初中毕业
数学总复习指导

青岛出版社

初中毕业数学总复习指导

本书编委会　编

青　岛　出　版　社

鲁新登字 08 号

责任编辑：路　畅

封面设计：郑惠民

初中毕业数学总复习指导

本书编委会　编

青岛出版社出版

（青岛市徐州路 77 号）

新华书店北京发行所发行

潍坊华光电子信息产业集团公司

激光排版实验印刷厂排版

诸城市印刷厂印刷

*

1993 年 1 月第 1 版　　1993 年 2 月第 1 次印刷

32 开（787×1092 毫米）　12.5 印张 270 千字

印数 1—10120

ISBN 7—5436—0872—3/G·421

定价：4.70 元

前　言

为了帮助初中毕业生系统、扎实地掌握初中阶段的数学知识，并在此基础上发展智力、提高能力，以适应升入更高一级学校学习数学知识的需要，我们组织编写了这本《初中数学毕业数学总复习指导》。

本书以现行初中数学课本为序，依据数学教学大纲的要求，按照系统性原则，把初中数学分为11章50节。每节的内容分为：知识要点、例题选讲、训练题和习题解答四部分。知识要点，概括本节复习时应重点掌握的知识内容和应熟练记忆的公式；例题选讲，选出一些具有典型性、示范性、技巧性和启发性的习题，进行解法分析，以起到揭示规律，指导方法，举一反三的效果；训练题则为巩固本节知识而编写，供学生每节复习之后练习用。个别节分为A、B两组，A组系基本习题，B组稍难；节后的习题解答供学生做题后参考。本书中前面标有※号的习题为选作题。全书最后提供了四套升学模拟试题，供读者在总复习之后检查复习效果时使用。

参加本书编写的有：辛克泰、谢川田、杨伦新、顾莲珍、张应奎、秦嗣纲、任曰芳、蔡重民、赵丽云、孙周舜、吕传钵、盛家桢，最后由圣运同志审订。

由于编写时间仓促，不妥和错误之处难免，敬请读者批评指正。

编者

1993.2

目 录

第一章　实数与代数式

第1节　与实数有关的概念和性质

一　知识要点

1. 实数的分类：

$$\text{实数}\begin{cases}\text{有理数}\begin{cases}\text{整数}\begin{cases}\text{正整数(自然数)}\\ \text{零}\\ \text{负整数}\end{cases}\\ \text{分数}\begin{cases}\text{正分数}\\ \text{负分数}\end{cases}\end{cases}\\ \text{无理数——无限不循环小数}\end{cases}$$

2. 自然数的有关概念：

自然数：表示物体的个数或事物次序的数叫做自然数，又叫正整数.

质数：大于 1 的正整数，只能被 1 和它本身整除，而不能被其他正整数整除，这样的正整数叫做质数，也叫素数.

合数：一个正整数除了能被 1 和它本身整除以外，还能被另外的正整数整除，这样的正整数叫做合数，也叫做复合数.

由此可知全体正整数可分为三类：单位数“1”；全体质数；

全体合数.

互质:如果两个正整数的最大公约数是1,就叫这两个数互质,也叫互素.

3. 整数:

(1)表示方法:任何整数都可用其各位上的数字与10的幂表示,如 $237=2\times10^2+3\times10^1+7\times10^0$.

一般地,整数可表示为:$10^n a_n+10^{n-1}a_{n-1}+\cdots+10^1a_1+a_0$. 其中 $a_0,a_1\cdots a_{n-1},a_n$ 为自然数.

(2)整数的和、差、积仍为整数.

(3)整数的整除,设 a、b 是整数($b\neq0$),如果有一个整数 c,它能使得 $a=bc$,则 a 叫做 b 的倍数,b 叫做 a 的因数,或称 b 能整除 a 或 a 能被 b 整除,记作:$b|a$. 例如 $2|4$.

4. 有理数:

(1)整数和分数统称有理数.

(2)有理数的和、差、积、商(分母不为零)仍为有理数.

5. 无理数:

(1)无限不循环小数叫无理数. 如 $\pi=3.14159\cdots$

(2)对于无理数 $x_1+y_1\sqrt{a}$ 与 $x_2+y_2\sqrt{a}$ 则有:

$$x_1+y_1\sqrt{a}=x_2+y_2\sqrt{a}\Leftrightarrow x_1=x_2,y_1=y_2.$$

二　例题选讲

例1　把下列各数分别填入相应的集合里:

0.1

$-3,+8,-\frac{1}{2},+0.21,0,7\frac{1}{3},-10,5,\pi,\cos150^\circ,\sqrt{2}$.

整数集合{ -3. +8. a 1};0. -10. 5.

正分数集合{ 7 1/3 cos150. };[illegible] 0.1

有理数集合{-3、+8、$-\frac{1}{2}$、0}|、0、-10、5、$7\frac{1}{3}$

无理数集合{π、cos150°}$\sqrt{2}$.

解：整数集合{$-3,+8,0,-10,5$}；

正分数集合{$0.1,7\frac{1}{3}$}；

有理数集合{$-3,+8,-\frac{1}{2},0.1,0,7\frac{1}{3},-10,5$}；

无理数集合{$\pi,\cos150°,\sqrt{2}$}.

例 2 设 a、b、c 分别为百位、十位和个位数字若 $a+b+c$ 能被 3 整除，则这个三位数能被 3 整除.

证明： 设 a、b、c 分别为百位、十位和个位数字，则这个三位数为 $100a+10b+c$.

$$
\begin{aligned}
100a+10b+c &= 99a+a+9b+b+c \\
&= 9(11a+b)+(a+b+c)
\end{aligned}
$$

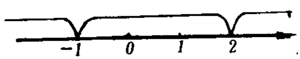
∵ $9(11a+b)$，$a+b+c$ 能被 3 整除，

∴ $9(11a+b)+(a+b+c)$ 能被 3 整除，

即三位数能被 3 整除.

例 3 化简：$|2-m|+|1+m|$.

分析：本题没给条件，应借助数轴找出各部分零点，从而划出区间，按不同范围讨论化简之：



解：当 $m<-1$ 时，原式$=(2-m)-(1+m)=-2m+1$.

当 $-1\leqslant m\leqslant 2$ 时，原式$=(2-m)+(1+m)=3$.

当 $m\geqslant 2$ 时，原式$=-(2-m)+(1+m)=2m-1$.

例 4 计算：$\frac{1}{3}3^2-(-2)^3+\sqrt{(-2)^2}\cdot\sqrt[3]{-2^3}\div(-1)^{1990}$.

解:原式$=-9+8+2\cdot(-2)\div1=-5$.

三　训练题

1. 判断题:

(1)实数 a 的倒数都是$\frac{1}{a}$.　　　　　　(×)

(2)一个数的平方一定大于或者等于这个数.　　(×)

(3)a 为有理数,则 $a-2|a|$ 不可能是正数.　　(√)

(4)较小的数减去较大的数所得的差一定是负数.(√)

(5)不论 x 为任何实数,x^2-x+1 的值不会小于$\frac{3}{4}$.(√)

2. 填空题:

(1)倒数等于其本身的数是 -10　1 .

(2)下列各数中无理数有 $\frac{\pi}{3}$　$-3^{\frac{1}{2}}$　$\frac{\pi}{3}$　cos135°; 0.303003…,整数有 0　1 .

$\frac{22}{7}$,3.14,1.$\dot{9}$,0,lg0.1,lg2,$-3^{\frac{1}{2}}$,$\frac{\pi}{3}$,cos135°,0.303003….

(3)由四舍五入法得到的近似数 0.03050 其有效数字的个数是 4 .

(4)如果 $a^2+4b^2+2a+4b+2=0$,则 $a=$ -1 ,$b=$ $-\frac{1}{2}$

(5)设 $a<0$,$-1<b<0$,则 a,ab,ab^2 之间的大小关系是 $ab^2<a<ab$

3. 计算题:

(1)$1\frac{3}{5}\div(-\frac{4}{5})^2-[(5\sqrt{12}-12\sqrt{\frac{1}{3}})\div\sqrt{6}+\left|\frac{2}{3}-\sqrt{2}\right|]$.

$=\frac{8}{5}\times\frac{25}{16}-[(5\sqrt{12}\times\frac{1}{\sqrt{6}}-12\sqrt{\frac{1}{3}}\times\frac{1}{\sqrt{6}})+\sqrt{2}-\frac{2}{3}]=\frac{5}{2}-[-\sqrt{2}+\sqrt{2}-\frac{2}{3}]$

$=\frac{19}{6}$

$(-1\frac{2}{5}+3\frac{7}{11}+3\frac{2}{5}+5\frac{4}{11})\div(-11)=11\div(-11)=-1$

(2) $-1\frac{2}{5}\div(-11)+3\frac{7}{11}\div(-11)-3\frac{2}{5}\div 11-5\frac{4}{11}\div 11$

第 2 节　整式的概念与运算

一　知识要点

1. 代数式：用运算符号把数或表示数的字母连结而成的式子叫做代数式.

2. 代数式的分类：

- 代数式
  - 有理式
    - 整式
      - 单项式
      - 多项式
    - 分式
  - 无理式：根号内含有字母的代数式

有理式和无理式的区别在于根号内是否为含字母的代数式、整式和分式的区别在于除式里是否为含字母的有理式. 单项式和多项式的区别在于是否为含加减的整式.

3. 单项式的定义、单项式的系数和次数.
多项式的定义、多项式的项数和次数. 及多项式的升降幂排列.

4. 整式的运算：

(1) 幂的运算法则：$a^m\cdot a^n=a^{m+n}$，$a^m\div a^n=a^{m-n}$，$(ab)^n=a^nb^n$，$(\frac{b}{a})^n=\frac{b^n}{a^n}$，$(a^m)^n=a^{mn}$，($m,n$ 都是正整数，$a\neq0$，$m>n$).

(2) 整式的四则运算.

(3) 乘法公式：

$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$,

$(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$,

$(a\pm b)(a^2\mp ab+b^2)=a^3\pm b^3$,

$(a\pm b)^3=a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3$,

$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$.

(4)对于多项式除以多项式，可将被除式和除式都因式分解再约分即可；或用竖式除法(要求被除式和除式都要按某一个字母降幂排列，被除式缺项的要空位).

被除式＝除式·商式＋余式.

二 例题选讲

例1 m 个球队进行单循环赛(所有参加比赛的球队，每个队都与其他各队比赛一次)，试用含 m 的代数式表示总共比赛的场数.

解：m 个球队两两比赛，每一个队都要与其它$(m-1)$个队各赛一次，即要赛$(m-1)$次. 那么 m 个队共要比赛 $m(m-1)$次，而每两队之间只要比赛一次，所以比赛场数总共是 $\frac{m(m-1)}{2}$.

例2 计算：

(1)$(1-a)^2(1+a^2+a^4)^2(1+a)^2$

(2)$(a-b)(a+b)^3-2ab(a^2-b^2)$

解：(1)原式$=[(1-a^2)(1+a^2+a^4)]^2$

$=[1-a^6]^2=1-2a^6+a^{12}$.

(2)原式$=(a^2-b^2)(a+b)^2-2ab(a^2-b^2)$

$=(a^2-b^2)(a^2+b^2)$

$=a^4-b^4.$

例 3 求代数式的值

(1)求当 $m=432, n=1$ 时，$m(m-n)^2-(m-n)(m^2-mn+n^2)$ 的值.

(2)已知 $x^2-3x+1=0$，求 x^3+x^{-3} 的值.

解:(1)原式 $=(m-n)[m(m-n)-(m^2-mn+n^2)]$

$$=(m-n)[-n^2]=n^2(n-m).$$

当 $m=432, n=1$ 时，原式 $=1^2\cdot(1-432)=-431$.

(2)由 $x^2-3x+1=0 \Rightarrow x+x^{-1}=3$，$\therefore (x+x^{-1})^2=9$，$\therefore x^3+x^{-3}=(x+x^{-1})(x^2-1+x^{-2})=3\times[(x+x^{-1})^2-3]=3\times(9-3)=18$.

说明:在求代数式的值时，(1)对于可直接代入求值的，一般应先化简，后代入求值.(2)对于不能直接代入求值的，一般要根据题设灵活转化.

三　训练题

1. 填空题:

(1)如果 $-x^2y^{n-3}$ 和 $\frac{1}{2}x^my$ 是同类项，则 $m=$ __2__，$n=$ __4__.

(2)$(3a-1)(-1-3a)=1-9a^2$，

(3)$(a+3)(-a^2-3a-9)=a^3-27$，

(4)$(3a^2+2xy)^2=9a^4+12a^2xy+4x^2y^2$，

(5)$3\times9^x\times27^y=3^{1+2x+3y}$，

(6)若 $x^3=5$，则 $(2x^2)^3+4(-x)^3=$ __180__.

(7)已知多项式 $x^3-x^2-2x-12$ 被某多项式除后，所得

的商式和余式都是 $x-3$，则这个多项式为 x^2+2x+6 .

(8)从浓度为 $a\%$ 的 m 克溶液中，取走 n 克后，再加 b 克水，用代数式表示剩下溶液的浓度是 $\frac{(m-n)a\%}{m-n+b}$.

2. 选择题：

(1)单项式 $=\frac{-a^2bc}{3}$ 系数和次数分别是（ D ）.

(A) $-1,4$；(B) $-\frac{1}{3},2$；(C) $-3,2$；(D) $-\frac{1}{3},4$.

√(2)当 $a\neq b$，m、n 为自然数时，$-(a-b)^m\cdot(b-a)^n$ 等于（ C ）.

(A) $-(a-b)^{m+n}$；　　(B) $(-1)^n(a-b)^{m+n}$；

(C) $(-1)^{n+1}(a-b)^{m+n}$；　　(D) $(a-b)^{m-n}$.

√(3)若 a,b 的积与 b 的平均数等于 a，则 a 的表示是（ B ）.

(A) $\frac{b-2}{b}$；(B) $\frac{b}{2-b}$；(C) $\frac{b^2}{1-b}$；(D) $\frac{1-b}{b^2}$.

3. 计算题： $(a^4+a^2+1)(a^4-a^2+1)$　a^8+a^4+1

(1) $(a^2+a+1)(a^2-a+1)(a^4-a^2+1)$；

(2) $(a-1)(a^2+a+1)(a^6+a^3+1)$；　(a^3-1)　a^9-1

(3) $(a+1)^2+(a+1)(a^2-2a+1)$　$(a+1)+(a+1)(a^2-2a+1)$

(4) $(a^6-b^6)\div(a^3-b^3)\div(a+b)$.　$a+1+a^3+1=a^3+a+2$

$\frac{(a^3+b^3)(a^3-b^3)}{(a^3-b^3)(a+b)}=a^2-ab+b^2$

第3节　因式分解

一　知识要点

1. 因式分解：把一个多项式化成几个整式的积的形式叫做因式分解（又名分解因式）.

2. 因式分解的方法：

(1)提取公因式法：提取各系数的最大公约数和相同字母的最低次幂.

(2)常用的五个公式：

$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$,

$a^2\pm 2ab+b^2=(a\pm b)^2$,

$a^3\pm b^3=(a\pm b)(a^2\mp ab+b^2)$.

对于二项式和三项式的要考虑能否用公式法分解．能否利用公式．关键要把握住公式的结构形式及各项特征(包括其符号).

(3)分组分解法：四项式及四项以上的多项式，一般要用到分组分解法，分组分解法必须预见到下一步分解的可能性。课本上只介绍了四项式的分组，其一是 4－2－2 分组(分组后能提公因式)，其二是 4－3－1 分组(分组后能利用公式).

(4)二次三项式的因式分解：对于$\triangle\geqslant 0$的二次三项式在实数范围内总可以分解。有如下三种方法。①十字相乘法．②求根公式法：$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$，其中 x_1 和 x_2 是方程 $ax^2+bx+c=0$ 的两个根．③配方法.

(5)其它方法：添项法、拆项法、待定系数法等.

3. 因式分解时应注意的三点：

(1)如果多项式各项含有公因式就应先提公因式，再按项数选用不同方法进一步分解.

(2)要在指定范围内分解到不能再分解为止.

(3)分解的结果要为整式，相同的因式写成幂的形式，各因式要化简.

二 例题选讲

例 将下列各式分解因式：

(1) $12(a+b)^n-3(a+b)^{n-2}$；

(2) $x^5-x^3-x^2+1$；

(3) $(1-a^2)+4b(a-b)$；

(4) $2t^2-2t-1$；

(5) y^6+4y^2.

解：(1) 原式 $=3(a+b)^{n-2}[4(a+b)^2-1]$

$=3(a+b)^{n-2}(2a+2b+1)(2a+2b-1)$.

(2) 原式 $=(x^5-x^3)-(x^2-1)=x^3(x^2-1)-(x^2-1)$

$=(x^2-1)(x^3-1)=(x-1)^2(x+1)(x^2+x+1)$.

(3) 原式 $=1-a^2+4ab-4b^2=1-(a-2b)^2$

$=(1+a-2b)(1-a+2b)$.

(4) $\because$ $2t^2-2t-1=0$ 的两个根是 $\dfrac{1\pm\sqrt{3}}{2}$，

$\therefore$ 原式 $=2\left(t-\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}\right)\left(t-\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}\right)$.

(5) 原式 $=y^2(y^4+4)=y^2(y^4+4y^2+4-4y^2)$

$=y^2[(y^2+2)^2-(2y)^2]=y^2(y^2+2y+2)(y^2-2y+2)$.

三 训练题

1. 把下列各式分解因式：

(1) $8x^2y^2-16x^4-y^4$；

$-(16x^4-8x^2y^2+y^4)$

$=-(4x^2-y^2)^2=-(2x+y)^2(2x-y)^2$