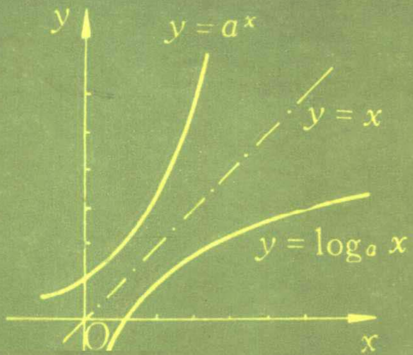
DAISHU XUEXI FUDAO



六年制重点中学高中数学课本

代数学习辅导

第一册

天津人民出版社

六年制重点中学高中数学课本

代数学习辅导

第一册

编者　贺信淳　明知白　魏仲和

审校　余炯沛

天津人民出版社

六年制重点中学高中数学课本

代数学习辅导（第一册）

贺信淳 明知白 魏仲和

*

天津人民出版社出版

（天津市赤峰道124号）

天津新华印刷一厂印刷　新华书店天津发行所发行

*

787×1092毫米 32开本 14.125印张 291千字

1984年3月第1版　1984年3月第1次印刷

印数：1－111,000

统一书号：7072·1318

定　价：1.20元

序

这部丛书是根据部颁《全日制六年制重点中学数学教学大纲草案》按照《六年制重点中学高中数学课本》的章节，给中学生编写的辅助读物，共分六册，与六册高中课本一一对应；目的是使读者深入理解基本知识，加强基本技能，提高逻辑思维与空间想象能力和分析问题解决实际问题的能力．内容都按课本章次排列．每章的安排大致如下：

一、基本内容　这里将学生起码要掌握的东西，在不失内在联系的原则下，分类整理，既便于记忆，又重点突出，使读者对全章概况，一目了然．可以说这是重点复习，也是全章纲要．所谓数学难学，多半由于学习不得其法．学习方法中重要的一点是善于将知识系统化，抓住了系统，就会感到轻松．这部分内容对于不会自己整理系统的同学是很大的帮助．

这里还配备一些有代表性的例题，各用一两种方法按正确格式解答出来．题型比较齐备．学生易犯的错误，都从概念上或逻辑上加以解说，层次复杂的解法则先列举步骤．凡属关键所在，则事前分析或在解完后详细分辨，以期学生学到解题的基本技能；并附有一组习题，由读者揣摩练习．

二、辅导内容　掌握基本内容仅是一般要求．希望提高

学生的知识水平，还需要将课本每章的重点与难点以及各部分的内在联系详细剖析。证题或解题还有许多不成文法的规律，也要揭示给读者。本书对课本每章教材，选定若干题目撰成短文，每篇论述一两个问题。中间适当地插入一些范例。有时也将问题略加延拓。这些短文是本书的精华，是精心的辅导，不是泛泛的解说。

以上是我对于本书的观感。大家知道，辅导教材要发课本之所未发，要想学生之所未想，编写工作相当繁重。非有多年的教学实践，不能想得周到，现在这丛书有可能在各个方面给中学同学解难释疑，指出明路。我乐见青年将得到一本好的读物。

赵 慈 庚

一九八三，三，四．于北京师大数学系

目　　录

第一章　幂函数、指数函数和对数函数

基　本　内　容

一、集　　合

（一）集合

1. 集合是一个不加定义的原始概念，通常是这样描述的：把某些对象看作一个整体，便形成一个集合．或者说成：一组对象的全体形成一个集合．集合中的对象叫做集合的元素．用大写的拉丁字母A，B，C，…表示集合，用小写的拉丁字母a，b，c，…表示集合的元素．

如果a是集合A的元素，就说a属于集合A，记为$a\in A$；如果a不是集合A的元素，就说a不属于A，记为$a\notin A$（或$a\overline{\in}A$）．

一般用N来表示全体自然数所成的集合，简称自然数集．Z表示全体整数所成的集合，简称整数集．Q表示全体有理数所成的集合，简称有理数集．$\overline{Q}$表示全体无理数所成的集合，简称无理数集．R表示全体实数所成的集合，简称实数集．有时还用Z^+表示正整数集，用Q^-表示负有理数集．

2.表示集合的方法，常用的有列举法与描述法.

列举法：把集合中的元素一一列举出来，写在大括号内来表示集合.例如小于10的质数组成的集合，可以表示为$\{2, 3, 5, 7\}$.

描述法：把描述集合中的元素的公共属性或表示集合中的元素的规律,写在大括号内来表示集合.例如由抛物线$y=x^2+1$上所有的点组成的集合,记作$\{(x,y)\mid y=x^2+1\}$（或$\{(x, y):y=x^2+1\}$，$\{(x, y); y=x^2+1\}$）.

（二）子集、交集、并集、补集

子集、交集、并集、补集分别是从某个方面来描述集合与集合之间关系的.

1.子集：如果集合A的元素都是集合B的元素，则集合A叫做集合B的子集，记作$A\subseteq B$或$B\supseteq A$.即如果能从$a\in A$,推出$a\in B$，那么$A\subseteq B$.

应该着重指出，空集$\varnothing$是任何集合的子集；任何集合是它本身的子集.

显然，如果$A\subseteq B$，$B\subseteq C$，那么$A\subseteq C$.

如果$A\subseteq B$且$A\supseteq B$，那么就说集合A与集合B相等，记作$A=B$.

2.交集：由同时属于集合A和集合B的所有元素组成的集合叫做A与B的交集，记作$A\cap B$，即

$$A\cap B=\{x\mid x\in A\text{且}x\in B\}.$$

由定义可知，对任何集合A，B有

$$A\cap A=A，A\cap\varnothing=\varnothing，A\cap B=B\cap A.$$

3.并集：由属于集合A或者属于集合B的所有元素组成

的集合叫做A与B的并集，记作$A\cup B$，即

$$A\cup B=\{x\mid x\in A\text{或}x\in B\}.$$

由定义可知，对任何集合A，B有

$$A\cup A=A,\ A\cup\varnothing=A,\ A\cup B=B\cup A.$$

4.补集：在研究集合与集合之间的关系时，这些集合常常都是某一个给定集合的子集，这个给定集合叫做全集。

已知全集I，$A\subseteq I$，由I中所有不属于A的元素组成的集合，叫做集合A在集合I中的补集，记作$\overline{A}$，即

$$\overline{A}=\{x\mid x\in I\text{且}x\notin A\}.$$

由定义可知，对任何集合A有

$$A\cup\overline{A}=I,\ A\cap\overline{A}=\varnothing,\ \overline{\overline{A}}=A.$$

【例1】 已知$I=\{$由0到10的整数$\}$，集合$A=\{$不大于10的正整数$\}$，$B=\{$由0到10的质数$\}$，求：

（1）集合B的所有真子集；

（2）$A\cap\overline{B}$，$\overline{A}\cup B$，$\overline{A\cap B}$。

解：（1）$\because B=\{2,3,5,7\}$，

$\therefore$ B的真子集是$\varnothing$，$\{2\}$，$\{3\}$，$\{5\}$，$\{7\}$，$\{2,3\}$，$\{2,5\}$，$\{2,7\}$，$\{3,5\}$，$\{3,7\}$，$\{5,7\}$，$\{2,3,5\}$，$\{2,3,7\}$，$\{2,5,7\}$，$\{3,5,7\}$。

（2）$\because$ $\overline{B}=\{0,1,4,6,8,9,10\}$，$A=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$，

$\therefore$ $A\cap\overline{B}=\{1,4,6,8,9,10\}$；

$\because$ $\overline{A}=\{0\}$，

$\therefore\quad \overline{A}\cup B=\{0,\ 2,\ 3,\ 5,\ 7\}$;

$\because\quad A\cap B=\{2,\ 3,\ 5,\ 7\}$,

$\therefore\quad \overline{A\cap B}=\{0,\ 1,\ 4,\ 6,\ 8,\ 9,\ 10\}$.

【例 2】 设$I=R$，$A=\{x|x<3\}$，$B=\{x|x^2-3x+2=0\}$，$C=\{x|\,|x|<2\}$，$D=\{x|x^2-x-2\geqslant 0\}$，求$\overline{A}\cap C$，$B\cap\overline{C}$，$C\cup D$。

解：$\because \overline{A}=\{x|x\geqslant 3\}$，$C=\{x|-2<x<2\}$，

$\therefore\quad \overline{A}\cap C=\varnothing$；

又 $B=\{x|(x-2)(x-1)=0\}=\{1,\ 2\}$，$\overline{C}=\{x|\,|x|\geqslant 2\}$，

$\therefore\quad B\cap\overline{C}=\{2\}$；

$\because\quad D=\{x|(x-2)(x+1)\geqslant 0\}=\{x|x\leqslant -1\}\cup\{x|x\geqslant 2\}$，

$\therefore\quad C\cup D=R$。

二、映射与函数

（一）映射：设A，B是两个集合，如果按照某一种对应法则f，对于集合A中的任何一个元素，在集合B中都有唯一的元素和它对应，这样的对应（包括集合A，B以及从A到B的对应法则f）叫做从集合A到集合B的映射，记作

$$f:A\rightarrow B.$$

象与原象：如果给定一个从集合A到集合B的映射，那么，和A中的元素a对应的集合B中的元素b叫做a的象，a叫做b的原象。

【例 3】 设$A=\{1, 2, 3, 4\}$，$B=\{2, 5, 10, 17, 19\}$，对应法则是“平方后加1”，使B中的元素x^2+1和A中的元素x对应．这个对应是从集合A到集合B的映射，记作$f: A\to B$．B中的元素5与A中的元素2对应，于是5是2的象，2是5的原象．

（二）一一映射：设A，B是两个集合，$f: A\to B$是从集合A到集合B的映射，如果在这个映射的作用下，对于集合A中的不同元素，在集合B中有不同的象，而且B中每一个元素都有原象，那么这个映射叫做A到B上的一一映射．

【例 4】 设$A=\{1, 2, 3, 4, 5, \cdots\}$，$B=\left\{2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \frac{6}{5}, \cdots\right\}$，取映射$f: A\to B$，使集合$B$中的元素$b=\frac{1}{a}+1$和集合$A$中的元素$a$对应．这个映射是$A$到$B$上的一一映射．

（三）逆映射：设$f: A\to B$是集合A到集合B上的一一映射，如果对于B中的每一个元素b，使b在A中的原象a和它对应，这样所得的映射叫做映射$f: A\to B$的逆映射，记作$f^{-1}: B\to A$．

显然，映射$f: A\to B$也是映射$f^{-1}: B\to A$的逆映射．

【例 5】 设集合$M=\{x| x\geqslant 1\}$和映射$f: \overline{R}^{-}\to M$，使集合M中的元素x^2+1和$\overline{R}^{-}$中的元素x对应．

（1）这个映射是一一映射吗？为什么？

（2）这个映射有逆映射吗？如果有，写出它的逆映射

来。

解：（1）这个映射是一一映射，因为集合$\overline{R}^-$中的不同元素，在集合M中有不同的象，而且集合M中的每一个元素都有原象。

（2）这个映射有逆映射，它是$f^{-1}:M\to\overline{R}^-$，就使集合$\overline{R}^-$中的元素$x$，和集合$M$中的元素$\sqrt{x-1}$对应。

（四）函数：当映射$f:A\to B$中的原象集合A和象集合B都是非空数集或它的子集，且B的每个元素都有原象时，这样的映射$f:A\to B$叫做定义域A到值域B上的函数，记为$y=f(x)$。

（五）反函数：如果确定函数$y=f(x)$的映射$f:A\to B$，是$f(x)$的定义域A到值域B上的一一映射，这个映射的逆映射$f^{-1}:B\to A$所确定的函数$x=f^{-1}(y)$叫做函数$y=f(x)$的反函数，并记为$y=f^{-1}(x)$。

函数$y=f(x)$与函数$x=f^{-1}(y)$所确定的x，y间的对应关系是一致的（但其方向是相反的，一个是$A\to B$，另一个是$B\to A$），在同一坐标系中，两函数的图象是一样的；函数$y=f(x)$与函数$y=f^{-1}(x)$所确定的x和y间的对应关系不一致，它们在同一坐标系中的图象关于直线$y=x$对称。

【例6】 求下列函数的反函数：

（1）$y=\dfrac{x+1}{2x-3}\left(x\neq\dfrac{3}{2}\text{且}x\in R\right)$；（2）$y=$

$=\sqrt{x-1}$ （$x\geqslant1$且$x\in R$）。

解：（1）由$y=\dfrac{x+1}{2x-3}$，可得$x=\dfrac{3y+1}{2y-1}$。

$\therefore$ 函数 $y=\dfrac{x+1}{2x-3}\left(x\neq\dfrac{3}{2}\text{且}x\in R\right)$的反函数是 $y=$

$=\dfrac{3x+1}{2x-1}\left(x\neq\dfrac{1}{2}\text{且}x\in R\right)$.

（2）由 $y=\sqrt{x-1}$，可得 $x=y^2+1$.

$\therefore$ 函数 $y=\sqrt{x-1}$（$x\geqslant1$且$x\in R$）的反函数是 $y=x^2+1$（$x\in \overline{R^-}$）.

求函数 $y=f(x)$ 的反函数的一般方法是先解出 $x=f^{-1}(y)$，然后将字母 x，y 互换，写成 $y=f^{-1}(x)$.注意要分别标出 $f(x)$ 和 $f^{-1}(x)$ 的定义域.

三、幂函数

（一）幂函数：函数 $y=x^\alpha$ 叫做自变量 x 的幂函数.

当 $\alpha>0$ 且 $\alpha\in Z$ 时，函数的定义域是（$-\infty$，$+\infty$）.

当 $\alpha>0$ 且 $\alpha=\dfrac{p}{q}$（p，q 是互质的正整数，$q>1$）时，若 q 为奇数，函数的定义域是（$-\infty$，$+\infty$）；若 q 为偶数，函数的定义域是〔0，$+\infty$）.

当 $\alpha<0$ 且 $\alpha=Z^-$ 时，函数的定义域是（$-\infty$，0）$\cup$（0，$+\infty$）.

当 $\alpha<0$ 且 $\alpha=-\dfrac{p}{q}$（p，q 是互质的正整数，$q>1$）时，若 q 为奇数，函数的定义域为（$-\infty$，0）$\cup$（0，$+\infty$）；若 q 为偶数，函数的定义域为（0，$+\infty$）.

（二）幂函数的性质

1.当 $\alpha>0$ 时，函数 $y=x^\alpha$ 的图象都通过（0，0）

（1，1）两点；并且在〔0，+∞）上，函数值随x值的增大而增大．

2.当$\alpha<0$时，函数$y=x^{\alpha}$的图象通过（1，1）点；在（0，+∞）上，函数值随x值的增大而减小；并且在（0，+∞）上，图象向上与y轴无限地接近，向右与x轴无限地接近．

至于函数$y=x^{\alpha}$在（−∞，0）上的性质，可根据函数本身的奇偶性，对它进行讨论．如$y=x^{\frac{2}{3}}$在〔0，+∞）上的图象通过（0，0），（1，1）两点，且函数值随x值的增大而增大．由于它是偶函数，它的图象关于y轴对称，所以它在（−∞，0〕上的图象过（0，0）（−1，1）两点，且函数值随x值的增大而减小．又如函数$y=x^{\frac{1}{3}}$在〔0，+∞）上的图象通过（0，0），（1，1）两点，且函数值随x值的增大而增大，由于它是奇函数，它的图象关于原点对称，它在（−∞，0〕上的图象过（0，0），(−1，−1）两点，函数值随x值的增大而增大．

【例7】 比较下列各组中两个值的大小，并简要说明理由：

（1）$\sqrt[3]{2}$与$\sqrt[3]{2.1}$；（2）$\left(\frac{2}{3}\right)^{-0.5}$与$\left(0.6\right)^{-\frac{1}{2}}$；

（3）$\left(-\frac{2}{3}\right)^{-\frac{3}{5}}$与$\left(-\frac{3}{4}\right)^{-\frac{3}{5}}$．

解：（1）考查幂函数$y=x^{\frac{1}{3}}$，在〔0，+∞）上，y

的值随 x 值的增大而增大。

$\because\quad 2<2.1$,

$\therefore\ 2^{\frac{1}{3}}<2.1^{\frac{1}{3}}$，即 $\sqrt[3]{2}<\sqrt[3]{2.1}$。

（2）考查幂函数 $y=x^{-\frac{1}{2}}$，在（0，$+\infty$)上，y的值随x值的增大而减小。

$\because\quad \frac{2}{3}>0.6$,

$\therefore\quad \left(\frac{2}{3}\right)^{-\frac{1}{2}}<0.6^{-\frac{1}{2}}$.

（3）考查幂函数 $y=x^{-\frac{3}{5}}$，在（0，$+\infty$）上，y的值随x的增大而减小。

$\because\quad \frac{2}{3}<\frac{3}{4}$,

$\therefore\quad \left(\frac{2}{3}\right)^{-\frac{3}{5}}>\left(\frac{3}{4}\right)^{-\frac{3}{5}}$.

两端取相反数后得

$-\left(\frac{2}{3}\right)^{-\frac{3}{5}}<-\left(\frac{3}{4}\right)^{-\frac{3}{5}}$，所以 $\left(-\frac{2}{3}\right)^{-\frac{3}{5}}<\left(-\frac{3}{4}\right)^{-\frac{3}{5}}$.

四、函数的性质

（一）函数的单调性

函数$f(x)$在它定义域内给定区间上，如果对属于这个区间的任意两个自变量的值x_1, x_2，当$x_1<x_2$时，都有$f(x_1)<f(x_2)$，那么就说$f(x)$在这个区间上是增函数；当$x_1<x_2$时，都有$f(x_1)>f(x_2)$，就说$f(x)$在这个区间上是减函数。