九年级

总主编　单墫　熊斌

奥数教程

葛军　编著

华东师范大学出版社

总主编 单 墫 熊 斌

奥数教程

（第三版）

·九年级·

葛 军 编著

华 东 师 范 大 学 出 版 社

本 书 荣 获

第十届全国教育图书展

优秀畅销图书奖

《奥数教程》编委会

顾　问　王　元

主　编　单　墫　熊　斌

编　委　（按姓氏笔画为序）

冯志刚　刘诗雄

江兴代　余红兵

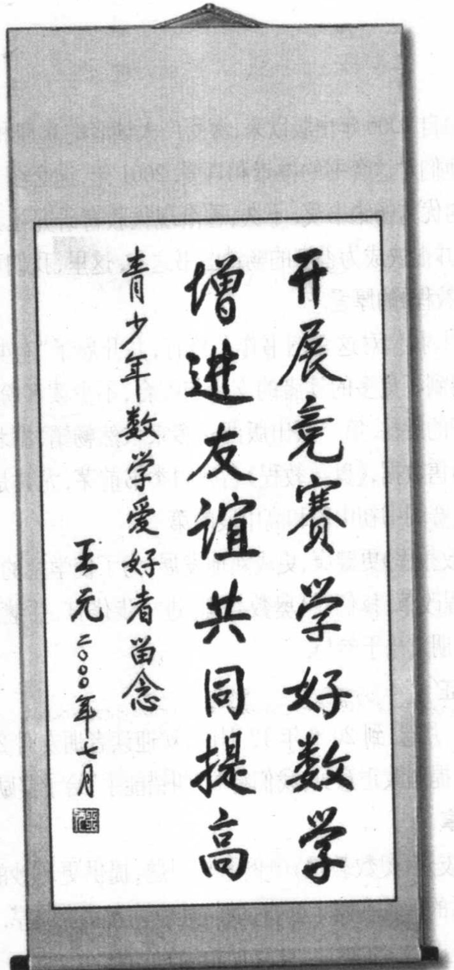
单　墫　杭顺清

胡大同　赵雄辉

倪　明　葛　军

熊　斌

葛　军　南京师范大学数学与计算机科学学院副教授，硕士生导师，中国数学奥林匹克高级教练，南京师大附属实验学校校长．主要从事竞赛数学、解题理论、数学课程与教学论等方面的研究，已发表论文60余篇，参编教材与著作30多部，其中主编《新编奥林匹克数学竞赛指导（高中）》、《小学数学奥林匹克启蒙》，编著《初等数学研究教程》、《数学教学论与数学教学改革》等．



著名数学家、中国科学院院士、原中国数学奥林匹克委员会主席王元先生致青少年数学爱好者

前　言

据说在很多国家,特别是美国,孩子们害怕数学,把数学作为“不受欢迎的学科”.但在中国,情况很不相同,很多少年儿童喜爱数学,数学成绩也都很好.的确,数学是中国人擅长的学科,如果在美国的中小学,你见到几个中国学生,那么全班数学的前几名就非他们莫属.

在数(shǔ)数(shù)阶段,中国儿童就显出优势.

中国人能用一只手表示 1～10,而很多国家非用两只手不可.

中国人早就有位数的概念,而且采用最方便的十进制(不少国家至今还有12 进制,60 进制的残余).

中国文字都是单音节,易于背诵,例如乘法表,学生很快就能掌握,再“傻”的人也都知道“不管三七二十一”.但外国人,一学乘法,头就大了.不信,请你用英语背一下乘法表,真是佶屈聱牙,难以成诵.

圆周率 $\pi = 3.14159\cdots$. 背到小数后五位,中国人花一两分钟就够了.可是俄国人为了背这几个数字,专门写了一首诗,第一句三个单词,第二句一个,……要背 π 先背诗,我们看来简直自找麻烦,可他们还作为记忆的妙法.

四则运算应用题及其算术解法,也是中国数学的一大特色.从很古的时候开始,中国人就编了很多应用题,或联系实际,或饶有兴趣,解法简洁优雅,机敏而又多种多样,有助于提高学生学习兴趣,启迪学生智慧.例如:

“一百个和尚一百个馒头,大和尚一个人吃三个,小和尚三个人吃一个,问有几个大和尚,几个小和尚?”

外国人多半只会列方程解.中国却有多种算术解法,如将每个大和尚“变”成 9 个小和尚,100 个馒头表明小和尚是 300 个,多出 200 个和尚,是由于每个大和尚变小和尚,多变出 8 个,从而 $200 \div 8 = 25$ 即是大和尚人数.小和尚自然是 75 人,或将一个大和尚与 3 个小和尚编成一组,平均每人吃一个馒头.恰好与总体的平均数相等.所以大和尚与小和尚这样编组后不多不少,即大和尚是 $100 \div (3+1) = 25$ 人.

中国人善于计算，尤其善于心算. 古代还有人会用手指计算(所谓"掐指一算"). 同时，中国很早就有计算的器械，如算筹、算盘. 后者可以说是计算机的雏形.

在数学的入门阶段——算术的学习中，我国的优势显然，所以数学往往是我国聪明的孩子喜爱的学科.

几何推理，在我国古代并不发达(但关于几何图形的计算，我国有不少论著)，比希腊人稍逊一筹. 但是，中国人善于向别人学习. 目前我国中学生的几何水平，在世界上遥遥领先. 曾有一个外国教育代表团来到我国一个初中班，他们认为所教的几何内容太深，学生不可能接受，但听课之后，不得不承认这些内容中国的学生不但能够理解，而且掌握得很好.

我国数学教育成绩显著. 在国际数学竞赛中，我国选手获得众多奖牌，就是最有力的证明. 从 1986 年我国正式派队参加国际数学奥林匹克以来，中国队已经获得了 11 次团体冠军. 成绩骄人. 当代著名数学家陈省身先生曾对此特别赞赏. 他说"今年一件值得庆祝的事，是中国在国际数学竞赛中获得第一. ……去年也是第一名."(陈省身 1990 年 10 月在台湾成功大学的讲演"怎样把中国建为数学大国")

陈省身先生还预言："中国将在 21 世纪成为数学大国."

成为数学大国，当然不是一件容易的事，不可能一蹴而就，它需要坚持不懈的努力. 我们编写这套丛书，目的就是：(1)进一步普及数学知识，使数学为更多的青少年喜爱，帮助他们取得好的成绩；(2)使喜爱数学的同学得到更好的发展，通过这套丛书，学到更多的知识和方法.

"天下大事，必作于细."我们希望，而且相信，这套丛书的出版，在使我国成为数学大国的努力中，能起到一点作用. 本丛书初版于 2000 年，2003 年修订过一次，现根据课程改革的要求对各册再作不同程度的修订.

著名数学家、中国科学院院士、原中国数学奥林匹克委员会主席王元先生担任本丛书顾问，并为青少年数学爱好者题词，我们表示衷心的感谢. 还要感谢华东师范大学出版社及倪明先生，没有他们，这套丛书不会是现在这个样子.

单 墫 熊 斌

2005 年 11 月

目　　录

基础篇

提高篇

基础篇

第1讲

复合二次根式

一、知识要点和基本方法

一般地，我们把二次根式中套叠着二次根式的式子叫做复合二次根式. 如$\sqrt{6+7\sqrt{a}}$，$\sqrt{5a-\sqrt{x}}$，$\sqrt{a-\sqrt{b}+3\sqrt{c}}$都是复合二次根式.

把复合二次根式化简需要灵活运用二次根式的性质和运算法则. 基本方法有三种：

1. 平方法. 先将复合二次根式平方并化简，再将结果开方，求得原式的值.

2. 配方法. 如将$\sqrt{a+2\sqrt{b}}$中$a+2\sqrt{b}$能配成$(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2$（$x>0$，$y>0$，$x>y$），这样就可以把原复合二次根式化为$\sqrt{x}+\sqrt{y}$. 此时，应有$x+y=a$，$xy=b$. 由此可求得

$$x=\frac{a+\sqrt{a^2-4b}}{2},\ y=\frac{a-\sqrt{a^2-4b}}{2}.$$

这里x、y右边的式子通常能化简.

于是$\sqrt{a+2\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-4b}}{2}}+\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-4b}}{2}}$.

3. 待定系数法. 先根据复合二次根式的特点，假设原式能化为几个简单二次根式的和或差，再通过平方、化简，比较系数求出结果.

例题精讲

化简：

(1) $\sqrt{4+2\sqrt{3}}$；

(2) $\sqrt{11+2\sqrt{18}}$；

(3) $\sqrt{2-\sqrt{3}}$.

解 (1)
$$\begin{aligned}&\sqrt{4+2\sqrt{3}}\\=&\sqrt{3+2\sqrt{3}+1}\\=&\sqrt{(\sqrt{3}+1)^2}\\=&\sqrt{3}+1.\end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned}&\sqrt{11+2\sqrt{18}}\\=&\sqrt{(2+9)+2\sqrt{2\times 9}}\qquad\text{（尝试！）}\\=&\sqrt{(\sqrt{2}+\sqrt{9})^2}\\=&\sqrt{2}+\sqrt{9}\\=&\sqrt{2}+3.\end{aligned}$$

(3)
$$\begin{aligned}&\sqrt{2-\sqrt{3}}\\=&\sqrt{2-2\times\frac{1}{2}\sqrt{3}}\\=&\sqrt{\frac{4-2\sqrt{3}}{2}}\\=&\sqrt{\frac{1}{2}\times(3+1-2\sqrt{3})}\\=&\sqrt{\frac{1}{2}\times(\sqrt{3}-\sqrt{1})^2}\\=&\frac{1}{2}\sqrt{2}\times(\sqrt{3}-1)\\=&\frac{1}{2}(\sqrt{6}-\sqrt{2}).\end{aligned}$$

说明 第(2)小题如果不尝试来配方，还可以用待定系数法，即令 $\sqrt{11+2\sqrt{18}}=(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2$，得 $x+y=11, xy=18$. 而这可以利用第 5 讲的知识求得结果.

第(3)小题一般地，有

$$\begin{aligned}&\sqrt{a\pm\sqrt{b}}\\&=\sqrt{a\pm2\times\frac{1}{2}\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{2a\pm2\sqrt{b}}{2}}\\&=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\sqrt{2a\pm2\sqrt{b}}.\end{aligned}$$

然后用待定系数法或配方法，求得结果：

$$\sqrt{a\pm\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}\pm\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}.$$

化简：$\sqrt{4-\sqrt{15}}+\sqrt{4+\sqrt{15}}$.

解 考虑整体平方，简化结果.

令 $S=\sqrt{4-\sqrt{15}}+\sqrt{4+\sqrt{15}}$，则

$$\begin{aligned}S^2&=(4-\sqrt{15})+2\times\sqrt{(4-\sqrt{15})(4+\sqrt{15})}+(4+\sqrt{15})\\&=8+2\sqrt{16-(\sqrt{15})^2}\\&=10.\end{aligned}$$

于是 $S=\sqrt{10}$.

说明 此题还可以用例 1(3)的方法来求得结果.

已知 $a>b>0$，化简 $\sqrt{2a^2-b^2+2a\sqrt{a^2-b^2}}$.

解

$$\begin{aligned}&\sqrt{2a^2-b^2+2a\sqrt{a^2-b^2}}\\&=\sqrt{(a^2-b^2)+2a\sqrt{a^2-b^2}+a^2}\\&=\sqrt{(\sqrt{a^2-b^2})^2+2a\sqrt{a^2-b^2}+a^2}\\&=\sqrt{(\sqrt{a^2-b^2}+a)^2}\\&=\left|a+\sqrt{a^2-b^2}\right|,\end{aligned}$$

因为 $a > b > 0$,故 $a^2 - b^2 > 0$, $a + \sqrt{a^2 - b^2} > 0$,
所以原式 $= a + \sqrt{a^2 - b^2}$.

[redacted] 求出使等式 $\sqrt{11 + 2(1+\sqrt{5})(1+\sqrt{7})} = \sqrt{x} + \sqrt{y} + 1$ 成立的 x、y 值.

解 将已知等式两边平方得

$$13 + 2\sqrt{5} + 2\sqrt{7} + 2\sqrt{35}$$

$$= (x + y + 1) + 2\sqrt{x} + 2\sqrt{y} + 2\sqrt{xy},$$

比较等式左右两边,可知 $x=5$, $y=7$ 使等式成立.

同样 $x=7$,$y=5$ 也使等式成立.

[redacted] 设$\sqrt{19 - 8\sqrt{3}}$ 的整数部分为 x,小数部分为 y,求 $x + y + \dfrac{1}{y}$ 的值.

分析 由 $19 - 8\sqrt{3} = 4^2 - 2 \cdot 4 \cdot \sqrt{3} + (\sqrt{3})^2 = (4 - \sqrt{3})^2$ 可化简 $\sqrt{19 - 8\sqrt{3}}$,从而求得其整数部分与小数部分.

解 因为

$$\sqrt{19 - 8\sqrt{3}} = \sqrt{(4 - \sqrt{3})^2} = 4 - \sqrt{3},\ 1 < \sqrt{3} < 2.$$

所以 $0 < 2 - \sqrt{3} < 1$,

于是 $$x = 2,\ y = 2 - \sqrt{3}.$$

从而 $$x + y + \frac{1}{y} = 2 + 2 - \sqrt{3} + \frac{1}{2 - \sqrt{3}}$$

$$= 4 - \sqrt{3} + 2 + \sqrt{3} = 6.$$

[redacted] 求满足$\sqrt{\dfrac{21}{4} + 3\sqrt{3}} = x + \sqrt{y}$ 的有序有理数对(x, y).

解 $$\sqrt{\frac{21}{4} + 3\sqrt{3}} = \frac{1}{2}\sqrt{21 + 12\sqrt{3}}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{12 + 2 \cdot \sqrt{12} \cdot 3 + 9}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{(\sqrt{12} + 3)^2}$$

$$= \frac{3}{2} + \sqrt{3}.$$

于是 $\frac{3}{2} + \sqrt{3} = x + \sqrt{y}$，即

$$\left(\frac{3}{2} - x\right) + (\sqrt{3} - \sqrt{y}) = 0.$$

由于 x、y 是有理数，$\sqrt{3}$是无理数，

所以必须有 $\frac{3}{2} - x = 0,\ \sqrt{3} - \sqrt{y} = 0.$

解之得 $x = \frac{3}{2},\ y = 3.$

故所求有理数对是 $(x, y) = \left(\frac{3}{2},\ 3\right).$

练　习　题

A　组

一、化简下列各式

1 $\sqrt{27 + 10\sqrt{2}}.$

2 $\sqrt{4 + 2\sqrt{3}} + \sqrt{4 - 2\sqrt{3}}.$

3 $\sqrt{16 + 2(1 + \sqrt{5})(1 + 2\sqrt{3})}.$

二、解答题

4 已知$\sqrt{11 - 6\sqrt{2}}$的整数部分为 a，小数部分为 b，求 $ab + \frac{2}{b}$ 的值.

5 设正整数 a、m、n 满足$\sqrt{a^2 - 4\sqrt{2}} = \sqrt{m} - \sqrt{n}$，求 a、m、n 的值.

B 组

三、化简

$\sqrt{7-\sqrt{15}-\sqrt{16-2\sqrt{15}}}$.

7 $\sqrt{8+2\sqrt{10+2\sqrt{5}}}+\sqrt{8-2\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$.

测 试 题

一、比较下列各组中两个式子值的大小

1 $\sqrt{8-\sqrt{28}}$ 与 $\sqrt{6-\sqrt{20}}$.

$\sqrt{3+\sqrt{5}}+\sqrt{3-\sqrt{5}}$ 与 $\sqrt{11}$.

3 $\sqrt{4-\sqrt{15}}+\sqrt{6-\sqrt{35}}$ 与 $\sqrt{5-\sqrt{21}}$.

二、化简下列各式

$\sqrt{9-2\sqrt{14}}$.

5 $\sqrt{8+2\sqrt{15}}+\sqrt{8-2\sqrt{15}}$.

三、解答题

已知 $a>\sqrt{2}b>0$，化简 $\sqrt{a^2-2b\sqrt{a^2-b^2}}$.

7 已知 $x=\sqrt{5+\sqrt{5}}$，$y=\sqrt{5-\sqrt{5}}$，求 x^6+y^6 的值.

设 $\sqrt{39-\sqrt{432}}$ 的整数部分为 a，小数部分为 b，求 $\dfrac{11}{a+b}+\dfrac{11}{a-b+4}$ 的值.

9 求满足条件 $\sqrt{a-2\sqrt{6}}=\sqrt{x}-\sqrt{y}$ 的自然数 a、x、y.

第2讲

一元二次方程

一、知识要点和基本方法

一元二次方程的一般形式是

$$ax^2+bx+c=0\ (a\neq 0),$$

它的简单形式就是 $Ax^2=B(A\neq 0)$.

我们解一元二次方程,就是把所给的方程转化为形如 $Ax^2=B(A\neq 0)$ 的方程来解. 这里的转化方式就是配方. 具体做法是

因为 $$ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}\right)+\left(c-\frac{b^2}{4a}\right)$$

$$=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a},$$

所以 $ax^2+bx+c=0\ (a\neq 0)$ 就转化为

$$a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}=0,$$

即

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}. \quad ①$$

从而利用平方根的意义得到方程 $ax^2+bx+c=0$ 的解.

配方法是解一元二次方程的基本方法,而公式法是由配方法演绎得到的. 由①式就可以得到解一元二次方程的求根公式

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\ (b^2-4ac\geqslant 0). \quad ②$$

用求根公式解一元二次方程的方法称为公式法.

有时,还用因式分解法解一元二次方程.

如果一元二次方程的两根为 x_1、x_2,那么我们就有基本等式

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)\ (a\neq 0), \tag{③}$$

这是一个非常有用的基本等式.

如果我们对式②的形式 $x_{1,2}=A\pm\sqrt{B}\ (B\geqslant 0)$"追根究源",就可以知道 $A\pm\sqrt{B}$ 一定是一个一元二次方程的根,从而必有形如 $ax^2+bx+c=0$ 的等式成立(这里 $x=A\pm\sqrt{B}$). 利用这一结果常可以简化一些复杂的数值计算.

二、例题精讲

已知 b、c 为方程 $x^2+bx+c=0$ 的两个根,且 $c\neq 0$, $b\neq c$,求 b、c.

解 因为 b、c 是方程 $x^2+bx+c=0$ 的两个根,所以

$$\begin{cases} b^2+b^2+c=0, & ④\\ c^2+bc+c=0. & ⑤\end{cases}$$

由④-⑤得 $\quad (b-c)[(b+c)+b]=0.$

因为 $\quad b-c\neq 0,$

所以 $$c+2b=0, \tag{⑥}$$

又 $c\neq 0$,⑤式即为 $c+b+1=0.$ ⑦

联立⑥、⑦两式,解之得 $b=1$,$c=-2$.

说明 如果 x_0 是方程 $ax^2+bx+c=0$ 的根,那么就有 $ax_0^2+bx_0+c=0$. 反之亦然.

方程 $x^2+ax+b=0$ 与 $x^2+cx+d=0(a\neq c)$有相同的根 α,则 $\alpha=$______.(2002 年重庆市初中数学竞赛题)