ZhXShX

中学数学丛书

微积分初步

任德麟 罗祖安

湖北人民出版社

ZHONGXUE SHUXUE CONGSHU

HONGXUE SHUXUE CONGSHU

ZhXShX

中学数学丛书

微积分初步

任德麟 罗祖安

湖北人民出版社

中学数学丛书
微积分初步
任德麟 罗祖安
*
湖北人民出版社出版 湖北省新华书店发行
潜江县印刷厂印刷
787×1092毫米 32开本 11.25印张 256,000字
1983年5月第1版 1983年5月第1次印刷
印数：1—18,000
统一书号：7106·1660 定价：0.92元

内　容　提　要

本书介绍单变量函数微积分的基本知识，内容安排与高中课本基本一致．本书对微积分的基本概念讲得比较详细，直观易懂，理论表述准确．同时，例题、习题丰富，选题时充分注意了题目的典型性与完整性，适合高中学生课外阅读，对中学数学教师亦有一定的参考作用．

编 者 的 话

为了帮助广大中学生学习数学基础知识，一九八一年秋，湖北人民出版社委托我们湖北省暨武汉市数学学会推荐介绍作者，组织编写了《逻辑代数初步》、《线性代数初步》、《概率统计初步》、《微积分初步》四本小册子，分别介绍中学数学教材中有关高等数学的初步知识．这一工作，得到大中学校教师的热情支持，并希望以中学生为主要对象，编辑出版一套《中学数学丛书》．根据读者的要求和老师们的意见，出版社约请我会在此基础上主编一套《中学数学丛书》．我们认为这个工作是很有意义的．于是，发动高等院校及中学的广大数学教师以及教学研究工作者共同讨论，决定了二十几个选题，结合湖北人民出版社已组稿的四种，制定了《中学数学丛书》选题计划．

《中学数学丛书》的编写，围绕中学数学教学大纲和全国统编数学教材，从中学生的学习实际出发，对中学数学知识适当作了拓宽和加深．编写这套书的目的，是为了帮助中学生巩固基础知识，加强基本训练，熟练掌握基本技能，培养分析和解决数学问题的能力，提高学习质量．

参加这套丛书编写的，有大专院校的老师和教学研究工作者，以及教学经验丰富的中学教师．编写中充分注意中学生的实际，考虑到他们的实际水平和接受能力，力求写得深入浅出，通俗易懂，使一般水平的学生都能看懂，且学有所得．

《中学数学丛书》共计三十余册，多数小册子内容是和教材相对应的，几本综合性的小册子，是为了帮助同学们掌握数学

概念，学会分析与归纳，寻找解题途径并掌握较好的解题方法而编写的. 丛书中每本小册子既相对独立又互相联系，同学们既可系统阅读，也可以根据自己的情况有选择地使用. 学习中哪一方面比较薄弱，哪一方面存在疑难，便可选择其中的有关部分阅读. 另外，丛书各册编有丰富的练习题、复习题，并附有答案与提示，便于同学们自学，同时，对中学教师亦有一定的参考作用.

这套丛书出版以后，欢迎读者提出批评与建议，以便我们组织力量进一步修改再版，把这套丛书编好. 同时，希望读者对进一步编好中学生课外读物提出宝贵意见.

湖北省暨武汉市数学学会

一九八二年五月

前 言

微积分学是讨论对函数进行微分和积分两种基本运算的数学分支．它不仅是进一步学习数学的基础，也是学习现代自然科学和工程技术必须具备的基础知识．在中学阶段讲授初等微积分，是很有意义的．首先，由于学生在学习微积分时，要综合运用代数、几何、三角及解析几何的知识，这就有利于学生复习、巩固这些课程，并在一定程度上得到深化．因此，在中学阶段开设微积分，必将促使中学数学教育水平提到新的高度．其次，在中学阶段讲授微积分的初步知识，对于毕业后升入理工科大学学习的学生来说，可以在大学提早学习以微积分为基础的普通物理等课程，也为学习大学阶段的数学课程打下了基础．显然，这有利于高等教育质量的提高．再次，对于中学毕业后没有机会进入高等学校学习的同学来说，在中学里学习微积分初步知识，可以为今后自学各种科技知识，走自学成材之路打下必备的基础．此外，在中学增学初等微积分，让学生初步认识和掌握变量数学，对于树立辩证唯物主义世界观，也具有一定的教育意义．

在中学阶段讲授初等微积分，又是一项新的工作，在教学内容、教学方法等各个方面均缺乏经验．我们写这本小册子的目的，是希望给广大的中学生和中学数学教师提供一本参考读物．在编写过程中，我们注意到以下几个方面：

第一，对本书中一些最基本的概念的引入和解释，给予了较多的注意，讲得比较详细，力图做到直观易懂，揭示概念的

实质，而在概念与有关基本理论的表述方面，不过分追求逻辑上的严格性，但力求准确.

第二，配置了较多的例题和习题，在选题时，注意照顾到题目的典型性与完整性，还特意安排了少部分较难的题目，供学习成绩优异的部分同学练习时选用.

第三，书中取材是单变量函数微积分的基本知识，没有涉及较深的内容．就整个来说，全书的内容安排是与高中课本基本一致的．考虑到教师参考的需要，对有关章节作了少量的补充．这些补充的内容在标题中一律标以“*”注明，同学们初读时对此可以略去不读，而不会影响连贯性.

武汉大学数学系张远达教授在百忙中认真审阅了本书原稿，并提出宝贵意见，我们谨在此表示衷心的感谢．在本书编写过程中，还得到鲜于景礼同志的热情支持．他在繁忙的教学工作之余，为本书绘制了精致的插图，在此亦表示谢意.

为中学生编写一本微积分参考读物，过去没有这方面的经验，在编写中，难免有遗漏和不足之处，望广大读者批评指正.

任德麟　罗祖安

于武汉钢铁学院

1982 年 4 月

目　录

第一章　函数与极限

§1. 函数概念

在学习代数和三角的过程中，我们接触过一次函数、二次函数、指数函数、对数函数和三角函数．在微积分中我们将继续研究函数．由于在微积分中运用了新的研究方法，对函数的研究将更深入．这里，我们首先系统地回顾一下函数概念．

1．函数的定义

设 x 与 y 是两个变量．如果当变量 x 在实数的某一范围中任意取定一个数值时，变量 y 按照一定的规律取一确定的数值与它相对应，则变量 y 叫做变量 x 的**函数**(又名因变量)，记作 $y=f(x)$．其中变量 x 叫做**自变量**．自变量的取值范围叫做函数的**定义域**．函数的取值范围叫函数的**值域**．

从函数的这一定义中，我们看到，所谓给定一个函数，相当于明确指出了下面两点：第一，给出了自变量的变化范围，即函数的定义域；第二，给出了一个由变量 x 的取值确定变量 y 的对应值的对应规律．通常将这两个方面叫做函数概念的二要素．其中第二点，即变量 y 与变量 x 的对应规律尤其重要，它是函数概念的实质所在．

2．关于函数定义域的说明

刚才说过，所谓给定一个函数，理应包括已将函数的定义域给出．但是我们经常遇到这样的情况，即仅仅给出了变量 y

与变量 x 的对应规律，而没有明显地指出函数的定义域．这时我们约定：函数的定义域是指一切能使该对应规律有意义的 x 值之集合．把这一集合明白地描述出来，就是通常讲的求函数的定义域．

例 1 求函数 $f(x)=3x+5$ 的定义域．

解： 这个函数的对应规律是用公式 $f(x)=3x+5$ 表达的，若用文字陈述，是"自变量的值乘以 3 以后再加 5，得函数值．"使这个对应规律有意义的 x 值是全体实数，它便是这个函数的定义域，记为 $-\infty<x<+\infty$ 或记作 $(-\infty,+\infty)$．

例 2 求函数 $f(x)=\dfrac{1}{x^2-3x+2}$ 的定义域．

解： 由于 $x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$，而分式的分母不允许为零，所以这个函数的定义域是除 $x=1$ 和 $x=2$ 以外的全体实数，即 $-\infty<x<1$，$1<x<2$ 以及 $2<x<+\infty$，或记作 $(-\infty,1)$，$(1,2)$，以及 $(2,+\infty)$．

例 3 求函数 $f(x)=\sqrt{x^2+5x+6}$ 的定义域．

解： 我们知道，在实数范围内偶次方根的被开方数应为非负，所以为使函数有定义，必须有

$$x^2+5x+6\geqslant 0,$$

即

$$(x+2)(x+3)\geqslant 0.$$

于是或有 $\begin{cases}x+2\geqslant 0\\x+3\geqslant 0\end{cases}$；　　或有 $\begin{cases}x+2\leqslant 0\\x+3\leqslant 0\end{cases}$．

最后得函数的定义域为 $x\leqslant -3$ 及 $x\geqslant -2$，或记作 $(-\infty,-3]$ 及 $[-2,+\infty)$．

例 4 求函数 $f(x)=\sqrt{x-3}+\sqrt{a-x}$ 的定义域，其中 a 为某常数．

解：为使二根式同时有意义，必需

$$\begin{cases}x-3\geqslant 0\\ a-x\geqslant 0\end{cases}$$

当 $a>3$ 时，函数的定义域是 $3\leqslant x\leqslant a$ 或记作 $[3, a]$；当 $a=3$ 时，函数的定义域为 $x=3$ 这一点；当 $a<3$ 时，x 为任何数时此表达式都无意义(自然，我们仍限于在实数范围内讨论).

例 5 求函数 $f(x)=\log_a(2x-1)+\arcsin x$ 的定义域.

解：为使 $\log_a(2x-1)$ 有意义，应有 $2x-1>0$；又，为使 $\arcsin x$ 有意义，应有 $|x|\leqslant 1$. 解不等式组

$$\begin{cases}2x-1>0\\ -1\leqslant x\leqslant 1\end{cases}$$

得函数定义域为 $\frac{1}{2}<x\leqslant 1$，或记作 $\left(\frac{1}{2},\ 1\right]$.

上述五例，展示了求函数定义域的一些典型方法. 记住下面这几条是有用的：做除法时，除式不能为零；偶次方根的被开方数必须非负；对数式中真数必须为正；$\arcsin x$, $\arccos x$ 中的 x 必须满足 $|x|\leqslant 1$. 另外，我们在表示函数定义域时既用了不等式表示法，也用了区间表示法. 在此我们再强调一下，$a\leqslant x\leqslant b$ 可记为 $[a, b]$，叫闭区间，$a<x<b$ 可记为 (a, b)，叫开区间，而 $a\leqslant x<b$ 则记为 $[a, b)$ 等等.

例 6 $f(x)=C$，C 为某常数.

解： $f(x)=C$ 所表示的对应规律是：自变量 x 随便取什么样的数值，函数总取值 C 与之对应. 这个函数的定义域为 $(-\infty, +\infty)$.

例 7 当 $x\geqslant 1$ 时，$f(x)=-x+1$；当 $x<1$ 时，

$$f(x)=2x+3.$$

解：这个函数叫分段表达的函数，通常记为

$$f(x)=\begin{cases}2x+3, & \text{当 } x<1 \text{ 时}\\ -x+1, & \text{当 } x\geqslant 1 \text{ 时}\end{cases}$$

这个函数的定义域是$(-\infty, +\infty)$.

例 8 考虑函数

$$f(x)=\begin{cases}0, & \text{当 } x \text{ 为有理数时}\\ 1, & \text{当 } x \text{ 为无理数时}\end{cases}$$

解： 乍看起来这个函数有点"怪"，其实一点也不值得奇怪，它完全符合函数的定义.

例 9 已知对应规律为：当 x 的十进小数展式中数字"7"出现的次数为 n 时，$f(x)=n$；当 x 的十进小数展式中数字"7"出现的次数不是有限的，$f(x)=-\pi$.

解： 所述的对应规律确实定义了一个函数. 定义域为

$$(-\infty, +\infty).$$

例 10 变量 y 与变量 x 的对应规律如下表所示：

x	-3	0	2	5	19
y	1	3	-4	-7	256

解： 此对应规律定义了一个函数. 定义域为集合

$$\{-3, 0, 2, 5, 19\}.$$

考察了例 6—10 这五个例题，可以进一步加深对函数概念的理解. 从历史上看，函数概念有一个演化和逐渐完善的过程. 以前有人曾经把函数定义为："若变量 y 随着变量 x 的变化而变化，则称变量 y 是变量 x 的函数."按照这种说法，例 6 中的 $f(x)=C$(常数)则不能看作是函数. 另外，历史上还采用过这样的定义："若变量 y 与变量 x 的关系能用公式表示，则称 y 是 x 的函数."按照这种说法，例 8、例 9、例 10 都不能当作

函数．由以上分析可见，我们现在所采用的函数定义所包含的对象是十分广泛的，凡是二变量的取值有确定之对应关系者均属此列．对应是函数概念的核心和实质．至于具体描述这种对应规律的方式则是多种多样的．

3．函数的表示法

与函数的对应规律各种描述方式相应，我们有函数的各种表示法，大致有下列几种：（1）公式法——对应规律是用一个公式或几个公式表示的；（2）列表法——对应规律是用一表格表示的；（3）陈述法——对应规律是用文字描述的；（4）图示法——对应规律是用几何图形表示的．为了说明最后一种表示法(即图示法)的确切含意，应当回顾一下**函数的图象**的定义．设有函数$y=f(x)$，定义域为D．取平面直角坐标系xoy，对$x\in D$，在坐标平面上标出点$(x, f(x))$．当x遍取D中一切值时，得到点$(x,f(x))$的一个集合，即

$$\{(x,\ f(x))\ |\ x\in D\},$$

这个平面点集称为(在直角坐标系下)函数的图象．自然，我们也可讨论在极坐标系下函数的图象．用函数的图象给出对应规律，叫函数的图示法．

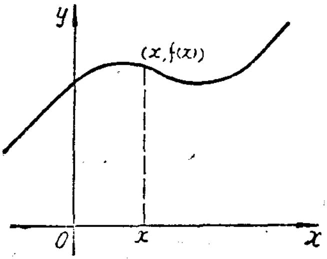

图 1.1

工厂或实验室中各类自动仪表的记录往往是一条曲线，这条曲线便表示了一个函数．在这种情况下，这条曲线不仅是函数的一种表示法，而且是我们认识这个函数的仅有的依据．此外，即使原来是用公式表示的函数，我们也常常作出它的图象(即兼用图示法)，以增加直观印象，帮助理解．

练 习 1.1

1. 将下列不等式所表示的变量变化范围用区间表示出来：

(1) $|x|<4$； (2) $x^2\leqslant 9$；

(3) $|x-4|<1$； (4) $-1<x-3\leqslant 2$；

(5) $x^2>9$； (6) $(x-2)^2\leqslant 4$.

2. 已知 $f(x)=x^2-x+1$，试计算 $f(0)$，$f(1)$，$f(-1)$，$f(2)$，$f(a+1)$，$f(-x)$，$f(x^3)$.

3. 已知 $\varphi(x)=\dfrac{2x-3}{x^2+1}$，试计算 $\varphi(0)$，$\varphi(-1)$，$\varphi\left(\dfrac{3}{2}\right)$，$\varphi\left(\dfrac{1}{x}\right)$，$\dfrac{1}{\varphi(x)}$，$\varphi(\varphi(x))$.

4. 确定下列各函数的定义域：

(1) $y=\sqrt{x+2}$； (2) $y=\sqrt{9-x^2}$；

(3) $y=\sqrt{4x-x^2}$； (4) $y=\sqrt{-x}+\sqrt{4+x}$；

(5) $y=\arcsin\dfrac{x-1}{2}$； (6) $y=-\sqrt{2\sin x}$；

(7) $y=1-\sqrt{2\cos 2x}$； (8) $y=\dfrac{4}{1+\sqrt{x^2-4}}$；

(9) $y=2\lg(x-1)$； (10) $y=\lg(x-1)^2$；

(11) $y=\sqrt{x^2+5x+4}$； (12) $y=\sqrt{x+1}\cdot\sqrt{x+4}$；

(13) $y=\sqrt{\dfrac{x}{x-2}}$； (14) $y=\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-2}}$；

(15) $y=\log_2\dfrac{1-x}{x}$.

5. 若函数 $f(x)$ 满足条件 $f(-x)=f(x)$ 则称为偶函数；若函数 $f(x)$ 满足条件 $f(-x)=-f(x)$ 则称为奇函数. 试判别下列各函数的奇偶性：