高等几何講义

数学系几何教研室

东北师范大学

高等几何讲义

张永顺　金成相
孙传林　刘孟飞

1982年

高等几何讲义

数学系几何教研室

东北师范大学印刷厂印刷

内部发行·L·82007

再版：5,250册 工本费：1.80元

1982年7月

目　　录

第一编　几 何 学 原 理

翻开中学几何教科书或其它逻辑结构更加严密的初等几何教程，就会看到开头总是先提出一些不加定义的原始概念，例如原始对象"点"、"直线"、"平面"，以及它们之间的原始关系，如"点在直线上""点在…之间""线段叠合"……等等；其次就是定义；再次就是作为该几何学基础的一系列公理；再其次就是推导出来的一连串按着逻辑次序排列的定理，而每一定理是根据它前面的定义、公理、定理经过逻辑证明后而成立．这一连串按着严格逻辑原则和关系排列起来的概念（定义）、公理和定理就形成了一门有系统的几何学．这种**从少数公理出发，遵循严格的逻辑原则建立几何学演绎体系的方法，称为演绎法或公理法**．公元前三世纪，希腊著名的几何学家欧几里得的名著《几何原本》就是用不严格的公理方法建立的演绎体系，开创了一个光辉的先例．从此这一方法得到了重视，并掀起了研究它的热潮，经过了两千多年，直到十九世纪末，德国数学家希尔伯特在前人大量工作的基础上写出了名著《几何基础》一书，用近代的完善的公理方法建立了欧几里得几何学，使公理法成为整理和建立几何学的演绎体系的重要原理和方法，而且很快渗透到其它学科中去．

本编所要讲述的几何学原理主要是讲几何学演绎法（公理法）将从它的发展历史、它的原理，遵循的逻辑原则和具体运用以及意义和作用等各方面来阐明，以期达到对公理法有一个较全面的认识．同时通过第三章欧几里得几何学和罗巴切夫斯基几何学的建立，了解两种几何的基本内容，逻辑结构和相关性，一方面对初等几何有一个彻底的全面的认识，另一方面又能接触到一些新知识；并为下一编的学习打好基础．

第一章　几何学的公理方法概述

§1．几何学的发展与公理方法

从少数公理出发，遵循严格的逻辑原则，建立几何学演绎体系（逻辑结构）的方法，称为演绎法或公理法．

公理法是研究几何学的方法之一，它是随着几何学的发展而产生和形成的．

恩格斯指出："科学的发生和发展一开始就是由生产决定的．"（《自然辩证法》人民出版社1971年版，第162页）这个产生和发展的过程总是经过经验材料的积累和加

工整理，逐步地形成为一门科学．几何学和其它科学一样，是在劳动人民认识自然、改造自然的生产实践中；产生和发展起来的．

几何学产生于上古时期，人们在生产的实践中不断地积累了几何知识，并随着生活、生产的发展和需要丰富起来．恩格斯指出："经验自然科学积累了如此庞大数量的实证的知识材料，以致在每一个研究领域中有系统地和依据材料的内在联系把这些材料加以整理的必要，就简直成为无可避免的．建立各个知识领域互相间的正确联系，也同样成为无可避免的．因此，自然科学便走进了理论的领域，而在这里经验的方法就不中用了，在这里只有理论的思维才能有所帮助"．（《自然辩证法》第27页）这种理性的思维，"必须经过思考作用，将丰富的感觉材料加以去粗取精、去伪存真、由此及彼、由表及里的改造制作工夫，造成概念和理论的系统．"（《实践论》见《毛泽东选集》第一卷，第268页）

用什么方法才能将大量零散的感性的几何知识，经过去粗取精、去伪存真、由此及彼、由表及里的改造制作工夫，造成概念和理论的系统呢？几何学的公理方法就是在几何学的整理和研究中创造出来的科学方法之一．它在几何学的发展中产生并逐步完善，在将几何学加工整理成为逻辑结构严整的科学体系中起了重要的作用．它是认识论、辩证法和逻辑的统一，它是几何发展的必然产物和重要成果．

为了更好地认识公理方法的产生和形成，让我们首先看一看它的发展的简单历史吧．

1.1 几何学的起源

从历史资料可以看出，有着古老文化的中国、埃及、希腊、巴比伦以及印度都是几何学的重要发源地．

在中国，从出土文物看出，在原始社会中，只有当进入石器时代，从打猎、捕鱼到农牧业，从仅仅采集食物到真正生产的转化时期，人们才对空间形式有些了解，从而在生活和生产实践中逐步形成了图形的概念．如出土的新石器时代的石斧、石鏟，上面凿有整齐的圆形孔；1921年在河南渑池出土的仰韶文化彩陶器（公元前6000年左右），上面画有规则的几何条纹；1954到1957年在西安半坡村由考古发掘的夏代以前的原始部落遗址，有圆形和正方形的房屋基地；从殷墟掘得的车轴其饰物有五边形递至九边形；《史记》中也记载了夏禹治水的时候，"左准绳，右规矩"进行测绘．殷商甲骨文中有"囗"、"田"和"田"等字，这些方块就是田，说明殷商已在土地测量中，将田地分成若干小块．殷商后期制造的钟鼎，不但形状美观，而且画有各种几何图案．这些事实说明了当时劳动人民已经初步形成了一些图形的概念，而且也说明了"形的概念也完全是从外部世界得来的，而不是在头脑中由纯粹的思维产生出来的．"（恩格斯，《反杜林论》第35页）

当农牧业、手工业生产有了新的发展，人们为了解决生产中遇到的测量、建筑、天文等问题时，需要探讨各种图形的性质和它们之间的联系，因而在实践中经过"去粗取精、去伪存真、由此及彼、由表及里"的分析、概括，逐步发现几何图形的规律性．关于最初记载几何知识的资料大部分已经失传了．我国古代较早的天文数学书《周髀算

经》（约写于公元前400年前）记载着劳动人民发现的数学和天文知识，其中许多是涉及几何学方面的．例如书中记载有周公（约公元前1100年人）与商高的问答，商高较详细地讲了有关勾股问题和一些结果．商高说："数学的一种方法是研究一些圆形和方形的，圆形是由方形产生的，方形又是由矩尺（折成直角的曲尺）产生的，而矩又出于乘方和开方的演算．因此在勾股形（直角三角形）中，如果勾（短的直角边）是三，股（另一直角边）是四，则弦（斜边）是五．……．"

商高提出了勾股定理的特例．不仅如此，他还指出了一般的勾股定理，以及用勾股形和勾股定理测量不可到达的对象间距离的一些方法和道理．

《周髀算经》还记载商高稍后，有一位陈子曾用勾股定理和相似图形的比例关系，推算过地球与太阳的距离以及太阳的直径．

在埃及，几何知识也是由于测量土地、土木建筑以及天文等的需要而产生和发展起来的．古代埃及尼罗河经常泛滥，劳动人民为了"计算尼罗河水的涨落期的需要，产生了埃及的天文学"（《资本论》，《马克思恩格斯全集》第23卷，第652页）尼罗河两岸的肥沃土地是埃及人生产粮食的源泉，为了预报洪水到来的日期，防范洪水的危害，发展了天文学，从而也推动了数学。再者，尼罗河每年涨水后需要重新丈量农民土地的边界，更是直接需要几何学知识，从而就产生和发展了几何知识。

记载埃及人数学知识的最早的文件（公元前2000—1700年左右)主要是两批草片文书．一批是现存在莫斯科的草片文书，一批是现存英国博物馆的由英国人兰德（*Henry Rhind*）发现的阿梅斯杂录，其中记载有数学问题和解答．在几何学方面有计算耕地面积、谷仓容积、以及建造金字塔的有关问题．有的计算面积体．积的公式，达到了相当准确的程度．例如："圆的面积等于边长为其直径$\frac{8}{9}$的正方形面积"这一近似公式中，实际上已知圆周率等于3.1605．又如计算以正方形为上下底的棱台的体积公式，用现代的记号表示就是

$$V=\frac{1}{3}h(a^2+ab+b^2)$$

其中a、b是两底的边长，h是棱台的高，这是完全正确的公式．可见埃及的几何学的发展的水平也是相当高的．

在巴比伦，由于底格里斯和幼发拉底两河流域的美索不达米亚平原，土地肥沃，农业发展很快，生产推动了天文学和数学的发展．巴比伦的劳动人民在生产实践中结合天文观测创造了不少几何知识．例如，在较早的一些泥版的文书中曾记载着圆的面积$S=\frac{c^2}{12}$(其中c表示圆周长)这相当于知道了圆周率等于3．而在计算正六边形与其外接圆周长之比时，又进一步采用$3\frac{1}{8}$作为π值．此外把圆分为360度是巴比伦天文学家在公元前最末一个世纪里首创的．

"人的认识，主要地依赖于物质的生产活动，逐渐地了解自然的现象、自然的性质、自然的规律性、人和自然的关系；……"(《实践论》，《毛泽东选集》一卷本第259页）几何学是人们对现实世界空间形式的一种认识，这种认识主要地依赖于劳动人

民的生产活动．而中国、埃及、巴比伦等文明古国，在几何学方面，作出了重大的贡献．

1.2 我国古代几何学的成就

随着几何知识的不断积累，整理工作也在不断地进行．但当着几何的经验材料达到相当庞大并且出现了专门从事几何研究的脑力工作者以后，必然要进入比较集中的和比较全面的整理、加工制造阶段．这个阶段经历了一个较长的历史时期．中国和希腊等国都作了大量的工作，取得突出的成果．

早在欧几里得《几何原本》传到中国以前，我国的劳动人民和科学工作者们就对我国积累的几何知识进行了总结和概括，形成了具有我国独特风格的几何学体系．我国在汉唐以前的数学著作遗留到现在的有所谓“算经十书”，它们是《周髀算经》、《九章算术》、《孙子算经》、《五曹算经》、《夏侯阳算经》、《张丘健算经》、《五经算术》、《数术记遗》、《海岛算经》、《缉古算经》．其中《周髀算经》和《九章算术》《五曹算经》《海岛算经》《缉古算经》中都有许多内容是关于几何方面的．其特点是内容紧密联系生产实际，方法注意到形数统一．算经十书从唐朝开始曾被作为数学教科书，直到宋、元．此外，我国古代还有一些书籍总结了劳动人民创造的几何知识，达到较高的水平，《墨经》就是一例．墨子(约公元前478—392年)，战国时代的著名思想家，出身于下层，自称“贱人”，以他为代表的墨家及后期墨家，研究和探讨了思维的形式和规律，创立了我国古代逻辑学．并结合光学、天文学的实际研究，总结了几何方面的一些原理和方法．在他们著述的《墨经》中有丰富的几何内容，其中不仅有定义、公理、定理，而且有无限大、极限和集合论的思想．例如《墨经》上说：“平，同高也”，指平行的直线或两平面间的距离处处相等；“同长，以正相尽也”指同长的线段可互相叠合；“中，同长也”，指线段中点到两端距离相等；“圜，一中同长也”指圆有一个中心，中心到圆周上的点都等远；“体，分于兼也”，是说个体是全体的一部分；“穷，或有前，不容尺也”，指有限的区间可以从一端用尺子量过另一端，实际上是二百年后的所谓“阿基米德公理”；“尽，莫不然也”，指无穷大的区域无所不包；“纑，间虚也”、“盈，莫不有也”，指空集不含元素，真集一定含有元素．这是集合的思想．(注：上述各命题的解释是否正确，尚待进一步研讨）《墨经》中几何学的一个主要特点是紧密联系实际，例如用几何方法来解决几何光学中的一些重要问题等，而且论述正确，思想深刻，逻辑性强，在这方面也不亚于以后的欧几里得《几何原本》．

我国古代，对面积和体积的研究有着光辉的成就．在《九章算术》、《孙子算经》、《张丘健算经》、《五曹算经》、《夏侯阳算经》中都有记载．

《九章算术》(约写于纪元前400年)，系统地总结了我国上古至先秦两汉时代劳动人民在生产实践中积累起来的数学知识．其中第一章“方田”主要是关于圆田面积的计算；第五章“商功”是与各种土建工程容器测量等有关的体积的计算；提出了各种面积和体积的计算公式．如方田、直田（矩形）、圭田（三角形）斜田或箕田（梯形）圆田（圆)、弧田（弓形）、环田等面积公式；堡壔（正方体）、方窖、仓（长方体）、城、垣、堤、沟、堑、渠（长方台)，方亭（棱台)、鳖臑（三棱锥），圆堡壔（圆柱）、圆

亭（圆台）、委粟（圆锥）、立圆、丸（球）等体积公式．其中正方形、长方形、三角形、梯形、圆等面积公式，以及棱柱、棱锥、棱台、圆柱、圆锥、圆台等体积公式都和现在的一样，是正确的公式．有些近似公式也达到了一定的准确程度．例如：

弓形（弧田）$S=\frac{bc+b^2}{2}$（b是高，c是底边长）

球（立圆）$V=\frac{9}{16}D^3$（D为直径）．等等，但是这些公式都没有证明．后来在对上述算经的注释中（如“九章算术注”等）采用了分、合、移、补等方法，证明了这些面积和体积公式．

三国时期的刘徽第一次系统地用极限的观念来研究面积．他在“九章算术注”中给出求圆和弓形面积的正确方法．他用圆内接正多边形的极限来定义圆的面积，并得出圆面积的准确公式．他说道：“割之弥细，所失弥少，割之又割，以至于不可割，则与圆周合体而无所失矣”．刘徽还采用公理来证明了《九章算术》中的某些面积公式，如三角形、梯形等等．他所采用的公理有：“以盈补虚”，相当于现在的分解、补充等积；“矩形面积等于长乘宽之积”；“各部分之和等于全体”等．

祖冲之（公元429—500年）的儿子祖暅，和他父亲一样，也是一位博学多才的科学家．他在总结前人经验的基础上，应用体积的一般原理：“幂势既同则积不容异”，“幂”指的是截面面积，“势”指的是高，意思是说：“等高处的截面面积若总相等的两个立体，则体积相等”．这就是现在中学教材中所提出的祖暅原理．祖暅利用了这一原理正确地得出了球体积公式．意大利人卡瓦列利（*Cavalieri*，约公元1598—1647年）后来也发现了这一原理，所以国外都叫卡瓦列利原理，但他的发现比祖暅晚了大约1000年．这个原理实际上已经有了积分的思想．祖暅原理现在被国内外中学几何教科书用来作为解决体积理论的基础．到公元七世纪，唐朝的数学著作《缉古算经》中，又进一步应用代数的高次方程来解决体积的问题，巧妙地解决了不规则形状的台、堤、河道的体积．

南宋的秦九韶著有《数书九章》（1247年），其中有不少几何方面的内容，他发明的“三斜求积术”，就是已知三角形的三边计算三角形面积公式，是很了不起的发现．他的公式用现代符号可以表示成：

$$S=\sqrt{\frac{1}{4}\left[c^2a^2-\left(\frac{c^2+a^2-b^2}{2}\right)^2\right]}$$

其中a、b、c是三角形的三个边长．这个公式经化简后可以写成为：

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

其中$p=\frac{1}{2}(a+b+c)$，这个公式在国外称为海伦公式，他比秦氏的发现略早些．

关于圆周率的研究，我国古代数学家有过重大的贡献．据《周髀算经》记载，早在三千多年前我国劳动人民就发现“周三径一”，即$\pi=3$．

西汉末年（约公元前50—23年）刘歆得出$\pi\approx3.1547$．

三国时，魏人刘徽（公元263年）创造了"割圆术"，就是用圆的内接正六边形，使它的边数倍增的方法，求得圆周率$\pi=3.14$（或为$\frac{157}{50}$）．他给出了求圆周率的正确理论．

南北朝的祖冲之（约公元429—500年）应用割圆术方法已经得出圆周率精确到$3.1415926<\pi<3.1415927$，并求出圆周率的近似分数：约率$\pi=\frac{22}{7}$，密率$\pi=\frac{355}{113}$．这种精确程度是世界上首创的，比德国鄂图（*Otto*）于公元1573年得出同样数值早一千多年．

关于勾股形的研究，我国早在《周髀算经》里就有许多记载，并且得出了勾股定理．关于勾股定理的证明和应用，我国各朝代都有不同的研究，其证明不下几十种．

汉人赵君卿（年代不详）最早在注周髀算经时，对于勾股定理附了一个"勾股方圆图注"把勾股定理概括为"勾股各自乘，并之为弦实，开方除之即弦也．"就是说：如果令$a=$勾，$b=$股，$c=$弦，则$a^2+b^2=c^2$，再开方就得弦为$c=\sqrt{a^2+b^2}$．赵君卿并通过弦图（图1.1）证明了勾股定理．其方法是通过面积的分割移补构成弦图．然后他说："以勾股相乘为朱实二，倍之为朱实四，以勾股之差自乘为中黄实，加差实即成弦实．"用公式表示，即为

$$2ab+(b-a)^2=c^2,$$

变形后为

$$a^2+b^2=c^2.$$

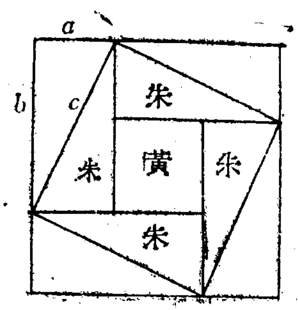

图 1.1

刘徽也曾用类似的方法给出不同的证明．

以上仅举出一些有代表性的文献和几个重要方面的成果，简要介绍我国古代在几何方面的伟大成就．我国古代的几何成就是举不胜举的．至于欧氏《几何原本》一书，只是到了公元1607年才由明朝的徐光启译成中文（前六卷）开始流传于我国．由此可见，早在欧几里得《几何原本》传入中国以前，我国已形成了自己的内容极为丰富、理论联系实际、形数统一的几何理论、方法，具有自己的独特风格的体系．而这一体系的全貌还有待于发掘清理，使它大放异彩．毛泽东同志曾批评有些人"言必称希腊，对于自己的祖宗，则对不住，忘记了．"（《改造我们的学习》，见《毛泽东选集》三卷本第755页）我国几何学的历史事实充分说明了祖国劳动人民的智慧和对人类的伟大贡献．

1.3 欧几里得《几何原本》

在古希腊，劳动人民同样在生产实践中积累了几何知识，特别是由于商业贸易的需要，推动交通航海事业的发展，扩大了埃及、巴比伦和希腊的文化交流．到了公元前七世纪，埃及和巴比伦的几何知识传到希腊，被应用于实践．那时希腊的社会，生产有了很大发展，农业、手工业、商业、土木建筑和交通航海等迅速发展起来，因而推动了天文学、力学和几何学的发展．希腊几何学的发展，进入了一个新的时期，这时对已有的庞大的几何知识进行整理、概括和系统化，简直成为无可避免的，希腊的许多自然科学工

作者参预了这一工作.

泰勒斯（*Thales*公元前639—548年）被称为希腊的几何学鼻祖，他曾到埃及和巴比伦研究几何学，并在那里应用相似形理论测量了金字塔的高度．他回国后，通过建立学校和学派，大力传播埃及和巴比伦的几何知识．他和他的学生曾总结出半圆的圆周角为直角，三角形合同定理等．著名的唯物主义者德漠克利特（约公元前460—360年）是《原子论》首创者之一，他提出的"几何原子"概念，具有积分思想的萌芽，从这个思想出发，他计算过柱体和锥体的体积.

希腊几何学家毕达哥拉斯（*Pythagoras*，公元前569—500年）和他创立的毕达哥拉斯学派，对几何学概念的定义，定理的逻辑证明等几何学方法进行过探讨．这个学派提出了著名的毕达哥拉斯定理（即勾股定理），但可能没有证明．还总结出关于三角形、平行线、多边形、圆、球等某些定理．特别是知道三角形内角和等于二直角，以及黄金分割的作图，正多面体的定理．他的学生希派苏斯（*Hippasus*）曾研究过不可公度量等理论问题.

随后，在希腊首都雅典出现了著名的柏拉图（*Plato*，公元前427—347年）学派．柏拉图是他那个时代最有学问的人，他虽然不是数学家，但他热心这门科学，特别是几何学．他认为知识有加以演绎整理的需要，是第一个把严密推理法则加以系统化的人，因而他的门人曾按逻辑次序整理了定理．这个学派的著名数学家希波克拉特（*Hippocrates*，公元前五世纪）曾写过一本叫做《几何原本》的教科书，发明了用符号代替点或直线．据说定理按其证明所需要的依据来排先后次序，是他最早实行的．他还研究过新月形面积和历史上有名的三大难题中的"立方倍积"问题和"化圆为方"的问题，引起了后代几何学家的注意．这个学派中贡献最大的数学家欧道克斯（*Eudoxus*，公元前408—355年）第一次用"取尽法"（极限思想）获得柱、锥、球体积的计算方法，系统地研究过比例的理论等等.

被恩格斯称为古希腊"思想家"的亚里士多德（*Aristotle*公元前384—322年），他比较精密地研究过辩证法，并对各个知识领域进行探讨，从中概括了思维的形式和规律，系统地提出形式逻辑的有关理论问题，奠定了逻辑学的初步基础，为几何学提供了逻辑方法．他主张：任何一种严密的科学体系是从一些不能证明的原理开始的．而不证明的原理分成两类，即公理和公设．他还主张几何对象要加以定义，解释它们的特性，而为了定义这些对象，要有一些不能定义的基本对象，加以默认.

公元前三世纪，希腊著名数学家欧几里得（*Euclid*，公元前330—275左右），在泰勒斯、毕达哥拉斯、柏拉图等学派的工作基础上，运用了亚里士多德提供的逻辑方法，对劳动人民创造的丰富几何知识，进一步整理和概括，比较严整地、系统地写出了光辉的著作《几何原本》，是历史上第一本比较完整的数学理论著作．他把几何学建筑在定义、公设、公理等几个最初的假设上，以这些假设为基础，运用逻辑的定义和推理方法导出后面的一切定义和定理，把历史上积累的庞大的分散的几何知识用逻辑的链子编排成为一个比较完整的概念和理论的系统．他示范式地规定了几何证明方法，例如分析法、综合法和归谬法等．《几何原本》是用公理法建立几何系统的雏型，这种方法称为古典公理法.

欧几里得的《几何原本》全书共十三卷，除其中第五、七、八、九、十卷是用几何方法讲述比例和算术理论，其余各卷纯粹讲几何内容．

第一卷包括有关平行线、三角形、平行四边形等定理和证明；第二卷主要是毕达哥拉斯定理的应用；第三卷讨论圆的有关定理；第四卷讨论圆的内接与外切多边形定理；第六卷讨论相似形理论；最后三卷是立体几何．

《几何原本》是用不严格公理法建立的一个逻辑体系．第一卷开始首先提出二十三个定义，前七个定义和最后一个定义是：

（1）点没大小．

（2）线有长度没有宽度．

（3）线的界是点．

（4）直线是同其中各点看齐的线．

（5）面只有长度和宽度．

（6）面的界是线．

（7）平面是与其直线看齐的面．

（23）平行直线是这样的直线，它们在同一平面上，而且往两个方向无限延长后，在两个方向上都不会相交．

接着欧几里得列出五个公设和五个公理．他采用了亚里士多德对公设和公理的区分，把公理看成是适用于一切科学的真理，而公设则只应用于几何．把这些公设和公理当做是一切逻辑证明的依据．

五个公设是：

（1）从任意点到另一点可以作直线．

（2）直线可以无限延长．

（3）以任意点为中心，可用任意长度为半径作圆．

（4）所有直角皆相等．

（5）如果两条直线与第三条直线相交，所构成的同侧内角的和小于两个直角，则这两条直线在这一侧相交．

五个公理是：

（1）等于同一量的量相等．

（2）等量加等量，其和相等．

（3）等量减等量，其差相等．

（4）可叠合的量相等．

（5）全体大于部分．

欧几里得《几何原本》的出现，标志着古代希腊几何学发展到了一个重要历史阶段．它在世界数学史上得到很高评价．

《几何原本》为公理法奠定了基础，成为现代公理法的根源．在《几何原本》问世以后，两千年的长时期中一直被当做是传播几何知识和培养逻辑思维的教材，世界上许多民族都用自己的语言发行了《几何原本》的译本．我国最早的译本是明代徐光启译出的，“几何”这个名词是他第一次使用的．

1.4 欧几里得第五公设问题

欧几里得的《几何原本》虽然已经是比较严密的演绎系统．然而，严格地说来，仍然存在大量的缺点．

首先，《原本》的某些定义，并不能成为正确的数学定义．例如，定义1、2、5、6等不过是对点、线、面等几何对象的直观描述；定义4的意义含混不清，…….因此，它们在以后的论证中不起作用．

其次，《原本》的公设和公理是远不够用的．例如没有顺序、运动、连续等公理．因此，《原本》中对许多命题的论证，不得不借助于直观，或引用一些用它的公设和公理无法证明的事实，这从严格公理方法的标准来看是不允许的．任何一个几何事实，不管是多么直观明显，如果它不包括在公理里，都要加以证明，因为一个直观明显事实，我们判断它常带有主观片面性，它可能是不正确的．例如，从前人们在很长时间里，认为地球是不动的，太阳绕着地球运行，后来才得出与此相反的结论．这一点足以说明直观显然性绝不是建立科学的充分基础．

但是，研究欧几里得《几何原本》的古代学者中，只有少数人注意到上述的缺点，试图对《原本》的定义进行修正，对公理的不足进行补充，大多数人注意的是第五公设问题．原因是：第一，《原本》中前四个公设含义十分简单，具有直观的显然性，而第五公设比较复杂，看来很象一个定理；第二，第五公设在《原本》中应用很晚，欧几里得在前28个命题的证明中，都避免使用它，只在第29命题中才第一次用到．因此，古代许多数学家认为欧几里得第五公设是一条定理，由于他没能证明，才不得不把它列为第五个公设．这样，许多学者就企图用《原本》中其余的公设和公理来证明它，以便消除他们认为是《几何原本》中的这个“污点”．

从欧几里得时代起，直到十九世纪初期，在大约两千年漫长的时间里，许多学者对第五公设曾作出种种证明．其中著名的有蒲罗克鲁（*Proclus*，公元410—475，希腊人），瓦里斯（*Wallis*公元1616—1703，英国人），萨开里（*Saccheri*，公元1667—1733，意大利人），兰伯特(*Lambert*，公元1728—1777，德国人）勒让德(*Legendre*，公元1752—1833，法国人）高斯（*Gauss*，公元1777—1855，德国人），约·鲍耶（*Johan Bolyai*，公元1802—1860，匈牙利人），罗巴切夫斯基（Н.И.Лобачевский，公元1792—1856，俄国人）等．在所有的证明中，尽管都是巧妙的，但仔细分析，他们在证明中所用到的论据，或是不知不觉地利用了直观明显性，或是利用了一个与第五公设等价（见第三章§2，2.7）的命题．因此，所有这些证明，实质上都是无效的．

下面举出几个这种证明的例子．

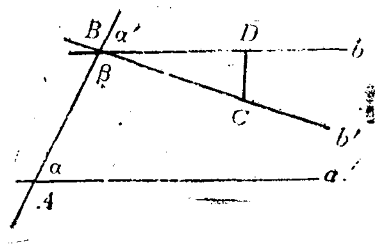

图 1.2

1. 蒲罗克鲁的证明

已知 直线a、b与直线c相交，在直线c的一侧构成内角α、β，且$\alpha+\beta<2d$（d表示直角）

求证 a与b在这一侧相交．

证明 过直线 b 与 c 的交点 B 作直线 b'，使直线 b' 与直线 c 构成的角 α' 等于 α，则直线 b' 与 a 不相交（图1.2）．

因为 $\alpha'+\beta=\alpha+\beta<2d$，所以 b' 与 b 不同，且 b 在 α' 的邻补角内．

在直线 b 上取一点 C，并使 C 在 a、b' 之间．使点 C 沿直线 b 逐渐与点 B 无限远离，则点 C 到直线 b' 的距离 CD 随点 C 远离 B 而连续地无限增大．因为距离 CD 必然要在点 C 的某个位置等于直线 a 与 b' 间的距离，所以直线 a 与 b 相交于点 C 的这个位置．

这个证明在什么地方有漏洞呢？原来是蒲罗克鲁在证明中用到了假定：

如果直线 a 与 b′ 不相交，则它们之间的距离是有限的，并且这个距离处处相等．

而这个命题是与第五公设等价的，不承认第五公设是无法证明的．因此，这个证明是无效的．

2． **勒让德的证明**

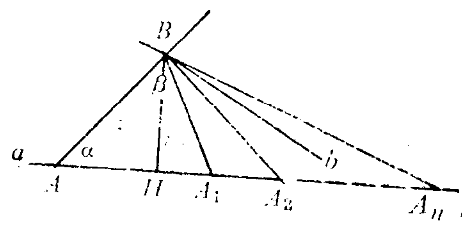

图 1.3

已知条件和求证结论与前例相同．

证明 如图 1.3，从点 B 作直线 a 的垂直线段 BH，得直角 $\triangle AHB$．

因为三角形内角和等于 $2d$，$\alpha+\beta<2d$，所以 $\angle HBb<d$．

从垂足 H 起，沿直线 a 取点 A_1，使 $HA_1=HB$，再取点 A_2，使 $A_1A_2=A_1B$ 等等，如此继续下去，直到取点 A_n，使 $A_{n-1}A_n=A_{n-1}B$．

因为 $\triangle BHA_1$ 是等腰三角形，它的内角和等于 $2d$，所以两底角相等且等于 $\frac{1}{2}d$．又因为 $\triangle BA_1A_2$ 也是等腰三角形，根据三角形外角等于它的不相邻内角和，所以两底角都等于 $\frac{1}{2^2}d$．逐次继续下去，最后的等腰 $\triangle BA_{n-1}A_n$ 的底角等于 $\frac{1}{2^n}d$，由此得到 $\angle HBA_n=d-\frac{1}{2^n}d$．

设 $\angle HBb=d-\varepsilon$，这里 $\varepsilon>0$，如果取充分大的 n，必能使 $\frac{1}{2^n}d<\varepsilon$，于是 $\angle HBb<\angle HBA_n$．这时，直线 b 落在 $\triangle HBA_n$ 的一个角 $\angle HBA_n$ 的内部．因此，b 必与它的第三边 HA_n 相交，也就是直线 a 与 b 相交．

勒让德的证明是根据下面的命题：

三角形的内角和等于二直角．

而这个命题也与第五公设等价，必须当第五公设成立时才能证明．因此，他的证明也是无效的．

3． **萨开里和兰伯特的工作**

萨开里是意大利数学家，他企图用反证法来证明第五公设．