中学数学奥林匹克丛书

平面几何及变换

ZHONGXUESHUXUE AOLINPIKECONGSHU

主　编：梅向明
副主编：张君达

北京师范学院出版社

中学数学奥林匹克丛书

平面几何及变换

主编：梅向明　副主编：　张君达
作者：唐大昌　欧阳东方　王永俊

北京师范学院出版社

1988年·北京

主　编：梅向明
副主编：张君达
编　委：(以姓氏笔划为序)
何裕新　张君达　周春荔
赵大悌　唐大昌　梅向明

中学数学奥林匹克丛书
平面几何及变换
主编：梅向明　副主编：张君达

北京师范学院出版社出版
(北京阜成门外花园村)
新华书店首都发行所发行
国防科工委印刷厂印刷

开本：787×1092　1/32　印张：5.25　字数：113千
1988年8月北京第1版　1988年8月北京第1次印刷
印数：00,001—13,000册
ISBN 7-81014-174-0/G·164
定价：1.50元

前　　言

在悠久的数学史册之中，记载着人们由于企图解一些数学难题而使基础理论得到突破性发展的光辉业绩。无论是无理数的引入，非欧几何的诞生，还是群论的发展等，都毋庸置疑地证明了这一点。反过来，基础理论的发展又为数学家们提出了诱人涉猎的难题。

奥林匹克运动起源于古希腊(公元前776年)，这是力量、灵活与美的竞赛。"数学是思维的体操"，解数学难题的竞赛同样被称为数学奥林匹克。

1959年，罗马尼亚向东欧七国提议举办第一届"国际数学竞赛"，简称IMO (International Mathematical Olympiad)，以后每一年举行一次，参加的国家逐渐增多，这便是沿袭至今的"国际中学生数学奥林匹克"。

1956年在我国北京，上海等地开始举办省、市一级的高中数学竞赛，1978年开始举行全国性高中数学竞赛；1983年开始举行全国性初中数学竞赛，以后每年举行一次。同时，我国中学生还参加了其他国家举办的一些中学生数学竞赛的通讯比赛。

多年的数学竞赛实践证明，广泛与深入地开展中、小学的数学课外活动，科学与合理地举办各级数学竞赛是促进数学教育的发展，提高我国青少年数学素质的一个积极因素。

面临高难度的国际中学生数学竞赛，为使我国中学生在IMO中能跻身于世界数学强国之列，我们尤为突出地感到亟须研究与探讨IMO选手的培训方式、教材以及相应的教育手段。

1985年4月北京数学会创办了北京数学奥林匹克学校。三年来，在全体教师和工作人员的努力下，在教育部门与家长的大力支持下，北京数学奥林匹克学校为提高青少年的数学素质，培养数学优秀人才作出了一定的贡献。学校的学生在“华罗庚金杯”少年数学邀请赛，高、初中全国数学联赛以及IMO中取得了一定的成绩。

然而，这仅仅是开始！当我们踏上攀登数学奥林匹克高峰的征途时，我国的中学生以及他们的教练员肩负着光荣而艰巨的任务。

为进一步探讨数学业余学校的教材建设问题，在对三届学生施教实验的基础上，我们编写了《中学数学奥林匹克丛书》。希望《丛书》能为数学业余学校提供选读教材，能为老师与家长辅导学生提供参考资料，能成为中学生课余数学学习的良师益友。

由于我们水平有限，教学实践经验又不很充足，这套《丛书》一定会有很多欠缺之处，希望各省、市数学奥林匹克教练员和学生们以及广大的专家、读者批评指正。

梅向明　张君达

1988年2月2日

目　　录

第一章　对称、平移及旋转变换…………………… (1)

§1　对称变换…………………………………… (1)

§2　平移变换…………………………………… (11)

§3　旋转变换…………………………………… (20)

习题一………………………………………… (33)

第二章　相似和等积变换………………………… (37)

§1　相似变换…………………………………… (37)

§2　等积变换…………………………………… (57)

习题二………………………………………… (77)

第三章　几何证明中的几个方法………………… (83)

§1　证明几何定值问题的方法………………… (83)

§2　反证法……………………………………… (106)

§3　同一法……………………………………… (120)

习题三………………………………………… (131)

第四章　共圆点……………………………………… (133)

习题四………………………………………… (147)

附录　本书习题提示与解答……………………… (149)

第一章　对称、平移及旋转变换

对称、平移和旋转变换是几何变换中的基本变换。其中对称变换又是最基础的一个。

§1　对 称 变 换

在平面几何里，我们已经学过了“轴对称”概念：把一个图形沿着某一条直线折过来，如果它能够与另一个图形重合，那么我们说这两个图形关于这条直线对称。

两个图形中的对应点叫做关于这条直线的对称点，这条直线叫做对称轴（如图1-1）。

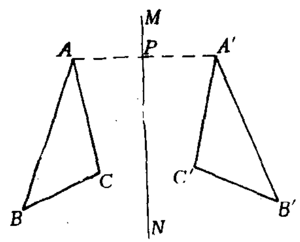

图1-1

轴对称图形有以下性质：

（1）如果两个图形关于某直线对称，那么对应点的连线被对称轴垂直平分；

（2）两个图形关于某直线对称，如果它们的对应线段或其延长线相交，那么交点在对称轴上。

这里要注意到性质 1 的逆命题：“如果两个图形的对应点连线被同一条直线垂直平分，那么这两个图形关于这条直线

对称”也是成立的。我们可以用它来判定两个图形是否对称。

将平面图形 F_1 变到与它关于直线 l 成轴对称的图形 F_2，这样的几何变换就叫做关于直线 l 的对称变换。

在本节所讨论的对称变换中，常应用的定理有：全等三角形的判定及性质定理；三角形的中位线定理；等腰(等边)三角形的判定及性质。

例1 已知$\triangle ABC$是等边三角形，延长 BC 至 D，延长 BA 至 E，且有 $AE=BD$，连结 CE,DE。求证：$CE=DE$。

分析：在证明几何题中，常常选择某直线为对称轴。把不是轴对称的图形，通过对称变换，补添为轴对称图形，或将轴一侧的图形通过对称变换反射到另一侧，以实现条件相对集中。

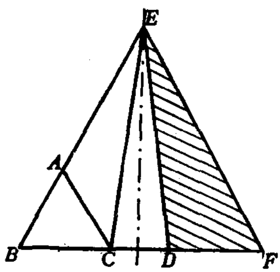

图1-2

为此我们可以先设法将图形“补齐”：延长 BD 于 F，使 $BC=DF$，并且连结 EF。然后再证明$\triangle EBC$与$\triangle EDF$是轴对称图形，从而得出$EC=ED$的结论。

略证 依上所说，将图形“补齐”后，由于

$$\begin{aligned}BE&=AE+AB\\&=BD+BC\\&=BD+DF=BF\end{aligned}$$

(因为 $BC=DF$ 且$\triangle ABC$是等边三角形)，

且 $\angle B=60^\circ$，

可以推出$\triangle EFB$是等边三角形。

那么在$\triangle EBC$和$\triangle EDF$中，从

$$\angle B=\angle F\ (=60^\circ)$$

$$BE=EF$$

$$BC=DF$$

可以得出 $\triangle EBC\cong\triangle EDF$，

$\therefore$ $CE=DE$。

例 2 已知在$\triangle ABC$中，AT平分$\angle BAC$，$BE\perp AT$于E，$CF\perp AT$于F，且M是BC的中点。求证：$ME=MF$。

分析：依照"补齐"图形的原则，把AE当作对称轴来认识，延长CF与AB交于C'，延长AC、BE交于B'，其中B',C'都是B，C关于AE的对称点。不过这需要证明！下面的证明就是依照这个思路给出的：

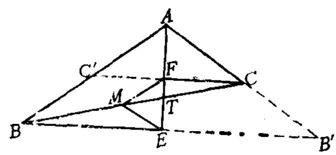

图1-3

证明 如图作延长CF与AB交于C'，延长AC、BE交于B'，在$\triangle ACF$及$\triangle AC'F$中

$\angle BAF=\angle B'AF$（已知），

$AF=AF$，

$\angle AFC=\angle AFC'\ (=90^\circ)$，

故 $\triangle ACF\cong\triangle AC'F$，

$\because$ $CF=C'F$（这说明了C'确是C关于AE之对称点）.

同理 $BE=B'E$.

利用中位线定理：在$\triangle BB'C$中，M是BC边中点，E是BB'边中点。则有 $ME\parallel B'C$,

从而 $\angle MEA=\angle EAC$.

同样 MF是$\triangle BCC'$的中位线，$MF\parallel BC'$,

从而 $\angle MFE=\angle BAE$.

$\because$ $\angle EAC=\angle BAE$,

$\therefore$ $\angle MEA=\angle MFE$,

故 $ME=MF$.

例3 在四边形$ABCD$中，$AB\parallel CD$，且有$AB=AC=AD=a$，$BC=b$。求对角线BD之长.

解 由于考虑到“对称”，我们可以“补齐”对称图形。延长BA于B'使

$$AB'=AB=a,$$

连$B'D$，因为$AB\parallel CD$，得$B'D=BC=b$。由于$AB=AC=AD=AB'=a$，可以发现：点B、C、D、B'是在以A为圆心、a为半径的同一个圆上，且BB'是这个圆的直径，所以

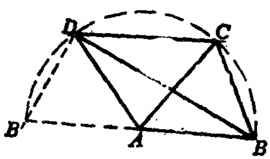

图1-4

$\angle BDB'=90°$。依勾股定理

$$BD^2+DB'^2=B'B^2,$$

$$\therefore\quad BD=\sqrt{B'B^2-DB'^2}$$

$$=\sqrt{(2a)^2-b^2}$$

$$=\sqrt{4a^2-b^2}.$$

在一些几何问题中，其几何图形（或图形的某一部分）是轴对称图形，这时依对称变换找到它的对称轴，对解决问题是有益的。

例4 已知 D 为等边 $\triangle ABC$ 内一点，且 $DB=DA$，$BP=AB$，$\angle DBP=\angle DBC$。求 $\angle BPD$ 的度数。

分析：显然 CD 是图形 $\triangle CAB$ 的一条对称轴。

解 连 CD，因为 $CA=CB$，$DB=DA$，所以 CD 是 AB 的垂直平分线。即 CD 是 $\triangle CAB$ 的对称轴，所以

$$\angle BCD=\frac{1}{2}\angle BCA.$$
$$=30°.$$

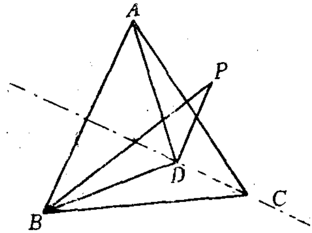

图1-5

显然 $\triangle BDP$ 及 $\triangle BDC$ 关于 BD 对称。这是因为由：

$BP=AB=BC$，$BD=BD$，$\angle DBP=\angle DBC$，

可以推出 $\triangle BDP\cong\triangle BDC$ 的缘故。

现在不难得出 $\angle BPD=\angle BCD=30°$。

例5 已知在 $\triangle ABC$ 中 $\angle A=2\angle B$，CD 平分 $\angle ACB$。求证：$BC=AC+AD$。

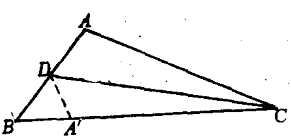

图1-6

分析：由于 CD 是 $\angle ACB$ 的平分线，因此如果以 CD 为对称轴，将 $\triangle ACD$ 作对称变换，那么 A 点的对称点 A' 一定会落在 BC 边上。即 $A'C=$

AC，$DA'=DA$。若能证明$A'B=A'D$，则问题得证。

证明 因为CD平分$\angle ACB$，所以将$\triangle ACD$以CD为对称轴作对称变换后，A点的对称点A'必在BC上。连DA'，则$AC=A'C$，$OA=DA'$，$\angle DAC=\angle DA'C$。

又 $\angle A=2\angle B$，所以$\angle DA'C=2\angle B$，

但 $\angle DA'C=\angle B+\angle A'DB$，

故 $\angle A'DB=\angle B$。

$\therefore$ $A'B=A'D=AD$，

因此 $BC=BA'+A'C$

$=AD+AC$。

有了“对称变换”的观点，我们可以顺理成章地解决一些更复杂的问题。

例 6 如图 1-7，在等边的凸六边形$ABCDEF$中，其顶角满足$\angle A+\angle C+\angle E=\angle B+\angle D+\angle F$。求证：

$\angle A=\angle D$，

$\angle B=\angle E$，

$\angle C=\angle F$。

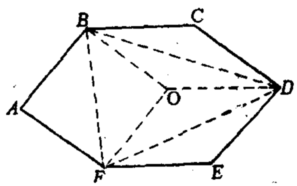

图1-7

分析：作六边形的三条对角线BD,DF,FB。将六边形切去三个等腰三角形$\triangle ABF$,$\triangle BCD$,$\triangle DEF$。由已知条件，这三个三角形的底边所对的顶角之和为360°。因此，由这三个等腰三角形可以构成一个新的三角形。因此，有如图1-8的变换.

由上面的变换可以发现O点既是A点关于BF的对称点，也是C点关于BD的对称点，还是E点关于DF的对称

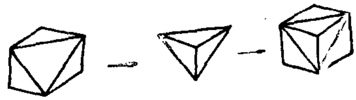

图1-8

点。

这样一来等腰三角形可以正好填满原来的六边形所剩下的三角形 BDF。这意味着，六边形的对边互相平行，从而对角相等。

略证 因为$\triangle ABF$,$\triangle CDB$,$\triangle EFD$是腰长都相等的等腰三角形。又

$$\angle A+\angle C+\angle E=\frac{1}{2}\cdot[(6-2)\cdot 180°]=360°,$$

因此，$\triangle ABF$,$\triangle CDB$,$\triangle EFD$可以拼成一个新三角形，而这个新三角形与$\triangle BDF$全等。

因为$OF=OD=EF=ED$，所以四边形$ODEF$为菱形。

同理：四边形$OFAB$,$OBCD$也是菱形。于是有

$$EF\parallel OD\parallel BC,$$
$$ED\parallel OF\parallel BA,$$

所以 $\angle B=\angle E$。

同理有 $\angle A=\angle D$， $\angle C=\angle F$。

例7 如图1-9，已知梯形$ABCD$中$AB\parallel CD$，$\angle C$的平分线CE垂直AD于E，且 $DE=2AE$。CE把梯形$ABCD$分成两部分。求这两部分的面积之比。

分析：把图形“补成对称”是必要的。

解 延长 DA,CB 交于 D'，因为 CE 平分 $\angle BCD$，

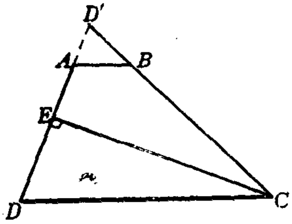

图1-9

$CE\perp DD'$.不难证明：$\triangle CDE\cong\triangle CD'E$ （CE 是对称轴！），所以 $ED=ED'$.

又 $DE=2AE$，所以

$$\frac{D'A}{D'D}=\frac{1}{4}.$$

由 $AB\parallel CD$，可知

$$\triangle D'AB\backsim\triangle D'DC,$$

其相似比为 $\dfrac{D'A}{D'D}=\dfrac{1}{4}$，

所以 $\dfrac{S_{\triangle D'AB}}{S_{\triangle D'DC}}=\left(\dfrac{1}{4}\right)^2=\dfrac{1}{16}$.

若设 $S_{\triangle D'AB}=k$，则 $S_{\triangle DD'C}=16k$，故

$$S_{\triangle EDC}=S_{\triangle ED'C}=8k,$$

$$S_{ABCE}=8k-k=7k,$$

所以 $\dfrac{S_{ABCE}}{S_{\triangle CED}}=\dfrac{7k}{8k}=\dfrac{7}{8}$.

这个例子中加入了相似的概念。如果把“对称”广义地理解成“补齐”图形，而不再关心其“大小”,那么本节开始所举的例 1 可以用这个想法写出另一个证明：

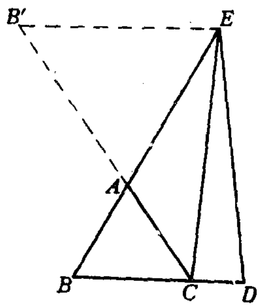

图1-10

过 E 作 $EB'\parallel BC$，且与

CA 的延长线交于B' 点（如图1-10）。

不难证明$\triangle AB'E$ 也是一个等边三角形，那么在$\triangle BDE$ 和$\triangle B'CE$ 中

$$
\begin{cases}
\angle B=\angle B'(=60°), \\
BD=AE=B'E, \\
BE=BA+AE \\
=CA+AB'=B'C,
\end{cases}
$$

所以 $\triangle BDE \cong \triangle B'CE$，

故 $CE=DE$。

另一种有趣的解法，可以象图 1-11 一样添加辅助线，然后证明：$\triangle ACE \cong \triangle A'DE$。其详细的证明过程留给读者自己完成。

作为对称变换的例子，最后我们证明著名的“蝴蝶定理”．

例 8　在圆 O 中，过弦 BC 的中点 A 任意作两条弦PQ、RS（图1-12），其中 SQ、PR 分别与 BC 交于M、N两点。求证：$AM=AN$。

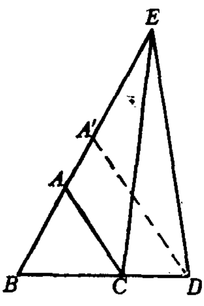

图1-11

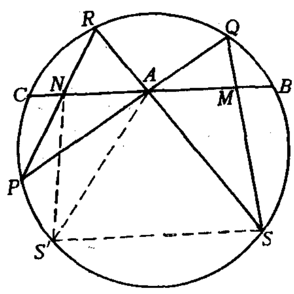

图1-12

分析：A点是弦BC的中点，又应该是线段MN的中点。所以线段AM和AN应该关于直线OA对称。可以试着作S关于OA的对称点S'。设法证明：$\triangle SAM \cong \triangle S'AN$。

证明 过S作$SS' /\!/ BC$与圆O交于S'.连结NS'、PS'及AS'.

不难发现$\triangle ASS'$是一个轴对称图形（过A点与SS'垂直的直线是对称轴）.所以

$$\angle ASS' = \angle AS'S$$

$$= \angle CAS'$$

$$\because \quad \angle RPS' + \angle ASS' = 180°,$$

$$\therefore \quad \angle RPS' + \angle CAS' = 180°.$$

因此A, S', P, N四点共圆，所以

$$\angle APN = \angle AS'N,$$

而 $\angle AS'N = \angle ASM$,

$$\therefore \quad \angle APN = \angle ASM,$$

$$\angle NAS' = \angle MAS,$$

$$AS' = AS,$$

$$\therefore \quad \triangle AS'N \cong \triangle ASM.$$

故 $AN = AM$。

对称变换是我们所学的第一个几何变换，也是最基础的一个几何变换。从后几节的讨论上看，平移变换及旋转变换问题都可通过几次对称变换来认识。

练　习　一

1. 已知在$\triangle ABC$中，AD是$\angle BAC$的平分线。

   若$AB = AC + CD$，试证：

$\angle C = 2\angle B$.

2. 已知在$\triangle ABC$中，AD平分$\angle BAC$，$AD=AB$，$CM\perp AD$于M(图1-13)。求证：

$$AM=\frac{1}{2}(AB+AC).$$

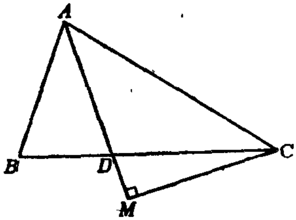

图1-13

§2 平 移 变 换

把图形F上的所有的点都按一定方向移动一定距离d形成图形F'，则由F到F'的变换叫作平移变换(图1-14)，简称平移。

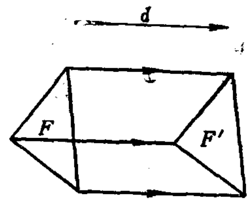

图1-14

一般地，题设条件中有彼此平行的线段，或有造成平行的因素，又需要将有关线段与角相对集中时可以采用平移变换。因为应用平移变换可以把角在保持大小不变，角的两边方向不变的情况下移动位置，也可以使线段在保持平行且相等的条件下移动位置，从而达到条件相对集中，而使图形中诸元素之间的联系变得明显。作平移变换常使用如下两个定理。

定理 1 如果一个角的两边分别平行于另一个角的两