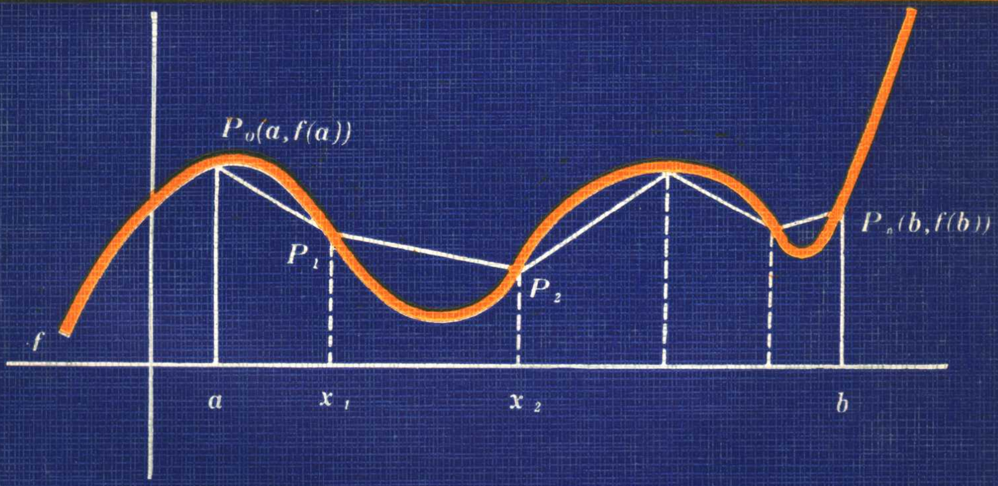
微積分

中冊

EDWIN E. MOISE 原著

吳森原 徐 復 張德新 合譯



校閱者

李新民 徐道寧

東華書局印行

微積分

CALCULUS

中　　册

EDWIN E. MOISE 原著

吳森原 徐 復 張德新 合譯

校閱者

李新民 徐道寧

東華書局印行

中華民國五十九年一月初版
中華民國六十八年四月三版

大學用書 微 積 分（全三册）

中册 定價 新台幣七十元整
（外埠酌加運費滙費）

譯 者 吳森原 徐 復 張德新
發行人 卓 鑫 淼
出版者 臺灣東華書局股份有限公司
臺北市博愛路一〇五號
電話：3819470 郵撥：6481
印刷者 中 臺 印 刷 廠
臺中市公園路三十七號

行政院新聞局登記證 局版臺業字第零柒貳伍號
（58034）

微 積 分

中 册 目 次

第六章　積分法

第七章　定積分

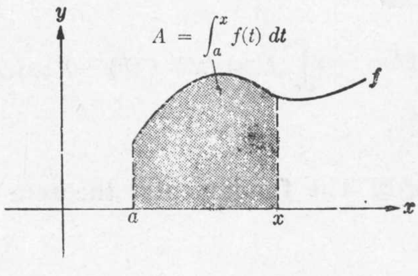
6

積　分　法

6.1 引　　言

在 3.7 節中曾覓得解某些型式之面積問題之有效方法. 欲求位於連續函數 f 圖形下方由 a 至 b 之面積, 曾引用"面積函數"

$$F(x)=\int_a^x f(t)\,dt,$$



且知對每一 x, 有

$$F'(x)=D\int_a^x f(t)\,dt=f(x).$$

欲計算面積函數, 可求(若爲可能)另一函數 G, 使

$$G'=f.$$

於是

$$G'=F'.$$

若 $G(a)=0$,則對每一 $x, G(x)=F(x)$. 若否,則令

$$H(x)=G(x)-G(a),$$

於是

$$H'(x)=G'(x)=F'(x), \quad H(a)=0.$$

故對每一 x,

$$H(x)=F(x).$$

因而得

$$\int_a^b f(t)\,dt=F(b)=H(b)=G(b)-G(a).$$

綜上可知

$$G'=f \Rightarrow \int_a^b f(t)\,dt=G(b)-G(a).$$

記號 t 與 G 乃因便於推演而引用者. 一旦得知答案,則以 x 與 F 表之,似覺更爲自然. 此即

$$F'=f \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx=F(b)-F(a).$$

述爲更正式之形式:

定理 1 (積分基本定理 The fundamental theorem of integral calculus).

若 f 連續於 $[a,b]$, 且 $F'=f$, 則

$$\int_a^b f(x)\,dx=F(b)-F(a).$$

當然,若 f 已知, 欲應用本定理時, 必須求出 F. 此一步驟稱爲**反微分法 (antidifferentiation)**. 以後將可得知此種反微分法事實上有多方面之用途; 不僅可用於求解前所述及之面積問題, 並可用於解多種不屬面積問題之重要問題. 但此種進一步之應用將於以後討論之.

蓋因欲用此種方法,必須知悉如何計算一函數 F 使其導數爲一已知函數 f; 截至目前, 僅於相當簡易之情形下, 可用試驗之程序求出函數 F, 但若將各種難題推演爲反微分問題後, 再發現無法解此反微分問題,則將令人沮喪.因此,似以先略費篇幅,學得由已知導數求其函數之有效方法方爲善策.

6.2 自變數與不定積分

定義函數之一般方法,乃爲對定義域之每一數,寫出一式以表其所對應之函數值.例如寫出

$$f(x)=x^2 \quad (-\infty<x<\infty), \quad g(x)=\sqrt{x} \quad (x\geqq 0),$$

即可以定義函數 f 與 g. 在此二式中,文字"x"稱爲**自變數** (**independent variable**), 僅爲一種啞文字,表示數所插入之位置. 依邏輯而言,啞文字不論以何字代之均無差別.例如書爲

$$f(t)=t^2 \quad (-\infty<t<\infty), \quad g(t)=\sqrt{t} \quad (t\geqq 0),$$

可以定義與前述完全相同之二函數.若既經決定以x表啞文字, 則稱 f 爲 x 之函數. 於是, $g(t)=\cos^2 t$ 表 g 爲 t 之函數; $h(\alpha)=\alpha^3-1$ 表 h 爲 α 之函數等等.

今回至求反微分之問題.由唯一性定理,已知兩函數在一區間內若有相同之導數,則其差爲一常數.例如若

$$f'(x)=x^2 \quad (-\infty<x<\infty),$$

則 f 必爲形如

$$f(x)=\frac{x^3}{3}+C$$

之一函數，其中 C 爲一常數．反之對每一 $C, D(x^3/3+C)=x^2$ 自然成立．故知

$$\{F|F'=x^2\}=\left\{\frac{x^3}{3}+C\right\}.$$

$F'=f$ 之全部函數所成集通常以

$$\int f(x)\,dx$$

表之．上式稱爲 f 之**不定積分** (**indefinite integral**)．例如

$$\int x^4 dx=\{F|F'(x)=x^4\}=\left\{\frac{1}{5}x^5+C\right\},$$

$$\int \cos x\,dx=\{F|F'(x)=\cos x\}=\{\sin x+C\}$$

等等．任意其他啞文字亦均可表同一事項如下：

$$\int t^4 dt=\{F|F'(t)=t^4\},$$

$$\int \cos t\,dt=\{F|F'(t)=\cos t\}.$$

上列每種情形，右端之大括弧表形如括弧內所予函數之全部函數所成集．符號 dx（或 dt）僅指示於敍述函數時，乃以 x（或 t）作爲啞文字．上例中，此一指示似乎並非必須．同樣，書寫

$$\int (3x^3+2x^4)\,dx=\left\{\frac{3x^4}{4}+\frac{2x^5}{5}+C\right\}$$

時，雖無"dx"亦可知其所指，蓋因數字常數 2 與 3 乃僅有之常數．但對

$$\int (\alpha x^3 y+\beta x^2 y^2)\,dx,$$

則 "dx" 必不可缺；蓋此乃指示 α, β, y 爲常數，而所討論之函數爲

$$f(x)=\alpha x^3 y+\beta x^2 y^2.$$

當問題之涵意如此時，其答案顯然爲

$$\int(\alpha x^3y+\beta x^2y^2)\,dx=\left\{\frac{\alpha x^4y}{4}+\frac{\beta x^3y^2}{3}+C\right\}. \qquad \text{(i)}$$

此可與下式比較之:

$$\int(\alpha x^3y+\beta x^2y^2)\,dy=\left\{\frac{\alpha x^3y^2}{2}+\frac{\beta x^2y^3}{3}+C\right\}, \qquad \text{(ii)}$$

$$\int(\alpha x^3y+\beta x^2y^2)\,d\alpha=\left\{\frac{\alpha^2x^3y}{2}+\beta x^2y^2\alpha+C\right\}, \qquad \text{(iii)}$$

$$\int(\alpha x^3y+\beta x^2y^2)\,d\beta=\left\{\alpha x^3y\beta+\frac{\beta^2x^2y^2}{2}+C\right\}, \qquad \text{(iv)}$$

(i)式中, α,β,y 爲常數,且函數爲(i)式前所描述之 $f(x)$. (ii)式中, α,β,x 爲常數,且函數爲

$$g(y)=\alpha x^3y+\beta x^2y^2.$$

(iii)式中, x,y,β 爲常數,且函數爲

$$h(\alpha)=\alpha x^3y+\beta x^2y^2.$$

(iv)式類推.

計算不定積分之程序稱爲**求不定積分** (**indefinite integration**),或簡稱之爲**積分**. 已知一微分公式,可視需要而適當調整其常數,將已知公式反轉方向而寫出其對應之積分公式. 下列每一情形,右邊之公式皆可由左邊之公式導出之.

$$D\,x^n=nx^{n-1} \quad (n\neq 0),$$

$$D\,x^{n+1}=(x+1)x^n \quad (n\neq -1),$$

$$D\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)=x^n \quad (n\neq -1) \Rightarrow \int x^n dx=\left\{\frac{1}{n+1}x^{n+1}+C\right\} \quad (n\neq -1),$$

$$D\sqrt{x}=\frac{1}{2\sqrt{x}},$$

$$D\,(2\sqrt{x})=\frac{1}{\sqrt{x}} \Rightarrow \int\frac{1}{\sqrt{x}}dx=\{2\sqrt{x}+C\},$$

$$D\sin x=\cos x \quad \Rightarrow\int\cos x dx=\{\sin x+C\},$$

$$D\cos x=-\sin x,$$

$$D\,(-\cos x)=\sin x\Rightarrow\int\sin x dx=\{-\cos x+C\},$$

$$D\ln x=\frac{1}{x}\,(x>0) \Rightarrow \int\frac{1}{x}dx=\{\ln x+C\} \quad (x>0),$$

$$D\,e^x=e^x \quad \Rightarrow \int e^x dx=\{e^x+C\}.$$

上述公式自僅爲一些樣本之簡表;前所已知之微分公式遠多於此,故可寫出更多之積分公式.今將此一工作延後,直至能寫出更好且更一般之式時,再列出完整之表.

已知函數 f, 若 u 爲另一函數, 則 $f(u)$ 爲合成函數, 以 f 爲外側函數而以 u 爲內側函數.由連鎖法則,知

$$Df(u)=f'(u)u'.$$

由此得

$$\int f'(u)u'(x)\,dx=\{f(u(x))+C\}.$$

例如若

$$f(u)=\sin u,\quad u(x)=x^2+1,$$

則

$$D[f(u(x))]=D[\sin(x^2+1)]=f'(u)u'(x)=(\cos u)2x$$
$$=[\cos(x^2+1)]2x.$$

故

$$\int[\cos(x^2+1)]2x\,dx=\{\sin(x^2+1)+C\}.$$

更一般,

$$D\ \sin u(x)=[\cos u(x)]\,u'(x),$$

故

$$\int[\cos u(x)]u'(x)\,dx=\{\sin u(x)+C\}.$$

事實上,上之公式對任意函數均成立.若已知

$$F'=f,$$

因而

$$\int f(x)\,dx=\{F(x)+C\},$$

則恆可更一般斷言

$$D[F(u(x))]=F'(u(x))\,u'(x)=f(u(x))\,u'(x),$$

因而

$$\int f(u(x))\,u'(x)\,dx=\{F(u(x))+C\}.$$

爲簡便計,在此公式中,常將啞文字略去,而以符號 du 表 $u'(x)dx$ 之縮寫.因此

$$\int\cos u\,du=\{\sin u+C\}$$

一式其意爲對每一可微分之函數 $u(x)$, 恆得

$$\int[\cos u(x)]u'(x)\ dx=\{\sin u(x)+C\}.$$

同樣,

$$\int e^u du=\{e^u+C\}$$

一式意爲若 u 爲任一可微分之函數,則

$$\int e^{u(x)}u'(x)\,dx=\{e^{u(x)}+C\}.$$

此式爲眞,蓋因

$$De^{u(x)}=e^{u(x)}u'(x).$$

使用不同之啞文字，同樣可將上列積分公式改書爲下列之任意形式：

$$\int e^{u(\theta)}u'(\theta)\,d\theta, \qquad \text{或} \qquad \int e^{u(t)}u'(t)\,dt,$$

等等．但當用一甚長之記號開始描述積分時，常可發現其可用簡式改述之．例如

$$\int e^{x^2+1}2x\,dx$$

可改爲

$$\int e^{u(x)}u'(x)\,dx,$$

其中 $u(x)=x^2+1$．故

$$\int e^{x^2+1}\,2x\,dx=\int e^u du=\{e^u+C\}=\{e^{x^2+1}+C\}.$$

同樣，$\int[\sin(t^2+1)]2t\,dt$ 實爲形如 $\int\sin u\,du$ 之式．因而

$$\int[\sin(t^2+1)]\,2t\,dt=\int\sin u\,du=\{-\cos u+C\}=\{-\cos(t^2+1)+C\}.$$

注意上述第三式並未完全解出，蓋因 u 爲一函數．欲完成其解，須將函數 u 用啞文字 t 表之．

總括之：

$$F'=f \Rightarrow D[F(u)]=f(u)u',$$

故

$$\int f(x)\,dx=\{F(x)+C\} \Rightarrow \int f(u(x))\,u'(x)\,dx=\{F(u)+C\}.$$

用縮寫式，以 du 表 $u'(x)\,dx$，得

$$\int f(x)\,dx=\{F(x)+C\} \Rightarrow \int f(u)\,du=\{F(u)+C\}.$$

依此一般觀念，可將以前之積分公式表爲更一般化之式．例如最初幾個乃爲

$$\int u^n du=\left\{\frac{u^{n+1}}{n+1}+C\right\}, \qquad \int \frac{1}{\sqrt{u}}du=\{2\sqrt{u}+C\},$$

$$\int \cos u\, du=\{\sin u+C\}, \int \sin u\, du=\{-\cos u+C\},$$

$$\int \frac{1}{u}\, du=\{\ln u+C\} \quad (u>0), \qquad \int e^u du=\{e^u+C\}.$$

並可得

$$\int [f(x)+g(x)]dx=\int f(x)dx+\int g(x)dx,$$

$$\int kf(x)dx=k\int f(x)dx, \quad k\neq 0,$$

蓋因

$$D[f+g]=Df+Dg \quad \text{且} \quad D(kf)=kDf.$$

今討論如何於實際問題中應用此種公式.

例題 1. 討論

$$\int (x^2+1)^7 x\, dx.$$

此式雖非完全,但大約形如

$$\int u^7\, du.$$

若令 $u(x)=x^2+1$, 則

$$du=u'(x)dx=2x\, dx,$$

故得

$$\int (x^2+1)^7 x\, dx=\int \frac{1}{2}(x^2+1)^7\, 2x\, dx=\int \frac{1}{2}u^7 du$$

$$=\left\{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{8}u^8+C\right\}=\left\{\frac{1}{16}(x^2+1)^8+C\right\}.$$

核對之:

$$D\left[\frac{1}{16}(x^2+1)^8\right]=\frac{1}{16}\cdot 8(x^2+1)^7\cdot 2x=(x^2+1)^7x.$$

例題 2. 討論

$$\int\frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx \qquad (x>0).$$

前所知而可能適合上式之式僅爲$\int\cos u\,du$. 若如此,則可得

$$u(x)=\sqrt{x},\quad du=u'(x)dx=\frac{1}{2\sqrt{x}}dx.$$

由此所得之式與所欲得之式間僅有之差異爲乘法常數,因此知可書爲

$$\int\frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx=\int(\cos\sqrt{x})\frac{1}{\sqrt{x}}dx=2\int(\cos\sqrt{x})\frac{1}{2\sqrt{x}}dx$$
$$=2\int\cos u\,du=\{2\sin u+C\}=\{2\sin\sqrt{x}+C\}.$$

例題 3. 討論

$$\int e^{\cos x}\sin x\,dx.$$

目前僅有一積分公式含有指數函數:

$$\int e^u\,du=\{e^u+C\}.$$

若問題適合此式,則必得

$$u(x)=\cos x,\quad du=u'(x)dx=-\sin x\,dx.$$

在此乘法常數不致引起困難:

$$\int e^{\cos x}\sin x\,dx=\int-e^{\cos x}(-\sin x)dx=\int-e^u\,du$$
$$=\{-e^u+C\}=\{-e^{\cos x}+C\}.$$

下面將基於前所已知之微分公式列出目前所能寫出之積分公式．但對 $\int (1/u)\,du$ 之公式特別加以完整之解說．已予一函數 u，定義於對每一 x 均有 $u(x)>0$ 之一定義域．因此

$$D\ln u(x)=\frac{1}{u(x)}Du(x).$$

因僅正數具有對數，故在所論之定義域中必須有 $u(x)>0$．由此可寫爲

$$\int\frac{1}{u}du=\{\ln u+C\}\quad(u>0).$$

而另一方面，即使在定義域中 $u(x)<0$，下式亦完全有意義：

$$\int\frac{1}{u}du.$$

此即求具有導數 $\left(1/u\right)u'$ 之函數 f 爲有意義．其答案不難求出：若 $u(x)<0$，則 $-u(x)>0$．故 $-u(x)$ 具有對數；且

$$D[\ln(-u(x))]=\frac{1}{-u(x)}D[-u(x)]=\frac{1}{-u(x)}(-u'(x))$$

$$=\frac{1}{u(x)}u'(x).$$

依此得

$$\int\frac{1}{u}du=\{\ln(-u)+C\}\quad(u<0);$$

故得載於下表中之 $\int (1/u)\,du$ 之兩公式．

$$\int kf(x)\,dx=k\int f(x)\,dx\quad(k\neq 0)\tag{1}$$

$$\int[f(x)+g(x)]\,dx=\int f(x)\,dx+\int g(x)\,dx\tag{2}$$