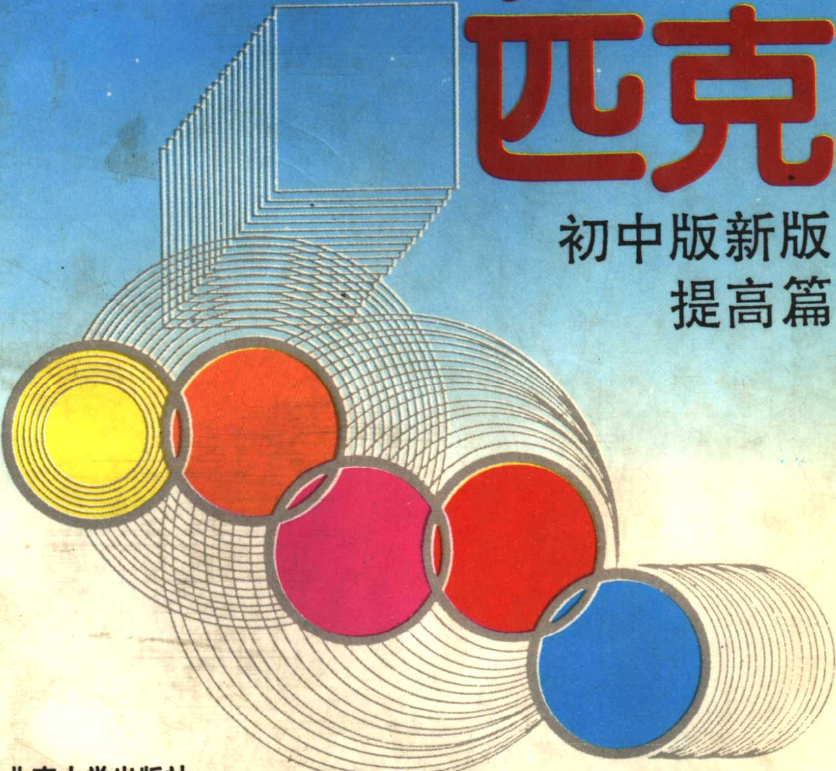
单墫 主编

数学奥林匹克

初中版新版

提高篇



北京大学出版社

数学奥林匹克

初中版新版·提高篇

单 墫 主编

熊 斌 编撰

北京大学出版社

数学奥林匹克

初中版新版·提高篇

单 墫 主编

熊 斌 编撰

责任编辑：王明舟

*

北京大学出版社出版发行

（北京大学校内）

唐山市兴卫装潢印刷厂印刷

新华书店经售

*

787×1092毫米 32开本 15.375印张 330千字

1992年12月第一版 1998年2月第8次印刷

ISBN 7-301-02052-X/G·143

定价：15.00元

序

数学竞赛在我国普遍开展，成绩斐然。不少出版社出版了与竞赛有关的图书，起到良好的推动作用。北京大学出版社出版的这套《数学奥林匹克系列图书》就是其中的一种，它能受到广大读者的欢迎我们非常高兴。

这是我国出版的第一套数学竞赛的系列图书。系列中有高中册，也有初中册与小学册；有普及，也有提高；有最新的资料，也有经过系统整理的题解辞典。目前已出 16 册，近两年内还将推出 10 多种。各地奥林匹克学校采用，普遍反映效果很好。一个突出的例子是国家教委所办的理科实验班使用这套图书，每年都为参加国际数学奥林匹克的我国国家集训队、国家代表队输送约 2/3 的队员。

根据各地提出的意见与建议，这套图书作了不少改进，小学册与初中册均出了新版，并编写了高中版。新版致力于“浅”(即深入浅出)、“趣”(生动有趣)。注意普及，面向广大中小学生，避免过深、过难；注意教学原则的运用，循序渐进，适当重复；注意数学思想的启蒙与打好扎实的基础。我们相信这对于发展智力，对于参加竞赛，对于升学考试均有益处。

系列的另一个特点是“新”。有不少新鲜的资料，如《第 31 届国家集训队资料》，《第 31 届国际数学竞赛预选题》、《苏联数学奥林匹克试题汇编》、《美国数学奥林匹克试题汇编》等都及时整理推出。这套系列中，有关国际竞赛的若干册，可以说代表了当前竞赛的最高水平。这些属于提高的分册，已成为我

国集训队人人必备的材料。

除“浅”、“趣”、“新”等特点外，我们还尽力做到“准”，即科学性方面没有错误。各册作者与编者为此付出不少心血，但由于水平与时间等原因，错误与不妥之处仍难完全避免，敬请广大读者不吝指正。

参加编写工作的有教育家，高级教练及有丰富实践经验的中学教师，更有著名数学家丁石孙、王元、王梓坤、龚升诸位先生担任顾问，保证了这套系列图书的质量。

北京大学出版社，重视社会效益，以最快的速度出版这套系列图书，我们表示衷心的感谢。

单墫

1992年9月

编辑说明

数学奥林匹克事业在中国大地迅猛发展，并得到了党和政府的大力扶持，各级教育行政部门及社会各界也都积极支持这项事业，为中国在国际竞赛中取得优异成绩提供了强有力的保证。

但是，我国正式参加国际竞赛的时间较短，与长期普遍开展这一活动的国家相比，在一些方面还有差距，特别是高水平的基层教练人员不多，可供培训使用的科学性、系统性、针对性都较强的材料贫乏，这些已成为阻碍我国数学竞赛向更高层次、更广范围发展的重要因素。基于此，北京大学出版社从1988年开始，着手组织编写了一套供小学学生到高中学生使用的《数学奥林匹克》系列图书，著名数学家丁石孙、王元、王梓坤、龚升诸先生任顾问，在国内外享有盛誉的数学奥林匹克专家、前国家教练组组长、第31届国际数学竞赛中国国家队领队兼主教练单墫教授任主编，编委及主要作者均为在国内外有一定影响的数学奥林匹克专家。

《数学奥林匹克》系列图书包括三个部分：从小学到高中的培训教材、国内外高水平竞赛材料、国家集训队集训资料；在近期内还将出版竞赛题解辞典。本系列图书自正式出版发行以来，行销全国各地，普遍反映效果很好。国家教委理科实验班及国家集训队、国家代表队都将本系列中的部分图书作为主要培训材料之一。在此，北京大学出版社及系列图书编委会向广大新老读者表示衷心的感谢！

根据各地读者提供的意见与建议，我们在继续及时出版有关国内外竞赛材料的同时，重新组织编写了小学版、初中版、高中版。新版广泛吸取了读者的建议，熔入了国内外各级竞赛的最新材料，特别参照国家教委新颁教学大纲，有层次，有梯度，有特点，旨在使程度不同的学生都可以学有所获。

初中版新版由单墫教授主编，写作提纲由编委会讨论并征求了部分专家、中小学教师及学生的意见。《基础篇》由北京市奥林匹克学校副校长孙瑞清副教授及傅敬良撰写，《知识篇》由北京市数学奥林匹克学校主教练、高级教练员、中国数学会理事胡大同及陈娴撰写，《提高篇》由华东师大数学系讲师、高级教练员、多届国家集训队教练熊斌撰写。全书由主编单墫教授审定。

为了使这套图书更好地发挥作用，热忱希望读者朋友及社会各界人士提出改进意见。

北京大学出版社将一如既往地为数学奥林匹克事业服务，为振兴中国的数学尽我们的力量。

最后，再次向读者朋友表示衷心的感谢！

1992年12月

目　录

第一讲　指数与对数

指数与对数是初中代数的重要内容，也是学习指数函数与对数函数的基础．掌握指数和对数的概念，熟练掌握指数与对数之间的内在联系，这不仅对解决涉及到指数和对数的数学题颇有益，而且对于提高学生的解题能力亦十分有益．本讲仅就初中代数中的有关指数与对数的计算、证明、常用对数等问题作些介绍．

1．指数与对数的计算问题

指数与对数的计算是最基本的问题，要求能熟练地进行指数式与对数式的互换，掌握指数和对数的运算法则．

例1　已知$x>0, y>0$，且

$$x^{\frac{1}{2}}(x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}})=3y^{\frac{1}{2}}(x^{\frac{1}{2}}+5y^{\frac{1}{2}}),$$

求$\dfrac{2x+x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}+3y}{x+x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}-y}$的值．

分析　由于没有给出字母的值，只有根据条件找出x与y的“较简单”的关系，代入欲求值的式中．

解　由已知条件得

$$x+x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}=3x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}+15y,$$

所以

$$(x^{\frac{1}{2}}-5y^{\frac{1}{2}})(x^{\frac{1}{2}}+3y^{\frac{1}{2}})=0.$$

因为$x^{\frac{1}{2}}+3y^{\frac{1}{2}}\neq 0$,所以

$$x^{\frac{1}{2}}-5y^{\frac{1}{2}}=0,$$

即$x=25y$。代入求值式中得

$$原式=\frac{2\times 25y+5y^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}+3y}{25y+5y^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}-y}$$

$$=\frac{50y+5y+3y}{25y+5y-y}=2。$$

例2 已知$\log_a x=4,\log_a y=5(a>0,a\neq 1)$,试求

$$A=\left(x\sqrt[3]{\frac{\sqrt{x^{-1}}}{y^2}}\right)^{\frac{1}{2}}$$

的值。

分析 因对数运算比指数运算来得方便，故采用对数方法求解。

解 $\log_a A=\frac{1}{2}\left[\log_a x+\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\log_a x-2\log_a y\right)\right]$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{5}{6}\log_a x-\frac{2}{3}\log_a y\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{5}{6}\times 4-\frac{2}{3}\times 5\right)=0,$$

从而$A=1$。

例3 若$\log_8 a+\log_4 b^2=5$，$\log_8 b+\log_4 a^2=7$，试求ab的值。

解 由题意知

$$\frac{1}{3}\log_2 a+\log_2 a=5, \qquad ①$$

$$\frac{1}{3}\log_2 b + \log_2 a = 7. \qquad ②$$

①与②相加，得

$$\frac{1}{3}\log_2 ab + \log_2 ab = 12,$$

即 $$\log_2 ab = 9.$$

所以 $$ab = 2^9 = 512.$$

说明　上面用了对数的一个性质：$\log_{a^m} b^n = \frac{n}{m}\log_a b$. 这一性质在后面还会用到。

例4　已知$\log_{18}9 = a$，$18b = 5$，求$\log_{36}45$.

分析　解这类问题的基本方法是：将条件和所求式中的底数和真数都分解为质数的乘积，利用对数的换底公式和运算法则将它们分别表示为质数的常用对数，从条件中解出各个质数的常用对数代入所求式便可得到结果。

解　因为$a = \log_{18}9 = \frac{\lg 9}{\lg 18} = \frac{2\lg 3}{\lg 2 + 2\lg 3}$,所以

$$a\lg 2 + (2a-2)\lg 3 = 0. \qquad ①$$

又因为$18^b = 5$,所以 $b = \log_{18}5 = \frac{\lg 5}{\lg 18} = \frac{1-\lg 2}{\lg 2 + 2\lg 3}$,即

$$(b+1)\lg 2 + 2b\lg 3 - 1 = 0. \qquad ②$$

从①及②解得

$$\lg 2 = \frac{2a-2}{2a-2b-2}, \quad \lg 3 = \frac{-a}{2a-2b-2}.$$

所以

$$\log_{36}45 = \frac{1 + 2\lg 3 - \lg 2}{2\lg 2 + 2\lg 3} = \frac{a+b}{2-a}.$$

说明　上述解法虽有一般性，但使用起来有时较繁琐。如果能根据题目的特点灵活地选取对数的底数，解起来可能简单些。下面用18为底数一试。

$$\log_{36}45=\frac{\log_{18}45}{\log_{18}36}=\frac{\log_{18}9+\log_{18}5}{\log_{18}9+2\log_{18}2}$$

$$=\frac{a+b}{a+2\log_{18}2}.$$

因为$a=\log_{18}9=\log_{18}\frac{18}{2}=1-\log_{18}2$，所以

$$\log_{18}2=1-a.$$

于是
$$\log_{36}45=\frac{a+b}{a+2(1-a)}=\frac{a+b}{2-a}.$$

例5　求满足$x\geqslant1,y\geqslant1,z\geqslant1,xyz=10$，且

$$x^{\lg x}\cdot y^{\lg y}\cdot z^{\lg z}\geqslant10$$

的x,y,z的值。

解　对式$x^{\lg x}\cdot y^{\lg y}\cdot z^{\lg z}\geqslant10$的两边取常用对数，整理得

$$\lg^2x+\lg^2y+\lg^2z\geqslant1.$$

而

$$\begin{aligned}&\lg^2x+\lg^2y+\lg^2z\\&\quad=(\lg x+\lg y+\lg z)^2-2(\lg x\lg y+\lg y\lg z+\lg z\lg x)\\&\quad=[\lg(xyz)]^2-2(\lg x\lg y+\lg y\lg z+\lg z\lg x)\\&\quad=1-2(\lg x\lg y+\lg y\lg z+\lg z\lg x)\geqslant1,\end{aligned}$$

所以

$$\lg x\lg y+\lg y\lg z+\lg z\lg x\leqslant0.$$

因x,y,z均大于等于 1，故$\lg x,\lg y,\lg z$均大于等于0。所以仅当 $\lg y=\lg z=0$ 或 $\lg x=\lg z=0$ 或 $\lg x=\lg y=0$ 时成立，即 $x=10$，$y=z=1$ 或 $y=10$，$x=z=1$ 或 $z=10$，$x=y=1$。

说明 当指数式的底数和指数均出现字母时，常常采用对该式取对数的方法转换成指数上不含字母的式子。

例6 设p,q满足$\log_9 p=\log_{12}q=\log_{16}(p+q)$，求$\frac{q}{p}$。

解 令

$$\log_9 p=\log_{12}q=\log_{16}(p+q)=t。$$

则
$$9^t=p,\ 12^t=q,\ 16^t=p+q。$$

所以
$$9^t+12^t=16^t,$$

$$1+\left(\frac{12}{9}\right)^t=\left(\frac{16}{9}\right)^t。$$

因为$\frac{q}{p}=\left(\frac{12}{9}\right)^t=\left(\frac{4}{3}\right)^t$，所以$\left(\frac{16}{9}\right)^t=\left(\frac{4}{3}\right)^{2t}=\left(\frac{q}{p}\right)^2$。于是

$$\left(\frac{q}{p}\right)^2-\left(\frac{q}{p}\right)-1=0。$$

解得
$$\frac{q}{p}=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}。$$

由题意知$p\geqslant0$，$q\geqslant0$，所以$\frac{q}{p}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$。

2．证明问题

证明是培养逻辑思维能力的一种重要手段，有关指数和对数的证明问题是初中代数证明的一个非常好的教材，在数学竞赛中也会经常遇到，必须给予重视。

例7 已知 $a^x b^y c^z = a^y b^z c^x = a^z b^x c^y = 1 (a,b,c>1)$，求证：

$$x+y+z=0。$$

证 先对已知式两边取对数，使指数上不含字母。记 $\lg a = A, \lg b = B, \lg c = C$。因 $a,b,c>1$，所以 $A,B,C>0$。由题设有

$$\lg(a^x b^y c^z) = \lg(a^y b^z c^x) = \lg(a^z b^x c^y) = 0,$$

即

$$Ax+By+Cz=0,$$

$$Bx+Cy+Az=0,$$

$$Cx+Ay+Bz=0。$$

将上面三式相加，得

$$(A+B+C)(x+y+z)=0。$$

因为 $A+B+C>0$，所以 $x+y+z=0$。

例8 已知

$$\frac{x(y+z-x)}{\log_a x} = \frac{y(z+x-y)}{\log_a y} = \frac{z(x+y-z)}{\log_a z},$$

求证：$y^z z^y = z^x x^z = x^y y^x$。

证 设已知等式中的比值为 $\frac{1}{k}$，则

$$\log_a x = kx(y+z-x),$$

$$\log_a y = ky(z+x-y),$$

$$\log_a z = kz(x+y-z)。$$

由此得

$$\begin{aligned}\log_a y^z z^y &= z\log_a y + y\log_a z \\ &= kyz(z+x-y) + kyz(x+y-z) \\ &= 2kxyz。\end{aligned}$$

类似地，可得

$$\log_a z^x x^z = 2kxyz,$$

$$\log_a x^y y^x = 2kxyz.$$

所以

$$\log_a y^z z^y = \log_a z^x x^z = \log_a x^y y^x,$$

即

$$y^z z^y = z^x x^z = x^y y^x.$$

说明　本题欲证的是一个关于幂的连等式，而已知等式只涉及对数，不涉及幂，因而先证明相应对数之间的连等式，再转移到幂的连等式，这是一种常用的技巧。

例9　对于正整数 $a,b,c(a\leqslant b\leqslant c)$ 和实数 x,y,z,w，若

$$a^x = b^y = c^z = 70^w, \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{w},$$

求证：$a+b=c$。

证　由 $a^x = b^y = c^z = 70^w$，得

$$a^{\frac{1}{w}} = 70^{\frac{1}{x}},\ b^{\frac{1}{w}} = 70^{\frac{1}{y}},\ c^{\frac{1}{w}} = 70^{\frac{1}{z}}.$$

所以

$$(abc)^{\frac{1}{w}} = 70^{\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)},$$

$$abc = 70.$$

因为 x,y,z,w 均不等于 0，从 $a^x = b^y = c^z = 70^w \neq 1$ 知 a,b,c 均不为1。又 $70=2\times5\times7$，而2,5,7为质数，所以 $70=2\times5\times7$ 是分解因数的唯一方法。由于 $abc=70$，$a\leqslant b\leqslant c$，所以

$$a=2,\ b=5,\ c=7,$$

$$a+b=c.$$

例10　已知 $A=6\lg p+\lg q$，其中 p,q 为质数，且满足 $q-p=29$，求证：$3<A<4$。

证　从 p,q 为质数且 $q-p=29$ 可知：p 与 q 必为一奇一偶，而既是偶数又是质数的数只有 2，故 $p=2$，$q=31$。