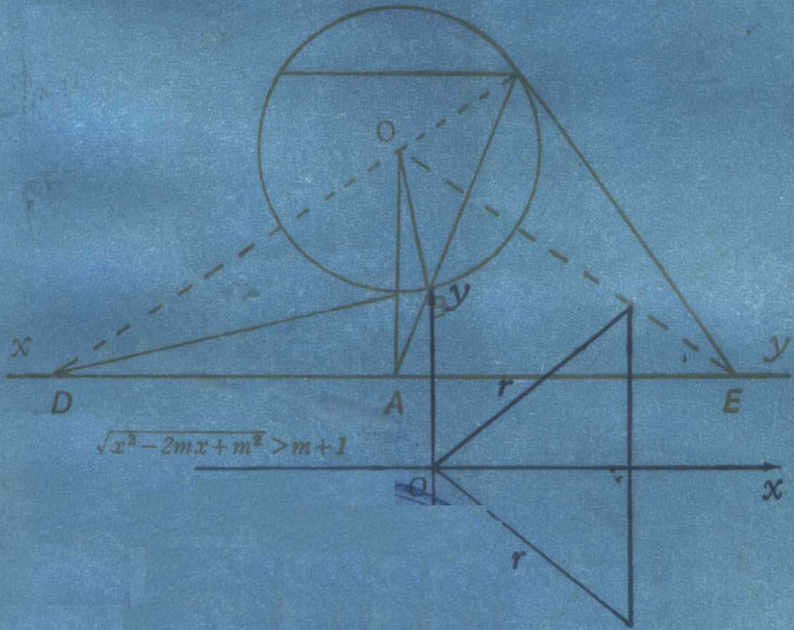
10

高中
数学教材补充题

第三、四册



浙 江 教 育 出 版 社

高中数学教材补充题

（第三、四册）

许纪传　钱孝华　江焕棣
陶敏之　谢玉兰　丁宗武

浙 江 教 育 出 版 社

高中数学教材补充题

（第三、四册）

*

浙江教育出版社出版

（杭州武林路125号）

浙江新华印刷厂印刷

浙江省新华书店发行

开本 787×1092 1/32 印张 8 字数 184,000

1985年2月第一版 1985年2月第一次印刷

印数：000,001—110,000

统一书号：7346·196

定 价： 0.86 元

说　明

本书是从大量资料中精选出与现行高中数学教材有密切联系的习题，按内容分类编辑，供教师学生选择使用. 本书的特点是在加强基础知识和基本技能的训练上，注意习题类型的多样化和内容的新颖，重视综合运用；选择从严，内容少而精. 使用本书可以对巩固课堂教学和提高学生分析解决问题的能力有所帮助.

全书按教材内容顺序分段编排，其中 A 组属于基本题，B 组略有提高和带有一定的综合性，C 组难度较大，系供学有余力的学生练习. 教师、学生可以根据实际情况灵活选用，不要强求一律.

本书在编选中得到王祖樾、贺元泰老师的热忱帮助，提出许多宝贵意见，谨在此表示衷心的感谢.

本书原分四册出版，出版后受到广大读者的欢迎，并早已脱销，现应读者要求重印.

一九八五年一月

目　　录

第　三　册

第　四　册

第三册

第一章 线性方程组

（A）

1．写出下列行列式的展开式，并化简：

(1) $\begin{vmatrix} a & a-b \\ b & a+b \end{vmatrix}$；　　(2) $\begin{vmatrix} a-b & a^2-ab+b^2 \\ a+b & a^2+ab+b^2 \end{vmatrix}$；

(3) $\begin{vmatrix} 2 & \lg 2 \\ 4 & \lg 4 \end{vmatrix}$；　　(4) $\begin{vmatrix} \sin x & -\cos 2x \\ \cos x & \sin 2x \end{vmatrix}$．

(5) $\begin{vmatrix} \sin^2 75^\circ & \cos^2 75^\circ \\ \sin^2 15^\circ & \cos^2 15^\circ \end{vmatrix}$．

2．利用行列式解下列方程组：

(1) $\begin{cases} 2x+3y+4=0, \\ 5x+6y+7=0; \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} 4(x+2)=1-5y, \\ 3(y+2)=3-2x; \end{cases}$

(3) $\begin{cases} 3x+4y=7a-b, \\ 4x+3y=7a+b; \end{cases}$

(4) $\begin{cases} ax+by=a^2+b^2, \\ bx+ay=2ab, \end{cases}$　$|a|\neq|b|$；

(5) $\begin{cases} \dfrac{5}{x+1}+\dfrac{4}{y-2}=2, \\ \dfrac{7}{x+1}+\dfrac{3}{2-y}=\dfrac{13}{20}. \end{cases}$

3．分别编写一个二元线性方程组，使它们满足：

(1) $D=D_x=D_y=0$；　　(2) $D\neq 0,\ D_x=D_y=0$；

(3) $D\neq 0,\ D_x\neq 0,\ D_y=0$；　　(4) $D=D_x=0,\ D_y\neq 0$．

4．解下列方程组，并进行讨论：

(1) $\begin{cases} ax+y=2, \\ x+y=2a; \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} 2x+ay=2, \\ x-ay=1; \end{cases}$

(3) $\begin{cases} ax-y=b, \\ bx+y=a; \end{cases}$　　(4) $\begin{cases} ay-bx=0, \\ y-x=b-a; \end{cases}$

(5) $\begin{cases} 3x-4y=12, \\ 9x+ay=b; \end{cases}$

(6) $\begin{cases} (a+5)x+(2a+3)y-(3a+2)=0; \\ (3a+10)x+(5a+6)y-(2a+4)=0. \end{cases}$

注意:

(1) 解含字母系数的二元线性方程组，一般采用行列式来解,并注意将 D、D_x、D_y 进行因式分解,以便于讨论;

(2) 若 $D=0$, $D_x\neq0$, 则方程组无解，不必再考虑 D_y 是否为零,若 $D=0$、$D_x=0$, 则必须再考虑 D_y 是否为零,并由此决定二元线性方程组解的情况.

5．讨论方程组

$$\begin{cases} ax+by=al, \\ bx+cy=bl \end{cases}$$

的解的各种可能情况,并与下面的方程组的解进行比较

$$\begin{cases} ax+by=a, \\ bx+cy=b. \end{cases}$$

6．n 为哪些值时,方程组

$$\begin{cases} nx-y=5, \\ 2x+3ny=7 \end{cases}$$

的解满足条件 $x>0$, $y<0$?

7．回答下面的问题:

(1) 方程 $ax=b$ 什么时候有唯一解？什么时候无解？什么时候有无数解？

(2) 方程 $ax+by=c$ 的解唯一吗？它可能无解吗？

(3) 一个二元线性方程 $ax+by=c$ 的几何意义是什么？

(4) “当方程组 $\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$ 的 $D=D_x=D_y=0$ 时，它的解是一切实数.”这句话对吗？

(5) 方程组 $\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$，有唯一解、无解、有无数组解的几何意义是什么？($a_1$, b_1; a_2, b_2 不全为零).

8. 已知两条直线 $kx-y=1$ 与 $2x+3ky=6$ 交于第三象限，求 k 的范围. 它可能交在第二象限吗？

9. 指出下列解题的错误，并给出正确的答案：

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \overset{①}{=\!=} \begin{vmatrix} 0 & -3 & 1 \\ 7 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & 3 \end{vmatrix} \overset{②}{=\!=} \begin{vmatrix} 0 & -3 & 0 \\ 7 & 1 & 4 \\ 5 & 2 & 11 \end{vmatrix}$$

$$=3\begin{vmatrix} 7 & 4 \\ 5 & 11 \end{vmatrix}=3(77-20)=171.$$

其中：

① 第一列乘以 3，再把第二列加到第一列.

② 第三列乘以 3，再把第二列加到第三列.

10. 下面的等号成立吗？为什么？

$$\begin{vmatrix} 1+\sin\alpha & \sin\alpha & \sin^2\alpha \\ 1+\cos\alpha & \cos\alpha & \cos^2\alpha \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} 1 & \sin\alpha & \sin^2\alpha \\ 1 & \cos\alpha & \cos^2\alpha \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} \sin\alpha & \sin\alpha & \sin^2\alpha \\ \cos\alpha & \cos\alpha & \cos^2\alpha \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

11. 求证：

$$\begin{vmatrix} \lg 2 & \lg 5 & \lg 3 \\ \lg 3 & \lg 2 & \lg 5 \\ \lg 5 & \lg 3 & \lg 2 \end{vmatrix} = (1+\lg 3)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \lg 3 & \lg 2 & \lg 5 \\ \lg 5 & \lg 3 & \lg 2 \end{vmatrix}.$$

12．(1) 将行列式

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 & 1 \\ 4 & 5 & 1 & 1 \\ 3 & 9 & 4 & 1 \\ -4 & 4 & 4 & 1 \end{vmatrix}$$

按第一列展开并计算它的值；

(2) 计算：

① $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \end{vmatrix}$；　　② $\begin{vmatrix} 1 & 15 & 14 & 4 \\ 12 & 6 & 7 & 9 \\ 8 & 10 & 11 & 5 \\ 13 & 3 & 2 & 16 \end{vmatrix}$.

13．(1) 试将 $2\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} - 5\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$ 写成三阶行列式的形式；

(2) 试将 $c\begin{vmatrix} d & g \\ e & h \end{vmatrix} + f\begin{vmatrix} a & g \\ b & h \end{vmatrix} - k\begin{vmatrix} a & d \\ b & c \end{vmatrix}$ 写成三阶行列式的形式；

(3) 试将 $c\begin{vmatrix} d & g \\ e & h \end{vmatrix} + a\begin{vmatrix} f & 1 \\ e & h \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} f & 1 \\ d & g \end{vmatrix}$ 写成三阶行列式的形式.

14．解下列方程与不等式：

(1) $\begin{vmatrix} x & 2x & 5 \\ x & x & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$；

(2) $\begin{vmatrix} -\sin x & \dfrac{1}{2} & 1 \\ \sin x & \dfrac{1}{4} & 1 \\ \sin x & \dfrac{1}{8} & 1 \end{vmatrix}=0;$

(3) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & -2 \\ x^2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix}>0;$　　(4) $\begin{vmatrix} \lg^2 x & 3 & 2 \\ \lg x & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix}\leqslant 0.$

15. (1) 已知 209、231、187 能被 11 整除，不展开行列式，求证：

$\begin{vmatrix} 5 & 7 & 178 \\ 3 & 8 & 201 \\ 9 & 3 & 160 \end{vmatrix}$ 能被 11 整除；

(2) 已知 204、527、255 能被 17 整除，不展开行列式，求证：

$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 5 & 2 & 7 \\ 2 & 5 & 5 \end{vmatrix}$ 能被 17 整除.

16. 解下列线性方程组：

(1) $\begin{cases} 2x-3y+z=0, \\ -3x+4y-2z-1=0, \\ 5x+y+4z+3=0; \end{cases}$

(2) $\begin{cases} 2x-3y+z+1=0, \\ x+y+z=6, \\ 3x+y-2z+1=0; \end{cases}$

(3) $\begin{cases} 3x+y-4z-13=0, \\ 5x-y+3z-5=0, \\ x+y-z=3; \end{cases}$

(4) $\begin{cases} \dfrac{x+y}{2}=\dfrac{z+x}{3}=\dfrac{y+z}{4}, \\ x+y+z=27. \end{cases}$

注意：行列式法是解线性方程组的一种方法，通常还可采用代入法，加减法等(要根据方程组本身的特征，注意采用不同的方法．如(3)用加减法比较方便)．

17．(1) 用行列式证明：$A(-8,\ -6)$、$B(-3,\ -1)$、$C(5,\ 7)$三点共线；

(2) 证明三条直线 $2x-y+5=0$、$3x+2y-7=0$ 和 $7x+3=0$ 相交于一点，并求出交点的坐标；

(3) 已知四边形的四个顶点坐标是 $(1,\ 1)$，$(3,\ 4)$，$(5,\ -2)$，$(4,\ -7)$，求它的面积．

(B)

18．(1) 已知方程 $a(3x-2)+b(2x-3)=8x-7$ 有无数解，求 a、b 的值；

(2) 解方程 $|x+y-5|+7\sqrt{3x-4y+6}=0$；

(3) 解方程组

$(2x+y-1):(3x-2y+3):(x+3y-6)=3:2:1$.

19．解下列线性方程组：

(1) $\begin{cases} (2k-1)x-(k+1)y=3k, \\ (4k-1)x-(3k+1)y=5k+4; \end{cases}$

(2) $\begin{cases} (k-1)x+(k+1)y=2(k^2-1), \\ (k^2-1)x+(k^2+1)y=2(k^3-1); \end{cases}$

(3) $\begin{cases} a(x+y)-b(x-y)=a^2-b^2, \\ a(x-y)+b(x+y)=2ab; \end{cases}$ $(ab\neq 0)$.

20．(1) 确定参数 m 和 p，使方程组

$$\begin{cases}(3m-5p+b)x+(8m-3p-a)y=1,\\(2m-3p+b)x+(4m-p)y=2\end{cases}$$

有无数组解;

(2) 解方程组

$$\begin{cases}2x-my=3,\\mx+(m-4)y=n-3.\end{cases}$$

21. (1) a、b 取什么实数时,方程组

$$\begin{cases}3x-4y=12,\\9x+ay=b\end{cases}$$

有正数解?

(2) 已知 $f(x)=\log_m x$, 且 $f\left(\frac{64}{147}\right)=a$, $f\left(\frac{81}{112}\right)=b$, $f\left(\frac{1}{84}\right)=c$, 求 $f(2)$.

注意: 如果方程组中有字母(一般要讨论)或只要求出一部分结果(如判定唯一解,只要证 $D\neq0$; 求出 $f(2)=\log_m 2$, 只需求得 D 与 $D_{\log_m 2}$),这时一般用行列式较方便.

22. 证明下列各式:

(1) $\begin{vmatrix}1 & a & b+c\\1 & b & c+a\\1 & c & a+b\end{vmatrix}=0$;

(2) $\begin{vmatrix}\frac{a+b}{2} & \frac{c+d}{2} & 1\\\frac{a-b}{2} & \frac{c-d}{2} & 1\\a & c & 1\end{vmatrix}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}a & c\\b & d\end{vmatrix}$;

(3) $\begin{vmatrix}a+b & b+c & c+a\\l+m & m+n & n+l\\p+q & q+r & r+p\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}a & b & c\\l & m & n\\p & q & r\end{vmatrix}$;

(4) $\begin{vmatrix} 1 & a & a^3 \\ 1 & b & b^3 \\ 1 & c & c^3 \end{vmatrix} = (a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)$;

(5) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ ax & ay & az \\ a^2+x^2 & a^2+y^2 & a^2+z^2 \end{vmatrix} = a(x-y)(y-z)(z-x)$;

(6) $\begin{vmatrix} b^2+c^2 & ab & ac \\ ab & c^2+a^2 & bc \\ ca & cb & a^2+b^2 \end{vmatrix} = 4a^2b^2c^2$;

(7) $\begin{vmatrix} a+b+2c & a & b \\ c & b+c+2a & b \\ c & a & c+a+2b \end{vmatrix} = 2(a+b+c)^3$.

注意：有关行列式恒等式的证明问题，① 若等式两边以行列式的形式出现，一般利用行列式的性质，不必将行列式展开；② 若等式"一边"不是行列式，则结合"一边"的要求，利用行列式的性质化过去，最后将行列式展开.

23．求证三条互不平行的直线

$$a_1x+b_1y+c_1=0,\ a_2x+b_2y+c_2=0,\ a_3x+b_3y+c_3=0$$

共点的充要条件是

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0.$$

24．计算下列行列式：

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 1 \\ 1 & 1 & 1+b \end{vmatrix}$;

(2) $\begin{vmatrix} 1+\cos\alpha & 1+\sin\alpha & 1 \\ 1-\sin\alpha & 1+\cos\alpha & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$;

(3) $\begin{vmatrix} m+a & m-a & a \\ n+a & 2n-a & a \\ a & -a & a \end{vmatrix}$,

(4) $\begin{vmatrix} b+c & c & b \\ c & c+a & a \\ b & a & a+b \end{vmatrix}$;

(5) $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2-bc \\ 1 & b & b^2-ac \\ 1 & c & c^2-ab \end{vmatrix}$;

(6) $\begin{vmatrix} a^2 & bc & ac+c^2 \\ a^2+ab & b^2 & ac \\ ab & b^2+bc & c^2 \end{vmatrix}$;

(7) $\begin{vmatrix} \sin^2\alpha & \cos^2\alpha & \cos 2\alpha \\ \sin^2\beta & \cos^2\beta & \cos 2\beta \\ \sin^2\gamma & \cos^2\gamma & \cos 2\gamma \end{vmatrix}$;

(8) $\begin{vmatrix} 1 & \cos\alpha & \cos\beta \\ \cos\alpha & 1 & \cos(\alpha+\beta) \\ \cos\beta & \cos(\alpha+\beta) & 1 \end{vmatrix}$.

25. 解方程:

(1) $\begin{vmatrix} x+1 & 2x & 1 \\ x & 3x-2 & 2x \\ 1 & x & x \end{vmatrix}=0$;

(2) $\begin{vmatrix} a & b & ax+b \\ b & c & bx+c \\ ax+b & bx+c & 0 \end{vmatrix}=0 \quad (a\neq 0,\ b^2-ac\geqslant 0)$.

想一下：是直接按对角线法展开方便呢？还是利用行列式性质化简后再展开方便？

26．(1) λ 为何值时，方程组

$$\begin{cases} 4x+3y+z=\lambda x, \\ 3x-4y+7z=\lambda y, \\ x+7y-6z=\lambda z \end{cases}$$ 有非零解；

(2) 解方程组

$$\begin{cases} \lambda x+y+z=1, \\ x+\lambda y+z=\lambda, \\ x+y+\lambda z=\lambda^2, \end{cases} \quad (\lambda\in R).$$

27．齐次线性方程组 $\begin{cases} ax+3y=0 \\ (b+3)x+ay=0 \end{cases}$ 有非零解的充要条件是什么？证明你的结论.

28．设三角形的一个顶点在原点，其他两个顶点为 $P_1(x_1, y_1)$ 和 $P_2(x_2, y_2)$，证明它的面积为：

$$S=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \text{的绝对值.}$$

若是过任意三点 $P_1(x_1,y_1)$，$P_2(x_2,y_2)$、$P_3(x_3,y_3)$ 围成的三角形面积又如何用行列式表示？试推导之.

29．用解析法证明：

(1) 三角形三条中线交于一点；

(2) 三角形三条高交于一点；

(3) 三角形三边的垂直平分线交于一点.

30．用解析法证明：

一个三角形的重心，垂心，外心三点共线。

31．用行列式解方程组：

$$(1)\begin{cases}2x+\dfrac{3}{y}-\dfrac{4}{z}=4,\\[2mm] \dfrac{2}{y}+\dfrac{3}{z}=\dfrac{7}{12},\\[2mm] x+\dfrac{4}{y}=\dfrac{16}{3};\end{cases}$$

$$(2)\begin{cases}\dfrac{3}{x+y+z}+\dfrac{6}{2x-y}+\dfrac{1}{y-3z}=1,\\[2mm] \dfrac{6}{x+y+z}+\dfrac{4}{2x-y}+\dfrac{1}{3z-y}=3,\\[2mm] \dfrac{15}{x+y+z}+\dfrac{2}{y-2x}-\dfrac{3}{y-3z}=5.\end{cases}$$

32．计算四阶行列式

$$\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1+a & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1+b & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1+c\end{vmatrix}.$$

33．解方程组

$$\begin{vmatrix}1+x & 2 & 3 & 4\\ 1 & 2+x & 3 & 4\\ 1 & 2 & 3+x & 4\\ 1 & 2 & 3 & 4+x\end{vmatrix}=0.$$

34．(1) 求证：

$$\begin{vmatrix}a & a & a & a\\ a & b & a & a\\ a & a & b & a\\ a & a & a & b\end{vmatrix}=a(b-a)^3;$$

(2) 求证：

$$\begin{vmatrix} a & b & b & b \\ a & b & a & a \\ b & b & a & b \\ a & a & a & b \end{vmatrix} = -(a-b)^4.$$

35．有三种合金，它们各自含金、银、铅的份数如下表：

种类	金	银	铅
甲	5	2	1
乙	2	5	1
丙	3	1	4

三种合金各取多少克，才能使熔化后得到金、银、铅含量相同的合金 216 克．

36．甲、乙、丙三人一起做一批零件．甲、乙两人合做，甲做 8 天，乙做 5 天能够做好；甲、丙两人合做，甲做 6 天，丙做 9 天能够做好；乙、丙两人合做，乙做 10 天，丙做 6 天能够做好．如果甲、乙、丙单独做，只需多少天才能做好？

（C）

37．计算：

$$\begin{vmatrix} \cos(A-B) & \cos(B-C) & \cos(C-A) \\ \cos(A+B) & \cos(B+C) & \cos(C+A) \\ \sin(A+B) & \sin(B+C) & \sin(C+A) \end{vmatrix}.$$

38．解方程．

$$\begin{vmatrix} \sin^2 x & \sin x & 1 \\ \cos^2 x & \cos x & 1 \\ \mathrm{tg}^2 x & \mathrm{tg}\, x & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

39．解方程组：