广西人民出版社

中学生复习丛书

数 学

上 册

中 学 生 复 习 丛 书

数 学

（上 册）

广西中小学教材编写组

广 西 人 民 出 版 社

中学生复习丛书

数　学（上）

广西中小学教材编写组

☆

广西人民出版社出版

（南宁市河堤路14号）

广西新华书店发行　广西民族印刷厂印刷

787×1092　1/32　13.5印张　303千字

1979年1月第1版　1979年1月第1次印刷

印　数：1—300,000册

书号7113·296　定价 0.93 元

编者的话

为了帮助中学生，特别是高中毕业生和知识青年系统复习中学数学知识，我们和南宁二中、南宁三中、桂林市教育局、广西师范学院附中、柳铁一中等单位的部分教师一起，编写了这本中学生复习丛书《数学》。

本书分上、下两册。上册包括代数、三角；下册包括平面几何、立体几何、解析几何等部分。各部分基本内容是以区编中学数学教材为基础，根据教育部一九七七年新编《中学数学教学大纲》(试行草案)以及一九七九年高考复习大纲的要求，适当加深加宽。凡现行教材已详讲部分，只列内容提要，不再解释和论证；尚未涉及部分，则叙述比较详细。各章均配备一定数量的例题与习题。习题附有答案或提示，以便读者自学参考。读者可根据需要，有所侧重地选学各部分内容。

由于时间仓促，水平有限，难免有错漏之处，欢迎读者批评指正。

编　者

1978年12月

目　录

代　数

平面三角

习题解答与提示

代　　数

第一章　数

数学是研究现实世界中空间形式和数量关系的科学，数是数学中主要的也是基本的概念之一，数的概念是随着人类社会实践活动的需要而逐渐形成并且逐渐扩展的，数的概念的每一次扩展，就给数学以解决实际问题的新工具，本章主要复习各种数的概念、性质及运算.

一　数的概念的扩展

数的概念的扩展可列表如下：

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\text{分数}\\ \left.\begin{array}{l}\text{正整数(自然数)}\\ \text{零}\\ \text{负整数}\end{array}\right\}\text{整数}\end{array}\right\}\text{有理数}\\ \text{无理数}\end{array}\right\}\text{实数}\\ \text{虚数}\end{array}\right\}\text{复数}$$

二　自 然 数

1.数1，2，3，……n……，叫自然数．其性质如下：

(1)自然数是无限的，它有最小的数1，没有最大的数；

(2)有顺序性，按其顺序可以比较任意两个自然数的大小；

(3)在自然数范围内，永远可以施行加、乘法运算，减

法在被减数大于减数时可以施行.

2.数的质因数分解

(1)质数和合数　在自然数中除单位1外，其它只能被1和自己整除的数叫质数(或素数)；不但能被1和自己整除，而且能被其它的数整除的数叫合数.1既不是合数，也不是质数(素数).

(2)因数和质因数　乘数和被乘数都叫做积的因数；一个合数的质数因数叫做这个合数的质因数.

(3)分解质因数　把一个合数表示成质因数连乘积的形式，叫分解质因数.式中相同的质因数，应表示成乘方的形式.合数的质因数分解，结果是唯一的，如：

$$720=2\times2\times2\times2\times3\times3\times5=2^4\cdot3^2\cdot5.$$

3.最大公约数和最小公倍数

(1)约数、公约数、最大公约数、互质数　能够整除某一个数的数叫做这个数的约数；几个数的公共约数叫做这几个数的公约数；几个数的公约数中最大的一个，叫这几个数的最大公约数，如果两个数的最大公约数是1，则这两个数叫互质.

(2)求几个数的最大公约数的方法：

先把它们分解质因数，然后取出它们所公有的质因数(相同的质因数照公有的个数取)然后相乘.

例如：求420,1260，980的最大公约数.

解： $\because\quad 420=2^2\times3\times5\times7,$

$1260=2^2\times3^2\times5\times7,$

$980=2^2\times5\times7^2.$

$\therefore$ 这几个数的最大公约数：

$$(420,1260,980)=2\times2\times5\times7=140.$$

（3）倍数、公倍数、最小公倍数　能够被某一个数整除的数叫做这个数的倍数；几个数公有的倍数叫做这几个数的公倍数；公倍数里最小的一个（0除外）叫做这几个数的最小公倍数.

（4）求几个数的最小公倍数的方法

先将这些数分解质因数，取其中一个数的全部质因数，再在另一个数里取出前一个数没有的全部质因数，再在另一个数里取出前两个数所没有的或者不足的质因数，等等，直到最后一个为止，最后把所有取出的质因数相乘。

例　求100，40，35的最小公倍数。

解：$\because$ $100=2^2\times5^2$，

$40=2^3\times5$，

$35=5\times7$。

$\therefore$最小公倍数：$[100,40,35]=2^3\times5^2\times7=1400$。

三　整　数

一切正负整数和零的全体叫做整数.其主要性质：

（1）在整数中无最大的数，也无最小的数；

（2）有顺序性，按其顺序可以比较任意两个整数的大小；

（3）在整数中永远可以施行加、减、乘法运算。

四　有理数

所有正负整数、正负分数和零的全体，叫做有理数. 其主要性质：

（1）在有理数中，无最大的数，也无最小的数；

（2）有顺序性，按其顺序可以比较任意两个有理数的大小；

（3）在有理数的范围内，永远可以施行加、减、乘、除四种运算．

（4）任何有理数都可以用既约分数$\frac{m}{n}$（$n\neq 0$）来表示$\left(\frac{m}{n}\text{分子分母互质}\right)$．

（5）有理数的运算法则：

加法：$\begin{cases}\text{同号相加，绝对值相加，符号不变．}\\ \text{异号相加，绝对值相减，符号取较大的数的符号．}\end{cases}$

减法：　减去一个数，等于加上这个数的相反数．

乘法：$\begin{cases}\text{同号相乘为正，积为绝对值相乘，}\\ \text{异号相乘为负，积为绝对值相乘．}\end{cases}$

除法：　除以一个数等于乘上这个数的倒数．

乘方：$a^n=\overbrace{a\cdot a\cdots\cdots a}^{n\text{个}}$，$a^n\begin{cases}=0\ (a=0\text{时}),\\ >0\ (a>0\text{时}),\\ >0\ (a<0,n\text{为偶数}),\\ <0\ (a<0,n\text{为奇数}).\end{cases}$

例1 设$a=-\frac{1}{3}$，$b=\frac{1}{2}$，求$\frac{3a^2+5b}{2a-1}+\frac{a^2-2b^3}{3-4b}$的值．

解： 原式$=\dfrac{3\times\left(-\frac{1}{3}\right)^2+5\times\frac{1}{2}}{2\times\left(-\frac{1}{3}\right)-1}+\dfrac{\left(-\frac{1}{3}\right)^2-2\left(\frac{1}{2}\right)^3}{3-4\times\frac{1}{2}}$

$$=\frac{3\times\frac{1}{9}+\frac{5}{2}}{-\frac{2}{3}-1}+\frac{\frac{1}{9}-2\times\frac{1}{8}}{3-2}$$

$$=\frac{\frac{1}{3}+\frac{5}{2}}{-\frac{5}{3}}+\frac{\frac{1}{9}-\frac{1}{4}}{1}=\frac{\frac{17}{6}}{-\frac{5}{3}}+\frac{-\frac{5}{36}}{1}$$

$$=-\frac{17}{10}+\left(-\frac{5}{36}\right)=-1\frac{151}{180}。$$

说明：1.加、减、乘、除、乘方的混合运算，先乘方，后乘除，再加减.

2.有小数、分数混合运算，先将小数化成分数.（某些题目，也可将分数化为小数）.

例 2 若 n 是自然数，对于两个数 $-a^n$ 与 $(-a)^n$ 的符号取决于什么？

解： $-a^n$ 的符号取决于 a 的符号和 n 的奇偶性，即：

$$-a^n\begin{cases}<0\ (a>0\text{时}),\\ >0\ (a<0,\ n\text{为奇数}),\\ <0\ (a<0,\ n\text{为偶数}).\end{cases}$$

$(-a)^n$ 的符号取决于 a 的符号和 n 的奇偶性，即

$$(-a)^n\begin{cases}<0\ (a>0,\ n\text{为奇数时}),\\ >0\ (a>0,\ n\text{为偶数时}),\\ >0\ (a<0).\end{cases}$$

注意：$-a^{2n}\neq(-a)^{2n}$，$-(-a)^{2n}\neq+a^{2n}$.

例 3 求证一个两位数与把它的数字位置对调成的数的差能被 9 整除.

证明： 设这两位数为 $10a+b$，则

个位与十位数对调后得：

$10b+a$， 于是

$(10a+b)-(10b+a)$

$=10a+b-10b-a=10(a-b)-(a-b)$

$$=(a-b)(10-1)=9(a-b).$$

∴ 一个两位数与把它的数字位置对调后成的数的差能被 9 整除.

习 题 一

1. 计算下列各题：

(1) $-1-\left[1-\left(1-0.5\times\frac{1}{3}\right)\right]\times\left[2-(-3)^{2}\right]$;

(2) $15\frac{3}{5}\div\left[\left(-2\frac{3}{4}\right)\times\left(-2\frac{2}{15}\right)+\left(-1\frac{13}{15}\right)\times1\frac{3}{4}\right]$;

(3) $\left[(-5)^{2}\times\left(-\frac{3}{5}\right)+15\right]\times8\div7+1$.

2. y是什么数时， $x+y<x-y$?

3. 求证：如果在两个连续整数的积加上其中较大的数，那么所得的数就是较大的数的平方.

4. 证明：两个连续整数的平方的差一定是奇数.

5. 证明：两个连续奇数的平方的差能被 8 整除.

五 实 数

1. 定义 有理数与无理数的全体叫实数.

2. 无理数 无限不循环小数叫无理数.

3. 实数的运算

(1)方根 在实数范围内，若 $x^n=a$，则 x 叫做 a 的 n 次方根（n为自然数），记为 $\sqrt[n]{a}$.显然，$(\sqrt[n]{a})^n=a$.

注意：在实数范围内，乘方运算永远可以施行．但其逆运算——开方，不是永远都能实施．事实上，负数的偶次方根是没有意义的．因此，我们只限于研究可以开方的那些情况：

①任何实数都可以开奇次方，其结果是唯一的．即

若$x^{2n+1}=a$（n为正整数），则

$$x={}^{2n+1}\sqrt{a}\begin{cases}>0 & (a>0),\\ =0 & (a=0),\\ <0 & (a<0).\end{cases}$$

②任何正实数可以开偶次方，其结果是两个绝对值相等、符号相反的两个实数．即若$x^{2n}=a(a\geqslant0, n$为正整数)，则

$$x=\pm{}^{2n}\sqrt{a}.$$

③ 0 的方根是 0．

（2）算术根　正数a的n次方根的正值叫算术根．记为$\sqrt[n]{a}$（$a\geqslant0$，n为正整数）．如：$\sqrt{8}$，$\sqrt[3]{27}$，$\sqrt[4]{64}$等都是算术根，$\sqrt[5]{-32}$，$\sqrt[3]{-8}$，不是算术根．

（3）实数的绝对值

正数和零的绝对值是它本身，负数的绝对值是它的相反数．绝对值的几何意义是：表示这个实数在数轴上所对应的点离开原点的距离．若a是实数，则

$$|a|=\begin{cases}a & (\text{当}a\geqslant0\text{时}),\\ -a & (\text{当}a<0\text{时}).\end{cases}$$

例如，$|2-\sqrt{6}|=\sqrt{6}-2$，　$|-5|=5$．

（4）实数的性质

①连续性：规定了正方向，原点和单位长度的直线称为数轴．数轴上的每一个点都有一个实数并且只有一个实数和它对应．反之，每一个实数，都有数轴上的一个点并且只有一个点和它对应．即实数与数轴上的点建立了一一对应的关系．所有的实数点充满了整个数轴，不留任何空隙，这叫实数的连续性．

②实数无最大的数，也无最小的数．任意两个数可以按其顺序进行大小比较．

③在实数范围内，可以施行加、减、乘、除法（除数不能为0）运算.在方根存在时，可以施行开方运算.

④任何实数的平方都是正数.

（5）实数的准确值与近似值的关系

由于无理数是无限不循环小数，以及由于一般运算中只要求一定的精确度，对实数进行运算时，通常根据需要的精确度，把某一个实数截到一个指定的数位，用所得到的有理数作为近似值进行运算.

比准确值小一点的近似值叫做不足近似值，比准确值大一点的近似值叫做过剩近似值.

如：1.414、1.415 分别是$\sqrt{2}$的不足近似值与过剩近似值.

四舍五入法是最常用的近似值截取法，这个方法是把某一个数保留到某一指定的数位为止，后面的数字全部舍去，如果舍去的第一位数字大于或等于5，则在保留的最后一个数位上加1；如果舍去的第一位数字小于5，则保留的数字不变.

例如，$\pi=3.14159$ 分别精确到个位（即1）百分位(即0.01)、万分位(即0.0001)的近似值是3、3.14、3.1416.

一个近似数，精确到某一位，那么，从左边第一个不是零的数字起，到这一位数字止，都叫做这个数的有效数字.

例 1 化简下列各式：

（1）$\dfrac{\sqrt{a^2}}{a}$，　　（2）$\sqrt{3-2\sqrt{2}}$.

解：（1）$\dfrac{\sqrt{a^2}}{a}=\dfrac{|a|}{a}=\begin{cases}1 & (\text{若}a>0),\\ -1 & (\text{若}a<0),\\ \text{无意义} & (\text{若}a=0).\end{cases}$

（2）$\sqrt{3-2\sqrt{2}}=\sqrt{2-2\sqrt{2}+1}$

$$=\sqrt{(\sqrt{2})^2-2\sqrt{2}\cdot 1+1^2}$$

$$=\sqrt{(\sqrt{2}-1)^2}=\sqrt{2}-1.$$

例 2 设a为任意实数，化简 $\sqrt{(a-2)^2}-\sqrt{(a-3)^2}$.

解： $\sqrt{(a-2)^2}-\sqrt{(a-3)^2}=|a-2|-|a-3|$

$$=\begin{cases}-1 & (a\leqslant 2), \\ 2a-5 & (2<a\leqslant 3), \\ 1 & (a>3).\end{cases}$$

说明：不要误解为a一定是正数，$-a$一定是负数。

例 3 如$4x^2-4x-15\leqslant 0$，化简

$$\sqrt{4x^2+12x+9}+\sqrt{4x^2-20x+25}.$$

解： $4x^2-4x-15\leqslant 0$可化成：$(2x+3)(2x-5)\leqslant 0$.

解得 $-\frac{3}{2}\leqslant x\leqslant\frac{5}{2}$,

$\therefore\quad 2x+3\geqslant 0,\qquad 2x-5\leqslant 0.$

而 $\sqrt{4x^2+12x+9}+\sqrt{4x^2-20x+25}$

$=\sqrt{(2x+3)^2}+\sqrt{(2x-5)^2}.$

$\because\quad 2x+3\geqslant 0,\qquad\therefore\quad\sqrt{(2x+3)^2}=2x+3.$

$\because\quad 2x-5\leqslant 0,\qquad\therefore\quad\sqrt{(2x-5)^2}=-(2x-5).$

$\therefore\quad\sqrt{4x^2+12x+9}+\sqrt{4x^2-20x+25}$

$=(2x+3)-(2x-5)=8.$

说明：应先利用不等式$4x^2-4x-15\leqslant 0$确定$2x+3$和$2x-5$的符号。

例 4 如x，y都是实数，且$(2x-1)^2+(y-8)^2=0$，试求$\log_8 xy$的值。

解： $\because$ x，y为实数，$\therefore$ $2x-1$，$y-8$均为实数，

$\because\ (2x-1)^2\geqslant 0,\qquad (y-8)^2\geqslant 0.$

但 $(2x-1)^2+(y-8)^2=0$，

$\therefore$ $(2x-1)^2$和$(y-8)^2$任何一项都不能大于0，

因此 $2x-1=0$， $y-8=0$。

得 $x=\frac{1}{2}$， $y=8$。

$\therefore$ $log_8 xy = log_8 4 = log_8 2^2 = log_8 (2^3)^{\frac{2}{3}} = \frac{2}{3}$。

注意：若a，b，c为实数，且$a^2+b^2+c^2=0$，则必有$a=b=c=0$，但中间有一个是减号就不成立。

例 5 试证明$lg3$是无理数。

证明：设$lg3$是有理数，不妨设 $lg3=\frac{n}{m}$（m，n为正整数）

则 $10^{\frac{n}{m}}=3$， 即$10^n=3^m$。

而10^n是偶数，且个位上一定是0，

3^m是奇数，个位上的数一定不是0，

$\therefore$ $10^n \neq 3^m$，则与假设矛盾。

$\therefore$ $lg3$不是有理数，而一定是一个无理数。

说明：可以用类似的反证法证明：$\sqrt{2}$，$\sqrt{3}$，$\sqrt{5}$等是无理数，任何有理数的平方都不能等于2，3，5。

例 6 如果一个自然数的平方能够被3整除，那么这个自然数一定能够被3整除。

证明：（反证法）若这个自然数不能被3整除，则其可表成$3k+1$和$3k+2$两种形式，将其平方

$$(3k+1)^2=9k^2+6k+1=3(3k^2+2k)+1$$

$$(3k+2)^2=9k^2+12k+4=3(3k^2+4k+1)+1$$

$\therefore$ 这个数平方后不能被3整除。这两个条件都与已知条件矛盾。所以这个自然数一定能够被3整除。

说明，这是常用的反证法之一，先列举题设的否定事项

的各个方面，然后将其面面驳倒，最后显出题设的正确性。

习 题 二

1．在实数范围内，a和$3a$谁大？

2．若$a<0$，则$\sqrt{a^2}\div a=1$对吗？为什么？

3．在什么条件下，$a-b<a+b$？

4．证明：（1）任何有理数的平方不能等于3。

（2）$\sqrt{5}$是无理数。

5．化简：$|6-a|-|2a+1|+\sqrt{a^2+10a+25}$ $(a<-5)$。

6．$y=2\sqrt{x^2}$ 和 $y=2x$ 是同一个函数吗？为什么？

7．化简：$\dfrac{\sqrt{x^2-2x+1}}{x^2+2x-3}-\dfrac{|2x-3|}{2x^2+3x-9}$ $(x<0)$。

8．在实数范围内，当a取何值时，下列各式有意义：

（1）$\sqrt{1-a}+\sqrt{3a-1}$；（2）$\sqrt{\dfrac{4a-1}{2-3a}}$。

9．设x和y是有理数，并且$(x-y\sqrt{2})^2=6-4\sqrt{2}$，试求$x$，$y$的值。

10．如x，y都是实数，且$y=\dfrac{(1-x^3)^{\frac{1}{2}}-(x^2-1)^{\frac{1}{2}}}{x+1}$，试求 $lg(x+y)$ 的值。

11．如x，y，α都是实数，且 $x^2+y^2=1$，求证：

$$|x\sin\alpha+y\cos\alpha|\leqslant 1.$$

（提示：这类问题，要想法找$x\sin\alpha+y\cos\alpha$，为此：考虑$x^2+y^2=1$和$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$，两式相乘化简即可。）

12．任意四个连续自然数的积与1之和，必为某一自然数的平方。

13．求证：$\sqrt[n]{A}$如果不是整数，那么必为无理数（n,A均为不小于2的正整数）。

（提示：可用反证法证明$\sqrt[n]{A}$不可能为分数）

14．若A和B都是N的倍数，则它们的和、差、积是否是N的倍数？

15．$2\sqrt{3}$是偶数吗？为什么？

16．当$\sqrt{(3x-2)^2}=2-3x$ 成立时，求x的范围．

17．证明等式$\sqrt{2x^2+2\sqrt{x^4-9}}=\sqrt{x^2+3}+\sqrt{x^2-3}$，对$x$的任何实数都成立．

18．写出祖冲之所精确到0.0000001的圆周率π的不足近似值和过剩近似值．

19．求$\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}$（精确到0.01）．

六 复 数

1．复数的概念

（1）虚数单位 规定$i=\sqrt{-1}$的新数叫虚数单位．虚数单位具有如下性质：

①$i^2=-1$；

②i与实数在一起，可按实数运算法则进行运算；

③i的乘方具有周期性．即

$$i^1=i,\ i^2=-1,\ i^3=i^2\cdot i=-i,\ i^4=i^2\cdot i^2=1.$$

一般地$i^{4n+1}=i$，$i^{4n+2}=-1$，$i^{4n+3}=-i$，$i^{4n}=1$．（n为正整数）

如 $i^{29}=i^{4\times7+1}=i$．

例 计算：$i\cdot i^2\cdot i^3\cdots\cdots i^{8n}$．

解： $i\cdot i^2\cdot i^3\cdots\cdots i^{8n}=i^{(1+2+3+\cdots\cdots+8n)}=i^{\frac{8n(8n+1)}{2}}$

$$=(i^{4n})^{(8n+1)}=1.$$