饱含一代名师呕心之作

解题技巧例释

初中数学

百册丛书撷英

开启考试智商

考商

系列3

EXAM IQ-3

丛书主编　王后雄

本册主编　杜　震

龍門書局

考商

系列 3

EXAM IQ-3

初中数学解题技巧例释

丛书主编：王后雄
本册主编：杜　震

龍門書局

初中数学解题技巧例释

丛书主编　王后雄

责任编辑　王　敏　王昌泰

龍門書局出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

北京二二〇七工厂印刷

科学出版社总发行　各地书店经销

*

2002年6月第一版　开本：890×1240　A5

2002年6月第一次印刷　印张：7 1/2

印数：1－30 000　字数：269 000

ISBN 7-80160-544-6/G·534

定价：8.00元

丛书编委会暨图书使用指导委员会

总 策 划 龙门书局

主　　编 王后雄(特级教师·硕士研究生导师·教学论专家)

副 主 编 杨剑春　瞿家廷　涂晓章

初 中 组 朱华东　罗建国　童祥林　徐奉林

王成初　吕颖华

执行编委 王　敏

欢迎读者将图书使用过程中的问题或修订建议与主编或使用指导委员会的专家沟通交流,我们将尽可能给您及时释疑解惑,提供全方位咨询和指导。我们深信,今天的读者,乃明天的编者!

目录

第一篇

初中数学解题技巧例释核心解读

数学科学的发展,是在正确的思想方法指导下进行的.我们在学习数学知识时也要遵循科学方法论,只有真正熟悉数学学科自身的特点和研究方法,解决数学问题才能得心应手.

近年来,我国各省市的中考纲要里都已明确提出,除考查学生“数学知识和技能”外,还要考查学生“运用数学知识和科学方法分析和解决”数学问题的能力.这一指导思想在这几年中考数学试题中都有具体的体现,而且随着中考数学命题的改革,越来越向深度和广度发展.

初中数学解题方法与技巧涵盖三部分内容:

• 数学思想方法.思想方法是认识、理解、掌握数学的意识,属于思维的范畴.它是在一定的数学知识和方法的基础上形成的,对理解、掌握、运用数学知识和方法、解决数学问题起到促进和深化的作用.初中数学中重要的数学思想方法有方程的思想方法、函数的思想方法、构造的思想方法、转化的思想方法、数形结合的思想方法、分类讨论的思想方法、整体的思想方法等.

• 数学解题技法.解题技法是把题给信息、基础知识和抽象思维有机地结合起来,对不同类型、不同知识点、形同质异、形异质同的问题,运用联想类比、分析推理、知识迁移、模仿借用等思维加工过程,形成某些规律性的解题思路和策略,从而使解法规律化、简明化.初中数学中常用的解题技法有观察法、换元法、配方法、主元法、放缩法、夹逼法、枚举法、待定系数法、分析综合法、倒推法、特殊法、类比法、列表法、画图法、面积法、反证法、同一法等.

• 数学解题技巧.对许多数学问题,用一般的方法去解固然可行,但用一些特殊的技巧去解会更简捷.数学解题技巧是数学解题技法的发展和变通,同一道数学题目从不同的角度去分析,解题技巧就不一样,用不同的知识去解,解题技巧也不一样.本书中所总结的解题技巧有:巧用常数“1”解题;巧用特殊法解客观题;巧增未知量列方程(组);巧用常数换元解数学题;巧补特殊图形解几何题;巧作三角形的外接圆证题;巧从问题的反面或侧面入手解题;巧用拆项、添项法解题;巧用倒数关系解题;巧用三角函数定义证几何题等.

科学方法的获得要立足于平时学习之中,在知识的形成、联系和应用过程中,养成科学的态度.只有数学知识与数学方法思想并重,知识与思想方法相互促进,才能使我们更深刻地理解数学,从整体上把握数学,灵活地运用数学.平时解题时,切忌就题论题,要多方位、多角度寻找解题途径,在可行方案中求异、求简、求新、求巧;要"借题发挥",将相似的数学情景或相关知识罗列在一起,创造一个可类比启发的智能环境,广开思路,使思维过程发生连锁延伸,得出相关问题的思路方法,逐渐总结归纳出同类问题的思维模式,解题方法或解题技巧.

第二篇

数学思想方法

一、方程的思想方法

方法平台

从分析问题中的数量关系入手，抓住等量关系，运用数学形式语言将相等关系转化为方程与未知量的限制条件，再通过解方程使问题获解，这种解决问题的思想方法便是方程的思想方法.

方程的思想方法是从算术方法到代数方法中寻找等量关系的一种质的飞跃，是从已知探索未知的桥梁，是解决大量数学问题的思维导航器，在代数，几何乃至数学的各个学科中都有广泛的应用.

名题诠释

1. 应用方程作出判断

［**例 1**］ 某学生在暑假期间观察了 x 天的天气情况，其结果是：①共有 7 个上午是晴天；②共有 5 个下午是晴天；③共下了 8 次雨，在上午或下午；④下午下雨的那天，上午是晴天，则 x 等于 （　　）

A. 8　　　B. 9　　　C. 10　　　D. 11

解析 我们可以对已知条件逐条进行“翻译”：由①知，共有 $x-7$ 个上午是雨天；由②知，共有 $x-5$ 个下午是雨天；由③列出方程：

$x-7+x-5=8$

解之，可得 $x=10$　满足④中 $x-5<7$ 的要求，故应选 C.

评注 从已知条件入手，抓住“x 天中共下了 8 次雨”这一线索找等量关系，是列方程的关键.

［**例 2**］ 一个读书小组有六位同学，分别姓赵、钱、孙、李、周、吴，这个读书小组有六本书，书名分别是 A、B、C、D、E、F. 每人至少读过其中的一本书. 已知赵、

钱、孙、李、周分别读过其中的2、2、4、3、5本书，而书A、B、C、D、E分别被小组中的1、4、2、2、2位同学读过．那么，吴同学读过______本书，书F被小组中______位同学读过．

解 设吴同学读过 x 本书，书F被 y 位同学读过，依题意，得

$2+2+4+3+5+x=1+4+2+2+2+y$

即 $x+5=y$

但每人至少读过一本书，即 $x\geqslant 1$，而每本书至多被六位同学读过，即 $y\leqslant 6$．于是，只有 $x=1$，$y=6$．故分别填上1与6．

评注 乍一看来，本题似乎很难下手．实际上，只要抓住"六位同学读过的书的总本数等于六本书被读过的人次总数"这个隐含条件，由此入手，设元列式，本题就不难解决了．

［例3］ 旅游车上乘坐着日本、美国、法国三个国家的游客．现知道日本游客有18人，法国游客有9人；成年男游客中，美国5人，法国3人；成年女游客中法国3人，日本5人；男孩中日本3人，美国2人，法国2人；女孩中美国2人，法国1人．还知道成年女游客比成年男游客少2人，而男孩和女孩一样多，则美国游客有______人．

解析 把不同国籍和不同组别的游客人数填入下表：

人数 / 国家 / 游客类别	日本	美国	法国
成年男性	(6)	5	3
成年女性	5	$(x-9)$	3
男　孩	3	2	2
女　孩	(4)	2	1
总　计	18	(x)	9

设美国游客有 x 人，则美国成年女游客为 $(x-9)$ 人，因为男孩与女孩一样多，所以日本女孩为4人，显然日本成年男游客为6人．再根据"成年女游客比成年男游客少2人"列方程：$x-9+5+3=(6+5+3)-2$

解之得 $x=13$

故填上13．

评注 本题文字叙述较长，但通过列表分析题意，就不难找到等量关系．因此列表分析法是列方程解应用题的有效方法．

2. 应用方程作出决策

［例 4］ 某商场计划拨款 9 万元从厂家购进 50 台电视机.已知该厂家生产三种不同型号的电视机,出厂价分别为:甲种每台 1500 元,乙种每台 2100 元,丙种每台 2500 元.

(1)若商场同时购进其中两种不同型号电视机共 50 台,用去 9 万元,请你研究一下商场的进货方案;

(2)若商场销售一台甲种电视机可获利 150 元,销售一台乙种电视机可获利 200 元,销售一台丙种电视机可获利 250 元,在同时购进两种不同型号电视机的方案中,为使销售时获利最多,你选择哪种进货方案?

(3)若商场准备用 9 万元同时购进三种不同型号的电视机 50 台,请你设计进货方案.

解 (1)分情况计算:

(i)设购甲种电视机 x 台、乙种电视机 y 台,则 $\begin{cases} x+y=50 \\ 1500x+2100y=90000 \end{cases}$

解之得 $\begin{cases} x=25 \\ y=25 \end{cases}$

(ii)设购甲种电视机 x 台,丙种电视机 z 台,则 $\begin{cases} x+z=50 \\ 1500x+2500z=90000 \end{cases}$

解之得 $\begin{cases} x=35 \\ z=15 \end{cases}$

(iii)设购乙种电视机 y 台,丙种电视机 z 台,则 $\begin{cases} y+z=50 \\ 2100y+2500z=90000 \end{cases}$

解之得 $\begin{cases} y=87.5 \\ z=-37.5 \end{cases}$(舍去)

故商场进货方案为:购甲种 25 台,乙种 25 台;或购甲种 35 台,丙种 15 台.

(2)(i)当购甲种 25 台,乙种 25 台时,可获利:$150\times25+200\times25=8750$(元)

(ii)当购甲种 35 台,丙种 15 台时,可获利:$150\times35+250\times15=9000$(元)

故选择购进甲种 35 台,丙种 15 台获利最多.

(3)设购甲种电视机 x 台,乙种电视机 y 台,丙种电视机 z 台,则

$\begin{cases} x+y+z=50 \\ 1500x+2100y+2500z=90000 \end{cases}$ $\therefore x=35-\frac{2}{5}y$

方案一:当 $y=5$ 时,$x=33$,$z=12$;

方案二:当 $y=10$ 时,$x=31$,$z=9$;

方案三:当 $y=15$ 时,$x=29$,$z=6$;

方案四:当 $y=20$ 时,$x=27$,$z=3$.

故共有以上四种进货方案.

评注　本题属决策类问题，根据不同情况列出不同的方程组解答，为研究、选择、设计进货方案提供了具有说服力的依据.

［**例5**］　某工程由甲、乙两队合做6天完成，厂家需付甲、乙两队共8700元；乙、丙两队合做10天完成，厂家需付乙、丙两队共9500元；甲、丙两队合做5天全部完成工程的$\frac{2}{3}$，厂家需付甲、丙两队共5500元.

(1)求甲、乙、丙各队单独完成全部工程各需多少天？

(2)若要求不超过15天完成全部工程，问可由哪队单独完成此项工程花钱最少？请说明理由.

解　(1)设甲、乙、丙各队单独做分别需x天、y天、z天完成全部工程，则有

$$\begin{cases}\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{6}\\ \frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{10}\\ \frac{1}{x}+\frac{1}{z}=\frac{2}{3}\times\frac{1}{5}\end{cases}\qquad 解得\begin{cases}x=10\\ y=15\\ z=30\end{cases}$$

故甲、乙、丙各队单独完成全部工程分别需10天、15天、30天.

(2)设甲队、乙队、丙队做一天分别应付a元、b元、c元，则有

$$\begin{cases}6(a+b)=8700\\ 10(b+c)=9500\\ 5(a+c)=5500\end{cases}\qquad 解得\begin{cases}a=800\\ b=650\\ c=300\end{cases}$$

$\because$ $10a=8000$(元)，$15b=9750$(元)

$\therefore$ 由甲队单独完成此工程花钱最少.

评注　第(1)题属于工程问题，列方程时要假定整个工程的工作总量为1；第(2)题属于最优化问题，解答时要注意两点，一是单独完成工程的队不能超过15天，二是单独完成工程的队花钱要最少.

3. 应用方程作代数证明

［**例6**］　一重W克的王冠是W_1克金与W_2克银制成的.已知W克金在水中的失重为f_1克，W克银在水中失重为f_2克，而这王冠在水中失重为f克，求证$\frac{W_1}{W_2}=\frac{f-f_2}{f_1-f}$.

证明　由题意列方程组：

$$\begin{cases}W=W_1+W_2 & ①\\ W_1\cdot\frac{f_1}{W}+W_2\cdot\frac{f_2}{W}=f & ②\end{cases}$$

以①代入②，消去W，得

$$W_1f_1+W_2f_2=(W_1+W_2)f$$

即 $$W_1(f_1-f)=W_2(f-f_2)$$

$$\therefore \frac{W_1}{W_2}=\frac{f-f_2}{f_1-f}.$$

评注 本题虽然以证明题的形式出现，但实质上，仍是通过数量关系分析，列方程，经过方程变形获得证明的.

[例 7] 奥尔沿着向上移动的自动扶梯从顶朝下走到底，他走了 150 级.他的朋友鲍勃沿着自动扶梯从底朝上走到顶，走了 75 级.如果奥尔行走的速度(以单位时间走多少级计算)是鲍勃的 3 倍.试证明任何时间看到的自动扶梯的级数都是 120 级.

证明 设自动扶梯的速度为 x，鲍勃步行速度为 y，则奥尔的步行速度为 $3y$.又设任何时间看到的自动扶梯的级数(从底到顶)为 l.

由奥尔走 150 级所用的时间与奥尔从自动扶梯的顶到底走 l 级所用时间相等，得 $\frac{150}{3y}=\frac{l}{3y-x}$ ①

又由鲍勃步行 75 级所用的时间与鲍勃从自动扶梯的底到顶走 l 级所用时间相等，得 $\frac{75}{y}=\frac{l}{x+y}$ ②

由①与②有 $3y=5x$ ③

把③代入①，得 $l=\frac{150}{5x}\cdot 4x=120$.

故本题得证.

评注 本题用到相对速度概念.当人沿自动扶梯朝上走时，人相对于扶梯的速度等于人在静止的扶梯上走的速度与自动扶梯(向上运动)的速度之和；人沿自动扶梯朝下走时，人相对于扶梯的速度等于人在静止扶梯上走的速度与自动扶梯速度之差.

4. 应用方程作几何计算

[例 8] 已知 P 是正方形 $ABCD$ 内的一点，$PA=5$，$PB=8$，$PC=13$，求正方形 $ABCD$ 的面积.

解 过 P 作 $PE\perp AB$，$PF\perp BC$，E、F 为垂足.如图 2-1-1.

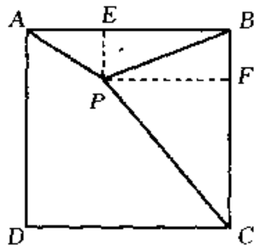

图 2-1-1

设 $PE=x$，$PF=y$，$AB=a$，由勾股定理得方程组：

$$\begin{cases} x^2+y^2=64 & ① \\ x^2+(a-y)^2=25 & ② \\ (a-x)^2+y^2=169 & ③ \end{cases}$$

②－①，得 $a^2-2ay=-39$

$\therefore 4a^2y^2=(a^2+39)^2$ ④

③ - ①,得 $a^2-2ax=105$

$\therefore 4a^2x^2=(a^2-105)^2$ ⑤

④ + ⑤,并利用①,得

$a^4-194a^2-6273=0$

$\therefore a^2=41$ 或 153.

又$\because AC>PC$,即$\sqrt{2}a>13$, $2a^2>169$.

$\therefore$ 只能取 $a^2=153$

故正方形 $ABCD$ 的面积为 153.

评注 本题虽然只要求 AB^2(即 a^2),但为了沟通 PA、PB、PC 的关系,必须要增设辅助未知数 PE、PF 分别为 x、y,通过勾股定理列方程组,其中 x、y 不一定要解出来.

[例9] 如图 2-1-2,$\triangle ABC$ 三边的长分别是 $BC=17$, $CA=18$, $AB=19$,过$\triangle ABC$ 内的点 P 向$\triangle ABC$ 的三边作垂线 PD、PE、PF, D、E、F 为垂足. 且 $BD+CE+AF=27$. 求 $BD+BF$ 的长.

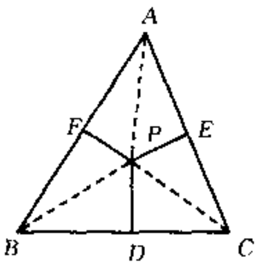

图 2-1-2

解 设 $BD=x$, $CE=y$, $AF=z$,则 $DC=17-x$, $AE=18-y$, $FB=19-z$. 连结 PA、PB、PC,得

$$\begin{cases} x^2+PD^2=(19-z)^2+PF^2 & ① \\ y^2+PE^2=(17-x)^2+PD^2 & ② \\ z^2+PF^2=(18-y)^2+PE^2 & ③ \end{cases}$$

① + ② + ③得 $x^2+y^2+z^2=(17-x)^2+(18-y)^2+(19-z)^2$

即 $17^2-34x+18^2-36y+19^2-38z=0$ ④

又 $x+y+z=27$ ⑤

由④、⑤解得 $x-z=-1$, 即 $x+(19-z)=18$

$\therefore BD+BF=18$

评注 本题要求 $BD+BF$ 的长,但很难分别求出 BD、BF 的长,在列方程组解答的过程中,要注意把"$BD+BF$"当作一个整体来解决.

5. 应用方程作几何证明

[例10] 如图 2-1-3,AB 是圆 O 的直径,P 是圆 O 上任一点,$PC\perp AB$ 于 C,以 P 为圆心,PC 为半径的圆与圆 O 交于 D、E,DE 与 PC 交于 M. 求证 M 是 PC 的中点.

证明 设圆 P 的半径为 r,延长 CP 交圆 P 于 L,延长 PC 交圆 O 于 K,则

$CK=PC=PL=r$.

再设 $MC=x$, $PM=y$. 在圆 P 中,由相交弦定理得

$MD \cdot ME = MC \cdot ML$，即 $MD \cdot ME = x(y+r)$ ①

同理，在圆 O 中有：

$MD \cdot ME = MP \cdot MK$，即 $MD \cdot ME = y(x+r)$ ②

由①、②得 $x(y+r) = y(x+r)$

$\therefore x = y$，即 $MC = MP$.

$\therefore M$ 是 PC 的中点.

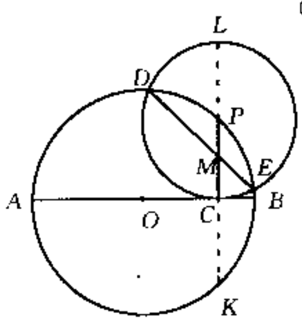

图 2-1-3

评注 本题虽然可以直接证明，但总不如用方程的思想来解简便. 注意：①直接求出 x 或 y 是不可能的；② r 只是在列方程的过程中起过渡作用，在方程的化简过程中自然消失.

[例 11] 在锐角$\triangle ABC$ 中，AD 为 BC 边上的高，$AD = BC$. BE 为 AC 边上的高，与 AD 交于 G，H 为 BC 中点. 求证 $BH = GH + GD$.

证明 如图 2-1-4，设 $BH = x$，$GH = a$，$GD = b$.

则 $HD = \sqrt{a^2 - b^2}$

在 Rt$\triangle BGD$ 和 Rt$\triangle ACD$ 中，

$\because \angle DBG + \angle C = 90°$，$\angle DAC + \angle C = 90°$，

$\therefore \angle DBG = \angle DAC$

$\therefore \triangle DBG \backsim \triangle DAC$. $\therefore \dfrac{DB}{DA} = \dfrac{DG}{DC}$

$\because DA = BC = 2BH = 2x$

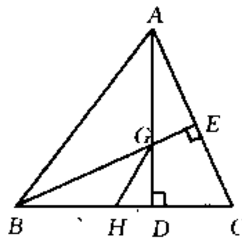

图 2-1-4

而 $DB = DH + BH = \sqrt{a^2 - b^2} + x$

$DC = CH - DH = BH - DH = x - \sqrt{a^2 - b^2}$

$\therefore \dfrac{x + \sqrt{a^2 - b^2}}{2x} = \dfrac{b}{x - \sqrt{a^2 - b^2}}$

整理得关于 x 的方程 $x^2 - 2bx + b^2 - a^2 = 0$

解之得 $x = b + a$ 或 $x = b - a$（舍去）

$\therefore BH = GH + GD$.

评注 本题也可用列方程组的方法来解. 设 $AD = BC = 2a$，$HD = x$，$GD = y$，$GH = z$，则 $DC = a - x$，$BD = a + x$. 由 Rt$\triangle ADC \backsim$ Rt$\triangle BDG$，可得 $\dfrac{a-x}{y} = \dfrac{2a}{a+x}$，即 $y = \dfrac{a^2 - x^2}{2a}$…①，又 $z^2 = x^2 + y^2$…②，由①、②可解得 $z = \dfrac{a^2 + x^2}{2a}$…③.

由① + ③得 $y + z = a$，即 $GD + GH = \dfrac{1}{2}BC = BH$.

[例 12] 在以 AB 为直径的半圆上取点 C，作 $CD \perp BA$，垂足为 D. 圆 O_1 与

AB、CD 及 $\overset{\frown}{AC}$ 相切，在 AD 上切点为 E. 求证 $BC = BE$.

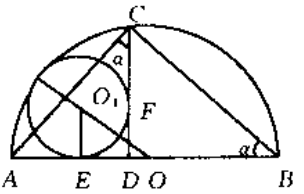

图 2-1-5

证明　如图 2-1-5，设半圆 O 半径为 R，圆 O_1 半径为 r，$\angle B = \alpha$，则 $BC = 2R\cos\alpha$，$BD = 2R\cos^2\alpha$，$AC = 2R\sin\alpha$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle OO_1E$ 中，$OO_1 = R - r$，$OE = OD + DE = (OA - AD) + DE = R - 2R\sin^2\alpha + r$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle OO_1E$ 中，由 $OO_1{}^2 = OE^2 + O_1E^2$ 得

$$(R-r)^2 = (R + r - 2R\sin^2\alpha)^2 + r^2$$

即 $r^2 + 4Rr\cos^2\alpha - 4R^2\sin^2\alpha\cos^2\alpha = 0$

解之得 $r = \dfrac{-4R\cos^2\alpha \pm 4R\cos\alpha}{2}$

$\therefore\ r = -2R\cos^2\alpha + 2R\cos\alpha$（舍去负值）

$\therefore\ BE = BD + r = 2R\cos^2\alpha - 2R\cos^2\alpha + 2R\cos\alpha = 2R\cos\alpha$

$\therefore\ BE = BC$

评注　本题运用直角三角形中的边角关系，既没作辅助角，又没作辅助线段，表面上复杂，实质上解题思路清晰，因为只要证 $BE = 2R\cos\alpha$，列方程再化简是不难办到的.

6. 应用方程作几何图形

[例 13]　已知$\triangle ABC$，求作一直线垂直于边 BC，且将三角形分成等面积的两部分.

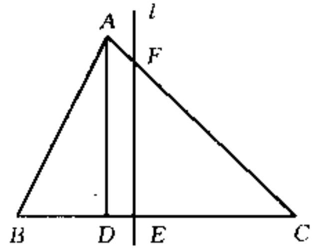

图 2-1-6

解析　设求作的直线 l 与$\triangle ABC$ 的边 BC、AC 分别交于 E、F，如图 2-1-6，BC 边上的高为 AD.

由于$\triangle ABC$ 是已知的，所以底边 $BC = a$，高 $AD = h$，$CD = d$ 都是已知量. 只要确定点 E 的位置，也就是确定 CE 之长 x 就可以做出所求作的直线了.

$\because\ \triangle CEF \backsim \triangle CDA$，$\therefore\ \dfrac{CE}{CD} = \dfrac{EF}{AD}$.

设 $EF = y$，则 $\dfrac{x}{d} = \dfrac{y}{h}$.　①

$\because\ S_{\triangle CEF} : S_{\triangle ABC} = 1:2$

$\therefore\ \dfrac{1}{2}xy : \dfrac{1}{2}ah = 1:2$，即 $xy = \dfrac{1}{2}ah$.　②

由①得 $y=\frac{h}{d}x$，代入②得

$$x^2=\frac{1}{2}ad$$

∴ 只要做出 $\frac{a}{2}$ 和 d 的比例中项，即可确定 BC 边上点 E 的位置，过 E 作 BC 的垂线，即得求作的直线 l.

作法：(1)过点 C 作 $MN\perp BC$；

(2)截取 $MC=AD$，$NC=\frac{1}{2}BC$；

(3)以 MN 为直径作半圆交 BC 于 E；

(4)过 E 作直线 $l\perp BC$.

∴直线 l 即为所求(如图 2-1-7).

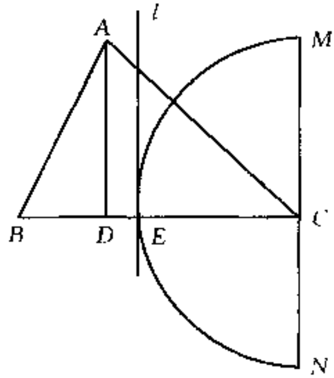

图 2-1-7

评注 本题作图的方法，称为代数分析法，实质上，不过是方程观点的一种表现形态罢了.

中考方法在线

1. 某校参加数学竞赛的选手平均分数是 75 分，其中参赛男选手比女选手人数多 80%，而女选手的平均分比男选手的平均分高 20%，那么，女选手的平均分是______分.

2. 某校初一、初二、初三各年级的学生数相同. 已知该校初一的男生数与初二的女生数相同，初三男生占全校男生的 $\frac{3}{8}$，那么全校女生占全校学生的________.

3. 下表是某一周甲、乙两种股票每天的收盘价：

(收盘价：股票每天交易结束时的价格)

收盘价(元/股) 时间 名称	星期一	星期二	星期三	星期四	星期五
甲	12	12.5	12.9	12.45	12.75
乙	13.5	13.3	13.9	13.4	13.15

某人在该周内持有若干甲、乙两种股票，若按照两种股票每天收盘价计算(不计手续费、税费等)，该人账户上星期二比星期一获利 200 元，星期三比星期二获利 1300 元. 试问该人持有甲、乙股票各多少股?

4. 在浓度为 $x\%$ 的盐水中加入一定重量的水，则变为浓度是 20% 的新溶液. 在此新溶液中再加入与前次所加入的水重量相等的盐，溶液浓度变为 30%. 试证