对外经济贸易大学国际工商管理学院

"211工程"系列教材

微积分

董玺印　杨静懿　杨公辅　钟百根　编著

对外经济贸易大学出版社

易大学国际工商管理学院
"211 工程"系列教材

微　积　分

董玺印　杨静懿
杨公辅　钟百根　编著

对外经济贸易大学出版社

(京)新登字 182 号

图书在版编目(CIP)数据

微积分/董玺印等编著.—2 版.—北京:对外经济贸易大学出版社,2002
ISBN 7-81000-466-2

Ⅰ.微... Ⅱ.董... Ⅲ.微积分-高等学校-教材 Ⅳ.0172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 046876 号

微 积 分

董玺印 等编著

责任编辑:刘传志

对 外 经 济 贸 易 大 学 出 版 社
北京市朝阳区惠新东街 12 号 邮政编码: 100029
网址: http: //www.uibep.com

北京山华苑印刷有限责任公司印装 新华书店北京发行所发行
开本: 787×1092 1/16 30.25 印张 585 千字
2003 年 1 月北京第 2 版 2004 年 6 月第 2 次印刷

ISBN 7-81000-466-2/G·136
印数: 3001—6000 册 定价: 48.00 元

总　　序

随着中国加入世界贸易组织，中国的市场经济建设将会对工商管理教育提出更高的要求。摆在工商管理教育界面前的迫切任务是：肩负起神圣的历史使命，迎接挑战，进一步提高工商管理教育水平。

关于工商管理教育是一种什么样的教育的问题，有人认为，工商管理教育是给人以智慧的教育。但是，这种认识并没有道出工商管理教育的真谛。根据多年从事工商管理教育的经验，我认为，工商管理教育提供给人的是运用资源、实现企业战略目标的智慧。

基于上述认识，对外经济贸易大学的工商管理教育不再片面强调企业管理中某一职能的重要性，而是注重企业管理不同职能之间的相互渗透与协调，强调企业管理不同职能在企业管理系统中的优化组合。在教学中，我们大量使用英文原版教材，使得学生在学习工商管理知识的同时，在语言上也实现"国际化"。

经过多年的努力，对外经济贸易大学的工商管理教育取得了丰硕的成果：我们的历届毕业生处于供不应求状态，他们广泛就业于各大跨国公司、金融机构等竞争极其激烈的企业和其他部门；在体现全国各个高等院校工商管理教育水平的国际企业管理挑战赛(GMC)中，对外组济贸易大学工商管理学院派出的学生代表队取得了骄人的战绩：截止到2000年12月，连续四届获得国际企业管理挑战赛中国赛区冠军(1997年，1998年，1999年和2000年)，并代表中国参加国际企业管理挑战赛国际总决赛取得季军(1998年)、亚军(1999年)和冠军(2000年)，为中国的工商管理教育赢得了国际声誉。

我们现在奉献给读者的就是对外经济贸易大学国际工商管理学院"211工程"建设的本科系列教材，涉及管理学、营销学、会计学、财务管理学、统计学等学科。这些教材集中了我院数十位教师将近二十余年的教学与科研成果。在"211工程"本科教材的建设中，我院教师以市场为导向，充分吸收国外先进的管理理论与方法，并将其有机地融入到教学中，收到了校好的教学效果。

我们热切地期望着从事工商管理教育的同行们与我们一起分享我们的教学与科研成果。我们也希望广大同行能够对我们教材体系中的不足提出宝贵意见。

对外经济贸易大学
国际工商管理学院
院长　张新民
二〇〇一年三月

前　　言

微积分是我校各专业的一门基础课程，作为我校“211 工程”建设的课题之一，我们在编写《微积分》教材的过程中所遵循的指导思想主要有以下几点：

1．坚持正确的政治方向和理论联系实际的原则，尽可能体现经贸大学对基础数学知识的需要，反映本校的特色；

2．注意总结我校多年来在微积分教学中的经验，吸取其他院校的教材编写经验以及适应学生毕业后考研的需要；

3．保持微积分理论的完整性、严密性，培养学生逻辑思维能力、计算能力和在处理经济贸易问题中运用数学方法的初步校能；

4．教材中编写了大量的例题和习题并配有参考答案，其难度多数适应我校的一般需要，同时也兼顾考研或少数学生钻研的需要。

由于形势在不断发展，编写中一定存在许多缺点和不足，欢迎专家和同行们提出宝贵意见以便及时改进。

本书第一、二章由董垒印编写，第三、四章由钟百根编写，第五章由杨静懿编写，第六、七章由杨公辅编写。

在编写中一直受到工商管理学院以及统计系领导的大力支持和帮助，谨致真诚感谢。

编著者

目 录

aba97/ai

第一章

函数的极限

§1.1　变量与函数

1. 实数

数学的任何分支都是研究事物运动的数量关系，研究微积分首先应对实数系做一个简要回顾。

微积分中所考虑的数都是实数。按照数的分类法，实数分为有理数和无理数，这两类数构成实数集，实数通常用数轴上的点表示，方法是在数轴上任取一点 O 作为原点，另一点 M 作为 1，将这两点间的距离作为度量单位，并且规定 $\overrightarrow{OM}$ 的方向为正向。这样任何实数都有了在数轴上的位置，即坐标，从而实数与点一一对应起来。

实数中的有理数或有理点又可称为比数，以 $\frac{p}{q}$ 表示，其中 p,q 为两任意整数，$q\neq0$。有理数可表示为有限小数或循环小数。在数轴上有理数是到处稠密的，即在任意两有理数间必可找到另外的有理数，例如在 0 与 $\frac{1}{10}$ 间可以找到 $\frac{1}{100}$，$\frac{1}{1000}$ 等等。一般地，如果 a，b 是两有理数，则 $\frac{a+b}{2}$ 也是有理数，位于 a,b 之间，这说明任意两个有理数间总有另外的有理数稠密地存在。

但是有理数并未完全充满数轴,即在实数轴上还有未被有理数占据的空间,这就是无理数。

为了说明无理数的存在,我们以$\sqrt{2}$为例,证明它不能表示为两整数之比。假定$\sqrt{2}$表示为一个既约分数:

$$\sqrt{2}=\frac{p}{q},\ p,\ q \text{ 为正整数,}$$

则有

$$2q^2=p^2$$

这表明 p 为偶数,设 $p=2k$,其中 k 也是正整数,

$$2q^2=4k^2,\text{即}\quad q^2=2k^2$$

这表明 q 也是偶数,但这与 p,q 的既约性矛盾。所以$\sqrt{2}$不能表示为 $\frac{p}{q}$形式,不是有理数。

有理数可以用有限小数或无限循环小数表示,无理数则不能,它是一个无限不循环小数。然而无理数都可以用任意精确的有理数逼近,也就是用有限小数任意逼近。

例如$\sqrt{2}$可以这样用有理数序列逼近:

由于$1<2<4$,则$1<\sqrt{2}<2$;

由于$1.4^2<2<1.5^2$,则$1.4<\sqrt{2}<1.5$;

由于$1.41^2<2<1.42^2$,则$1.41<\sqrt{2}<1.42$等等。

于是在数轴上形成一个区间套的序列:$[1,2]\supset[1.4,1.5]\supset[1.41,1.42]\supset\cdots$,这些区间逐渐收敛到一个属于每个区间的点$\xi$,它就是$\sqrt{2}$,是一个无理点。

那么如何用有限小数或无限小数表示实数就是一个十分重要的问题,即进位制问题。

通常人们表示数总是习惯用十进制,例如125.56作为十进制数,是由于

$$125.56=1\times10^2+2\times10^1+5\times10^0+5\times10^{-1}+6\times10^{-2}$$

但进位制可以任意选择,也就是说进位制的基数可以任意选择。

取正整数 q 为基数,则任意正数 a 的 q 进制表示为

$$a_q=a_nq^n+a_{n-1}q^{n-1}\cdots+a_0+a_{-1}q^{-1}+\cdots$$

其中系数 $a_n,a_{n-1},\cdots,a_0,+a_{-1},a_{-2}\cdots$,均应在$0,1,2,\cdots q-1$这 q 个数字中产生,例如常用的2,8,16等进位制,其系数应分别在如下各数中选取:

0,1;

0,1,2,3,4,5,6,7;

$0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,\bar{0},\bar{1},\bar{2},\bar{3},\bar{4},\bar{5}$。

各进位制间的转换是经常遇到的问题，现代计算机与进位制关系也是很密切的。

实数的绝对值与不等式是微积分研究中经常用到的概念，必须重视。

前面我们已经注意到一个实数与数轴上的点是一一对应的，点 a 到原点的距离就是这个数 a 的绝对值，记做 $|a|$，它的定义为

$$|a| = \begin{cases} a & a \geqslant 0 \\ -a & a < 0 \end{cases}$$

于是我们有以下一些基本关系式：

$$|-a| = |a|,$$

$$\sqrt{a^2} = |a|,$$

$$-|a| \leqslant a \leqslant |a|,$$

$$|a+b| \leqslant |a| + |b|,$$

$$|a| - |b| \leqslant |a-b| \leqslant |a| + |b|,$$

$$|ab| = |a||b|,$$

$$\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|},\ (b \neq 0)$$

$$|a| < b \quad 则\ -b < a < b,$$

$$|a| - |b| < |a+b|。$$

2. 变量

从初等数学到高等数学的飞跃是变量进入了数学，在某种意义上说，高等数学是关于变量的数学。初等数学的主要研究对象是不变的量即常量。作为高等数学的基础学科微积分主要研究变量以及变量间的相互依赖关系。历史上初等数学的发展走过了漫长的道路，也取得了辉煌的成就，但是它基本停留在常量研究范围之内，到了近代它已不能适应社会生产发展的需要，许多新的数学问题迫切需要建立完全不同于以往的新观念和新方法去解决。著名数学家、哲学家笛卡尔(R. Descartes, 1598—1650)首先创立了坐标的概念，进而引入变量概念，这是数学上的一个重大转折，它为牛顿(I. Newton, 1642—1727)和莱布尼兹(G. Leibniz, 1646—1716)创立数积分提供了必要的条件。

在我们的生产活动和科学研究过程中，常常可以直接或间接观察到反映物质运动的各种各样的量，例如长度、质量、体积、建度、价格、成本、利润、效益等等，举不胜举。这些量在所考虑的某一过程中，有的保持大小不变，是一个固定值，这样的量我们称为常量，有的量在某一过程中可以取不同的数值，总是处于变动状态，这样的量我们称为变量。

例如在自由落体运动中,速度是一个变量,在不同的时刻它取不同的值,所以在自由落体的运动过程中速度是一个变动着的量,即变量;而与速度有关的另一个量重力加速度则在运动过程中保持不变,所以重力加速度是常量;物体的长度与物体所处的温度环境有关,它受热胀冷缩规律的支配变动,所以物体长度是一个变量,而物体的质量则一般保持不变,所以质量是常量。又比如,在市场经济中,商品的价格是变量,它总是受市场规律的作用经常变动,所以价格是一个变量,等等。

总之,由于事物的运动变化是绝对的,因而刻画运动过程的量保持不变则是相对的、暂时的,这表明常量具有相对性,而变量是绝对的、经常的存在。为了研究方便,我们常把常量看做固定取值的变量,从而把常量归并到变量中去。

在变量的研究中,我们主要关心在数值上的变化,一般并不关心这个量的量纲等属性,所以又常常称变量为变数,称常量为常数。习惯上用 $x,y,z,\cdots$ 等表示变量,用 $a,b,c,d\cdots$ 等表示常数。

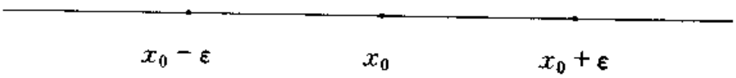
一个变量的全部取值的集合称为变量的变化域,通常用集合或区间表示。

例如 $y=\sin x$, x 的取值可以是任意实数,表示为 $x\in R$ 或者 $-\infty<x<+\infty$, y 的取值在 -1 到 $+1$ 之间,可以表示为

$$-1\leqslant y\leqslant 1, \text{或 } y\in[-1,1]。$$

点的邻域概念是微积分中的常用概念,这是因为微积分常常研究函数在某点邻近的性质,而不是研究函数在大范围的性质。

点 x_0 的 ε 邻域是以 x_0 为中心的开区间 $(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)$,其中 ε 为邻域半径, x_0 为邻域中心, x_0 的 ε 邻域即是满足不等式 $x_0-\varepsilon< x <x_0+\varepsilon$ 的全体点 x



即满足

$$|x-x_0|<\varepsilon \text{ 的全体 } x$$

有时为了在邻域中去掉 x_0,即去心邻域,可以特殊说明这个邻域除去 x_0,这时 x 满足

$$0<|x-x_0|<\varepsilon$$

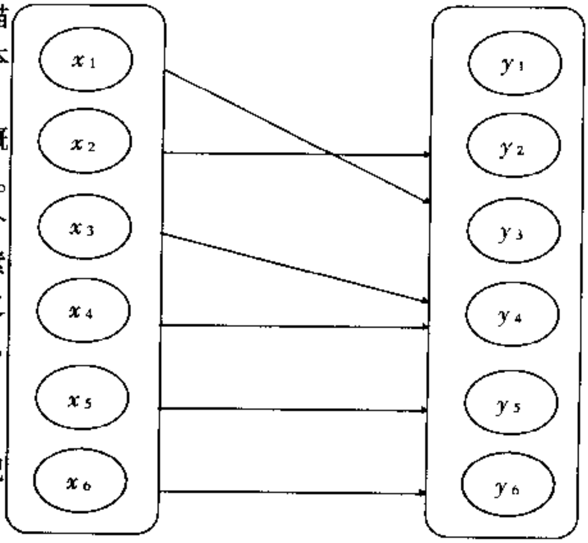
不特殊声明,我们所说邻域是指不去心的邻域。

§1.2 函数

在实际生活以及理论研究中,人们往往所关心的并不是一个个孤立的量,而是量与量

之间的相互依赖的关系、相互制约的规律，即一个量如何随着另一个量的变化而变化，或一个量如何随着几个量的变化而变化的规律。例如，产品的生产成本与生产量之间是相互依赖的，产量提高时，生产成本一般要随之提高，这表示在生产成本与产量两者之间存在着一定的依赖关系。又如，一个人的消费水平是受商品的价格和工资收入制约的，这表明在个人消费水平与其工资收入及商品价格之间也存在着某种依赖关系。生活中，像这样的例子是很多的，描述量与量之间的这种依赖关系的概念就是函数。

函数是微积分的基本概念，微积分的研究对象即是函数。人们在研究函数的变化过程中发明了微积分方法，并且应用微积分的理论和方法加深了对函数的研究。



为了给出关于函数概念的精确描述，有必要对集合间映射的概念作基本了解。

我们首先给出两个集合间映射的概念，然后利用映射概念给出函数概念。设 A，B 是两个非空的集合，如果有一个对应关系 f 存在，使得对于每一个元素 $x\in A$，通过 f 有惟一的元素 $y\in B$ 与之对应，则称 f 是一个从 A 到 B 的映射，记做

$$f:\ A\to B,$$

y 称为 x 在 f 下的象，x 为 y 的原象，记为

$$y=f(x),$$

集合 A 称为映射 f 的定义域，集合 $\{f(x)\mid x\in A\}\subset B$ 称为 f 的值域。

如果把元素 $x_1,x_2,\cdots$ 组成的集合叫做 A，把 $y_1,y_2\cdots\cdots$ 组成的集合叫做 B，这两集合的映射关系可以右上图示意。在集合映射的概念中，f 是 A 到 B 的对应关系，对于每个 $x\in A$，通过 f 映射到 B 中去，有惟一的一个 $y\in B$ 与 x 对应，$y=f(x)$ 是 x 的象。全体映象不一定等于 B，一般是 B 的一个子集，当等于 B 时，称 f 为 $A\to B$ 的一个映成映射；如果对于 $x_1,x_2\in A$，$x_1\neq x_2$ 有 $f(x_1)\neq f(x_2)$，则称 f 是 $A\to B$ 的一一映射，即原象不同象也不同的映射是一一映射。在一一映射下，定义域和值域间的元素是一一对应的。

对于映射也可以定义它的逆映射。

设 f 是 $A\to B$ 的一一映射，若对任意 $y\in\{f(x)\mid x\in A\}$，定义映射 $g:g(y)=x$，即 g 把 y 变回到 x，则称 g 为 f 的逆映射，令 $f^{-1}(y)=g(y)$，则 f^{-1}：

$\{f(x)|x\in A\}\to A$

逆映射与映射的定义域与值域正好对调。

把两个集合间的对应扩展到三个集合,可以得到复合映射。

设 $g:A\to B$, f: $B\to C$, 若对任意元素 $x\in A$,有 $\varphi(x)=f(g(x))\in C$ 与之对应,则称从 A 到 C 的映射 φ 为映射 g 和 f 的复合映射,记做 $\varphi=f\cdot g:A\to C$ 。

复合映射也称做映射 f 和 g 的乘积。复合映射的顺序是不能交换的,即映射的乘积一般不满足交换律,$f\cdot g$ 表示先做映射 g,再做映射 f。

从两个映射的复合定义,可以推广到任意有限个映射的复合映射,即任意有限个映射相乘得到的映射。映射的概念是十分重要的,它给出考察事物对应关系的一种观点和方法,在微积分或在其他数学分支都有意义。

根据映射的概念,可以定义关于量与量之间对应关系的函数的概念。

定义 设 X,Y 为两个非空的实数集合,如果 f 是从 $X\to Y$ 的一个映射,对每个实数 $x\in X$ 通过映射 f 都有惟一的一个实数 $y\in Y$ 与之对应,则称 f 是 X 上的一个函数,记为

$$y=f(x),$$

其中 x 称为自变量,y 为函数或因变量,X 为函数的定义域,一般函数的定义域可以记做 $D(f)=X$,映射 f 的值域 $\{f(x)|x\in A\}$ 称为函数的值域。

与映射的情况相同,函数的值域一般也应有 $\{f(x)|x\in D(f)\}\subset Y$。当函数的值域等于 Y 时,此函数即是一个映成映射。

在函数的定义中,主要包括以下三方面:

(1)对应关系 f 和定义域 $D(f)$,只要有了这两项,则实数 x 与 y 的对应关系即被确定;

(2)我们所定义的函数是单值函数,即对每个 $x\in D(f)$ 有惟一的 $y\in Y$ 与之对应,不允许对于同一个 x 值,代入 $y=f(x)$ 求出两个不同的 y 值;

(3)符号 $y=f(x)$,既代表对应关系又代表函数值,即习惯上,对 f 与 $f(x)$ 可不予区分。

因为函数是由对应关系和定义域完全确定的,那么对应关系与定义域都相同的两个函数相同,即,若函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 定义域为 D,对任意 $x\in D$ 都有 $f(x)=g(x)$,则称 $f(x)$ 与 $g(x)$ 相同。它们的区别只有符号表示上的差异,而无实质不同。

例如,在 $(-\infty,+\infty)$ 上,函数 $f(x)=\cos x$ 与函数 $g(x)=\sin(\frac{\pi}{2}-x)$ 相同,因为在该区间上恒有 $\sin(\frac{\pi}{2}-x)=\cos x$。

根据函数的定义,我们可以从实际生活中举出许多关于函数的例子:

例 1　正方形的面积是边长的函数,设边长为 x,则面积 S 与边长 x 的对应关系是

$$S=x^2$$

其中　$x\in(0,+\infty)$

对于每一个给定的边长 x 都有惟一确定的面积 $S=x^2$ 与之对应,定义域为 $(0,+\infty)$,值域为 $(0,+\infty)$。

例 2　一个地区的气温 T 是时间 t 的函数,$T=f(t)$,其对应规律可以这样建立:对每个时刻 t 记录该时刻的气温 T,将它们依次在坐标平面上描出,并连成一条曲线,则这条气温曲线即建立了 T 与 t 的函数关系,记做

$$T=f(t),\ t\in(0,+\infty)$$

这里 t 为自变量,气温 T 为函数。虽然 T 与 t 的函数关系不像例 1 中边长与面积那样可以用一个公式表示,而只是一个抽象符号,但根据气温曲线所建立的 t 与 T 的对应是明确的、存在的,因此函数关系成立。

例 3　观察某种商品的销售情况发现,当供给量 x 发生变化时,该商品的价格也变动,观察记录如下:

x(个)	0 — 50	51 — 100	101 — 500	501 —2 000	2 001 —10 000	10 000 以上
p(元/个)	5.00	4.50	3.50	2.30	1.50	1.40

通过这份记录,给出了 x 与 p 的一个确定的对应关系,对于每个 $x\in(0,+\infty)$,都有惟一确定的价格 p 与之对应,因此 x,p 之间存在函数关系:$p=f(x),x\in(0,+\infty)$。

上述几个简单的例子说明了函数是大量存在的,同时也表明了函数的表示方法可以有三种具体方式,即公式法(如例 1,$S=x^2$),图形法(如例 2 中的气温记录曲线)以及表格法(如例 3)。虽然我们常常遇到大量用公式表示的函数,但在实际中又有许多不能以公式表示的函数,它们只是抽象地存在着,很难给出确切的数学形式,此时最好的表示方式就是图形法或表格法。

由于以公式和表格表示的函数都可以通过描图的方法转换为图形,因此,图形法表示函数具有普遍意义,并具直观性,可以形象地反映两个量的相互依赖过程中的变化特征,所以在微积分的研究中应注重函数图形的作用。

(1) 单方程表达式

例如

$$y=ax^2+bx+c\qquad -\infty<x<+\infty$$

$$S=\pi r^2, \qquad 0\leqslant r<+\infty$$

(2) 参数方程形式

例如

$$x=\cos t,$$
$$y=\sin t, \qquad 0\leqslant t\leqslant 2\pi$$

表示椭圆,它是 x,y 间函数关系的一种表示方式。一般参数方程表示函数写做

$$\begin{cases} x=\varphi(t), \\ y=\psi(t), \quad t\in D \end{cases}$$

(3) 分段函数

有时一个函数的表达方式不能以单一的公式给出,在其定义域的各个子区间上有不同的公式,这就是分段函数,例如

$$f(x)=\begin{cases} 1+x^2 & x<0 \\ 1 & x=0 \\ 1-x^2 & x>0 \end{cases}$$

(4) 隐函数

一般在表示函数时常把函数写在等式左边,右边是只含自变量 x 的式子,这是显函数,也是日常习惯写法,但不是所有用公式表示的函数都能写出其显函数形式,这就需要借助于隐式表示函数,即所谓隐函数。

隐函数的一般表达式是一个二元方程

$$F(x,y)=0,$$

由它来决定 y 是 x 的函数。

例如 $e^y=xy,$

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad a,\ b>0,$$

等等,它们分别确定 y 是 x 的隐函数。

后面我们还会讨论隐函数的一些性质。

§1.3　基本初等函数

基本初等函数在数学中占有特殊重要地位,这里仅把六种基本初等函数作一简略回顾。

1. 常数函数

$$y=C,\qquad x\in(-\infty,\ +\infty),$$

如图 1.1 所示。其图形是一条平行 x 轴的直线。

图 1.1

2. 幂函数

$$y=x^a,\ a\neq 0\text{ 任意实数}$$

函数定义域与 a 有关,对于不同的 a 有不同的定义域,但不论 a 为何值,$y=x^a$ 在 $(0,+\infty)$ 上总有意义。

当 a 为正整数时,称为 a 次抛物线,定义域为$(-\infty,+\infty)$。

例如

$y=x^3$(见图 1.2)

$y=x^4$(见图 1.3)

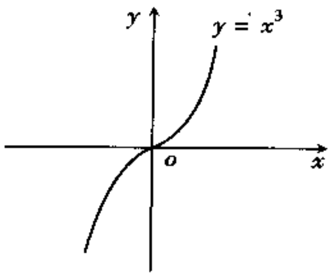


图 1.2

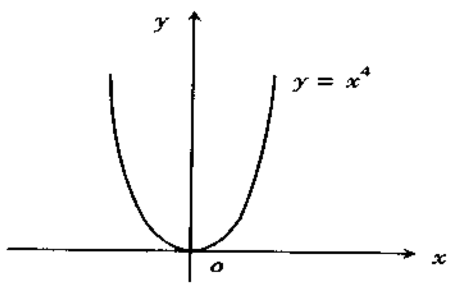


图 1.3

当 a 为负整数时,定义域为$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$,如图 1.4 及图 1.5。