_a a(\beta-1),\log_a a(\alpha-1)]$.

(1) 求证:$\alpha>3$.

(2) 若函数 $f(x)$ 为$[\alpha,\beta)$上的减函数,求 a 的取值范围.

8 (2002 年全国卷)

设 a 为实数,函数 $f(x)=x^2+|x-a|+1$, $x\in\mathbf{R}$.

(1) 讨论 $f(x)$的奇偶性;

(2) 求 $f(x)$的最小值.

9 已知函数 $y=f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的周期函数,周期 $T=5$,函数 $y=f(x)$ $(-1\leqslant x\leqslant 1)$ 是奇函数,又如 $y=f(x)$ 在$[0,1]$上是一次函数,在$[1,4]$上是二次函数,且在 $x=2$ 时,函数取得最小值,最小值为-5.

(1) 证明:$f(1)+f(4)=0$;

(2) 试求 $y=f(x)$, $x\in[1,4]$ 的解析式;

(3) 试求 $y=f(x)$ 在$[4,9]$上的解析式.

10 设二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c\ (a, b, c\in \mathbf{R})$ 满足条件：

(1) 当 $x\in \mathbf{R}$ 时，$f(x-4)=f(2-x)$，且 $f(x)\geqslant x$；

(2) 当 $x\in(0, 2)$ 时，$f(x)\leqslant\left(\frac{x+1}{2}\right)^2$；

(3) $f(x)$在 $\mathbf{R}$ 上的最小值为 0.

求最大的 $m\ (m>1)$，使得存在 $t\in\mathbf{R}$，只要 $x\in[1, m]$，就有 $f(x+t)\leqslant x$.

11 已知二次函数 $f(x)=ax^2+bx+1\ (a, b\in\mathbf{R}$ 且 $a>0)$，设方程 $f(x)=x$ 的两个实根为 x_1 和 x_2.

(1) 如果 $x_1<2<x_2<4$，设函数 $f(x)$的对称轴为 $x=x_0$，求证：$x_0>-1$；

(2) 如果 $|x_1|<2$，$|x_2-x_1|=2$，求 b 的取值范围.

12 设二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c\ (a>0)$，方程 $f(x)-x=0$ 的两个根 x_1，x_2 满足 $0<x_1<x_2<\frac{1}{a}$.

(1) 当 $x\in(0, x_1)$ 时，证明：$x<f(x)<x_1$；

(2) 设函数 $f(x)$的图象关于直线 $x=x_0$ 对称，证明 $x_0<\frac{x_1}{2}$.

13 已知二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c$ 和一次函数 $g(x)=-bx$，其中 a, b, c 满足 $a>b>c$，$a+b+c=0\ (a, b, c\in\mathbf{R})$.

(1) 求证：两函数的图象交于不同的两点 A、B；

(2) 求线段 AB 在 x 轴上的射影 A_1B_1 之长的取值范围.

14 已知 a、b、c 是实数，函数 $f(x)=ax^2+bx+c$，$g(x)=ax+b$，当 $-1\leqslant x\leqslant 1$ 时，$|f(x)|\leqslant 1$.

(1) 证明：$|c|\leqslant 1$；