考研辅导丛书

普通高等教育"十五"国家级规划教材配套参考书

数字信号处理学习指导与习题精解

陈后金　薛　健　胡　健

高等教育出版社

普通高等教育"十五"国家级规划教材配套参考书

数字信号处理
学习指导与习题精解

陈后金　薛健　胡健

高等教育出版社

图书在版编目(CIP)数据

数字信号处理学习指导与习题精解 / 陈后金，薛健，胡健. —北京：高等教育出版社,2005.11
ISBN 7-04-017749-8

Ⅰ.数… Ⅱ.①陈…②薛…③胡… Ⅲ.数字信号-信号处理-高等学校-教学参考资料
Ⅳ.TN911.72

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 116711 号

策划编辑 刘激扬 **责任编辑** 曲文利 **封面设计** 李卫青 **责任绘图** 朱 静
版式设计 王 莹 **责任校对** 王效珍 **责任印制** 杨 明

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-58581118
社　　址	北京市西城区德外大街4号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100011	网　　址	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
经　　销	北京蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
印　　刷	国防工业出版社印刷厂		

开　　本	787×960　1/16	版　　次	2005年11月第1版
印　　张	15.25	印　　次	2005年11月第1次印刷
字　　数	280 000	定　　价	19.40元

物料号　17749-00

内容简介

本书是陈后金等编写的《数字信号处理》主教材的配套参考书，是高等教育出版社"高等教育百门精品课程教材建设计划"精品项目的研究成果。主教材是普通高等教育"十五"国家级规划教材，自2004年推出以来，受到读者的欢迎。考虑到这门课程是电气信息专业学生的一门非常重要的专业基础课程，并且是很多专业的考研课程，作者根据自己多年的教学经验编写了这本学习指导，以期提高学生的学习水平。

本书共分9章，具体内容是：离散信号与系统分析基础、离散傅里叶变换、快速傅里叶变换、IIR数字滤波器的设计、FIR数字滤波器的设计、功率谱估计、数字系统的结构、多速率信号处理基础、信号时频分析与小波分析。每章包括基本知识与重要公式、学习要求、重点和难点提示、思考题、习题精解五部分。另外附录收录了北京交通大学2001年至2005年硕士研究生入学考试试题及详解。

本书可供讲授、学习"数字信号处理"课程的师生作为教材配套参考书使用，也可供准备硕士研究生入学考试的学生作为考前辅导书使用。

前　言

“数字信号处理”课程是电气信息类专业重要的技术基础课程，该课程教材按照主教材与辅助教材相结合、理论教材与实验教材相结合、纸质教材与电子教材相结合的思路进行立体化建设。“数字信号处理教材立体化研究与建设”2003年被列入高等教育出版社“高等教育百门精品课程教材建设计划”精品项目，其建设内容包含《数字信号处理》、《数字信号处理学习指导与习题精解》、《信号处理综合设计性实验》、电子教案、网络课件、试题库等。主教材《数字信号处理》是高等教育“十五”国家级规划教材，已于2004年由高等教育出版社出版，该课程的所有纸质教材与电子教材将于近期全部由高等教育出版社出版。

本书作为主教材《数字信号处理》的配套参考书，体系与主教材相对应，共分9章，每章由基本知识与重要公式、学习要求、重点和难点提示、思考题、习题精解5个相互关联的部分组成。基本知识与重要公式突出基本理论、基本概念和基本方法；学习要求给出了需要掌握的知识点；重点和难点提示归纳重点和分析难点；思考题延伸概念和启发思索；习题精解给出了主教材中主要习题的详细解答并有所扩充。另外书中还附有近年来5套硕士研究生入学试题及详解。

本书可作为电子信息工程、通信工程、信息工程、自动控制工程、生物医学工程、计算机等专业学生学习“数字信号课程”课程的参考书或考研的辅导书。

本书由陈后金、薛健、胡健编写，郝晓莉、钱满义提供了部分素材。本书的出版得到了高等教育出版社、北京交通大学教务处和电子信息学院的大力支持，在此深表谢意。

限于水平，书中错误及不妥之处在所难免，恳请读者批评指正。

编者

2005年6月

于北京交通大学

目　　录

第 1 章

离散信号与系统分析基础

1.1 基本知识与重要公式

数字信号处理主要研究如何利用数字方法进行信号分析与系统设计。信号分析涉及离散信号的时域、频域和 z 域分析，离散傅里叶变换及其快速算法，随机信号谱估计，多速率信号处理，信号时频分析；系统设计涉及 IIR 滤波器设计，FIR 滤波器设计，数字滤波器结构，数字滤波器软硬件实现及有限字长效应。本章介绍基本离散信号，信号基本运算，信号抽取与重建，离散信号与系统的时域、频域和 z 域分析等内容，这些内容是数字信号处理的理论基础。

1. 离散时间信号与系统的时域分析

(1) 离散时间信号的时域描述

单位脉冲序列、单位阶跃序列和虚指数序列是离散时间信号与系统分析的基本序列。

单位脉冲序列

$$\delta[k]=\begin{cases}1 & k=0\\ 0 & k\neq 0\end{cases} \tag{1-1}$$

单位阶跃序列

$$u[k]=\begin{cases}1 & k\geqslant 0\\ 0 & k<0\end{cases} \tag{1-2}$$

角频率为 Ω 的虚指数序列

$$x[k]=\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega k},k\in\mathbb{Z} \tag{1-3}$$

如果

$$\frac{|\Omega|}{2\pi} = \frac{m}{N} \tag{1-4}$$

其中 N、m 是不可约的正整数，则虚指数序列的周期为 N。

利用单位脉冲序列，可将任意序列 $x[k]$ 表示为

$$x[k] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\delta[k-n] \tag{1-5}$$

上式表明任意序列都可分解为单位脉冲序列及其位移的线性组合。

两个序列的卷积和定义为

$$y[k] = x_1[k] * x_2[k] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1[n]x_2[k-n] \tag{1-6}$$

序列卷积和具有下列基本性质。

- 交换律 $x_1[k] * x_2[k] = x_2[k] * x_1[k]$
- 结合律 $(x_1[k] * x_2[k]) * x_3[k] = x_1[k] * (x_2[k] * x_3[k])$
- 分配律 $x_1[k] * (x_2[k] + x_3[k]) = x_1[k] * x_2[k] + x_1[k] * x_3[k]$
- 位移特性 若 $x_1[k] * x_2[k] = y[k]$，则 $x_1[k-n] * x_2[k-m] = y[k-(m+n)]$

两个实序列 $x[k]$ 与 $y[k]$ 的互相关运算定义为

$$r_{xy}[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]y[k+n]$$

实序列 $x[k]$ 的自相关运算定义为

$$r_x[n] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[k]x[k+n]$$

序列的相关函数具有下列基本特性：

$$|r_x[n]| \leqslant r_x[0], r_x[n] = r_x[-n], \quad r_{xy}[n] = r_{yx}[-n]$$

(2) 离散时间系统的时域分析

本课程主要讨论线性时不变(Linear Time-Invariant，简称 LTI)系统。线性系统是指满足均匀性与叠加性的系统，即

$$T\{ax_1[k] + bx_2[k]\} = aT\{x_1[k]\} + bT\{x_2[k]\} \tag{1-7}$$

其中 a、b 为任意常数。

时不变系统是指当输入序列延时 n 时，系统的输出也延时 n。即当系统输入序列为 $x[k]$，对应的输出序列为 $y[k]$ 时，则有

$$T\{x[k-n]\} = y[k-n] \tag{1-8}$$

LTI 系统的单位脉冲响应反映离散系统的时域特性，定义为系统在零状态

条件下，由单位脉冲信号 $\delta[k]$ 激励而产生的响应 $h[k]$，即

$$h[k] = T\{\delta[k]\} \tag{1-9}$$

根据 LTI 系统的单位脉冲响应，可以求解离散 LTI 系统的零状态响应，描述系统的因果性和稳定性。

离散 LTI 系统的零状态响应为

$$y[k] = T\{x[k]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]h[k-n] = x[k] * h[k] \tag{1-10}$$

离散 LTI 系统具备因果性的充分必要条件为

$$h[k] = 0, \quad k < 0 \tag{1-11}$$

离散 LTI 系统稳定的充分必要条件为

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| = S < \infty \tag{1-12}$$

2. 离散时间信号与系统的频域分析

（1）周期序列的频域分析

周期为 N 的任意序列 $\tilde{x}[k]$ 可用有限项虚指数信号表示为

$$\tilde{x}[k] = \mathrm{IDFS}\{\tilde{X}[m]\} = \frac{1}{N}\sum_{m=\langle N\rangle} \tilde{X}[m] W_N^{-mk} \tag{1-13}$$

式中 $W_N = \mathrm{e}^{-j\frac{2\pi}{N}}$，$\tilde{X}[m]$ 称为周期序列 $\tilde{x}[k]$ 的 DFS 系数或频谱，频谱 $\tilde{X}[m]$ 可由

$$\tilde{X}[m] = \mathrm{DFS}\{\tilde{x}[k]\} = \sum_{k=\langle N\rangle} \tilde{x}[k] W_N^{mk} \tag{1-14}$$

确定。周期序列的频谱 $\tilde{X}[m]$ 也是一个周期为 N 的序列。

DFS 的性质

若 $\mathrm{DFS}\{\tilde{x}[k]\} = \tilde{X}[m]$，$\mathrm{DFS}\{\tilde{x}_1[k]\} = \tilde{X}_1[m]$，$\mathrm{DFS}\{\tilde{x}_2[k]\} = \tilde{X}_2[m]$，则有

- 线性特性　$\mathrm{DFS}\{a\tilde{x}_1[k] + b\tilde{x}_2[k]\} = a\mathrm{DFS}\{\tilde{x}_1[k]\} + b\mathrm{DFS}\{\tilde{x}_2[k]\}$
- 位移特性　$\mathrm{DFS}\{\tilde{x}[k+n]\} = W_N^{-nm}\tilde{X}[m]$
- 对称特性　$\mathrm{DFS}\{\tilde{x}^*[k]\} = \tilde{X}^*[-m]$，$\mathrm{DFS}\{\tilde{x}^*[-k]\} = \tilde{X}^*[m]$

进一步推导，可得

$$\mathrm{Re}\{\tilde{x}[k]\} \xleftrightarrow{\mathrm{DFS}} \tilde{X}_e[m] = \frac{1}{2}(\tilde{X}[m] + \tilde{X}^*[-m])$$

$$\mathrm{jIm}\{\tilde{x}[k]\} \xleftrightarrow{\mathrm{DFS}} \tilde{X}_o[m] = \frac{1}{2}(\tilde{X}[m] - \tilde{X}^*[-m])$$

$$\tilde{x}_e[k] = \frac{1}{2}(\tilde{x}[k] + \tilde{x}^*[-k]) \xleftrightarrow{\mathrm{DFS}} \mathrm{Re}\{\tilde{X}[m]\}$$

$$\tilde{x}_o[k] = \frac{1}{2}(\tilde{x}[k] - \tilde{x}^*[-k]) \xleftrightarrow{\mathrm{DFS}} \mathrm{jIm}\{\tilde{X}[m]\}$$

若$\tilde{x}[k]$为实周期序列，则有

$$\tilde{X}[m] = \tilde{X}^*[-m]$$

上式也可等价地写为

$$\mathrm{Re}\{\tilde{X}[m]\} = \mathrm{Re}\{\tilde{X}[-m]\},\quad \mathrm{Im}\{\tilde{X}[m]\} = -\mathrm{Im}\{\tilde{X}[-m]\}$$

即实周期序列$\tilde{x}[k]$的频谱$\tilde{X}[m]$的实部为偶函数，虚部为奇函数。也可等价地写为

$$|\tilde{X}[m]| = |\tilde{X}[-m]|,\quad \arg\{\tilde{X}[m]\} = -\arg\{\tilde{X}[-m]\}$$

即实周期序列$\tilde{x}[k]$的频谱$\tilde{X}[m]$的幅度谱为偶函数，相位谱为奇函数。

- 周期卷积特性　$\mathrm{DFS}\{x_1[k] \tilde{*} x_2[k]\} = \mathrm{DFS}\{\tilde{x}_1[k]\}\mathrm{DFS}\{\tilde{x}_2[k]\}$
- 对偶特性　$\mathrm{DFS}\{\tilde{X}[k]\} = N\tilde{x}[-m]$
- Parseval 等式　$\sum_{k=\langle N\rangle} |\tilde{x}[k]|^2 = \frac{1}{N}\sum_{m=\langle N\rangle} |\tilde{X}[m]|^2$

(2) 非周期序列的频域分析

序列 $x[k]$ 的离散时间 Fourier 变换(Discrete Time Fourier Transform，简称DTFT)定义为

$$X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\Omega k} \tag{1-15}$$

$X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega})$称为非周期序列 $x[k]$ 的频谱或 DTFT。序列频谱 $X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega})$ 是一个周期为 2π 的连续函数。有许多序列不存在 DTFT。

频谱 $X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega})$ 的 IDTFT 定义为

$$x[k] = \frac{1}{2\pi}\int_{\langle 2\pi\rangle} X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega})\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega k}\mathrm{d}\Omega \tag{1-16}$$

上式表示存在 DTFT 的非周期序列 $x[k]$ 可表示为频率 Ω 在 2π 区间范围内、幅度为$X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega})\mathrm{d}\Omega/2\pi$ 的虚指数信号 $\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega k}$的线性组合。

DTFT 的性质

若 $x[k]\xleftrightarrow{\text{DTFT}}X(e^{j\Omega})$，$x_1[k]\xleftrightarrow{\text{DTFT}}X_1(e^{j\Omega})$，$x_2[k]\xleftrightarrow{\text{DTFT}}X_2(e^{j\Omega})$，则有

- 线性特性 $ax_1[k]+bx_2[k]\xleftrightarrow{\text{DTFT}}aX_1(e^{j\Omega})+bX_2(e^{j\Omega})$
- 时移特性 $x[k+n]\xleftrightarrow{\text{DTFT}}e^{jn\Omega}X(e^{j\Omega})$
- 频移特性 $e^{jk\Omega_0}x[k]\xleftrightarrow{\text{DTFT}}X(e^{j(\Omega-\Omega_0)})$
- 对称特性 $x^*[k]\xleftrightarrow{\text{DTFT}}X^*(e^{-j\Omega})$， $x^*[-k]\xleftrightarrow{\text{DTFT}}X^*(e^{j\Omega})$

进一步推导，可得

$$\mathrm{Re}\{x[k]\}\xleftrightarrow{\text{DTFT}}X_e(e^{j\Omega})=\frac{1}{2}[X(e^{j\Omega})+X^*(e^{-j\Omega})]$$

$$j\mathrm{Im}\{x[k]\}\xleftrightarrow{\text{DTFT}}X_o(e^{j\Omega})=\frac{1}{2}[X(e^{j\Omega})-X^*(e^{-j\Omega})]$$

$$x_e[k]=\frac{1}{2}(x[k]+x^*[-k])\xleftrightarrow{\text{DTFT}}\mathrm{Re}\{X(e^{j\Omega})\}$$

$$x_o[k]=\frac{1}{2}(x[k]-x^*[-k])\xleftrightarrow{\text{DTFT}}j\mathrm{Im}\{X(e^{j\Omega})\}$$

若 $x[k]$ 为实序列，则存在 $X(e^{j\Omega})=X^*(e^{-j\Omega})$
上式可等价写为

$$\mathrm{Re}\{X(e^{j\Omega})\}=\mathrm{Re}\{X(e^{-j\Omega})\},\quad \mathrm{Im}\{X(e^{j\Omega})\}=-\mathrm{Im}\{X(e^{-j\Omega})\}$$

即实序列 $x[k]$ 的频谱 $X(e^{j\Omega})$ 的实部为偶函数，虚部为奇函数。也可等价地写为

$$|X(e^{j\Omega})|=|X(e^{-j\Omega})|,\quad \phi(\Omega)=-\phi(-\Omega)$$

即实序列 $x[k]$ 的频谱 $X(e^{j\Omega})$ 的幅度谱为偶函数，相位谱为奇函数。

- 卷积特性 $x_1[k]*x_2[k]\xleftrightarrow{\text{DTFT}}X_1(e^{j\Omega})X_2(e^{j\Omega})$
- 乘积特性 $x_1[k]x_2[k]\xleftrightarrow{\text{DTFT}}\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{\langle 2\pi\rangle}X_1(e^{j\theta})X_2(e^{j(\Omega-\theta)})\,d\theta$
- 频域微分 $kx[k]\xleftrightarrow{\text{DTFT}}j\dfrac{dX(e^{j\Omega})}{d\Omega}$
- Parseval 等式 $\displaystyle\sum_k|x[k]|^2=\frac{1}{2\pi}\int_{\langle 2\pi\rangle}|X(e^{j\Omega})|^2d\Omega$

(3) 离散系统的频域分析

离散系统的频率响应 $H(e^{j\Omega})$ 定义为

$$H(e^{j\Omega})=\mathrm{DTFT}\{h[k]\}=\sum_{k=-\infty}^{\infty}h[k]e^{-j\Omega k}\tag{1-17}$$

一般情况下，离散系统的频率响应 $H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega})$ 是复值函数，可用幅度和相位表示为

$$H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega}) = |H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega})|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\phi(\Omega)}$$

$|H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega})|$ 称为系统的幅度响应，$\phi(\Omega)$ 称为系统的相位响应。

离散系统的群延迟定义为

$$\tau_{g}(\Omega) = -\frac{\mathrm{d}\phi(\Omega)}{\mathrm{d}\Omega} \qquad (1-18)$$

虚指数信号 $\{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega k}; k \in \mathbb{Z}\}$ 通过 LTI 系统的响应为

$$y[k] = T\{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega k}\} = \mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega k}H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega}) \qquad (1-19)$$

上式表明，虚指数信号通过离散 LTI 系统后信号的频率不变，信号的幅度由系统的频率响应 $H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega})$ 在 Ω 点的幅度值确定。所以 $H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega})$ 表示了系统对不同频率信号的衰减量。

余弦型信号通过系统的响应

$$y[k] = T\{\cos(\Omega k + \theta)\} = A|H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega})|\cos[\Omega k + \phi(\Omega) + \theta] \qquad (1-20)$$

$$y[k] = T\{\sin(\Omega k + \theta)\} = A|H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega})|\sin[\Omega k + \phi(\Omega) + \theta] \qquad (1-21)$$

周期序列通过离散系统的响应

设离散 LTI 系统的输入信号 $\tilde{x}[k]$ 是一个周期为 N 的周期序列，$\tilde{x}[k]$ 的 DFS 系数为 $\tilde{X}[m]$，则系统的输出响应为

$$\tilde{y}[k] = \frac{1}{N}\sum_{m=\langle N\rangle}\tilde{X}[m]H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{2\pi}{N}m})\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{2\pi}{N}mk} \qquad (1-22)$$

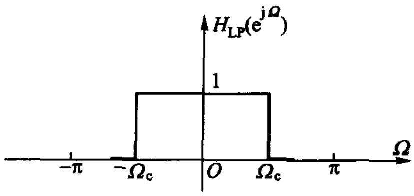
（4）理想数字滤波器

离散 LTI 系统可以实现对离散信号进行滤波，即保留输入信号中的部分有用频率分量，除去一些不需要的频率分量。具有滤波功能的离散系统称为数字滤波器，常用的理想数字滤波器有低通、高通、带通和带阻滤波器。图 1-1 分别画出了四种理想数字滤波器的频率响应。

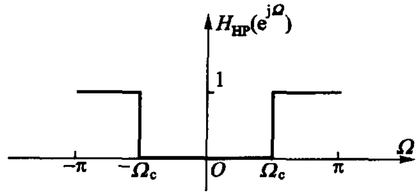
理想低通滤波器的单位脉冲响应为

$$h_{\mathrm{LP}}[k] = \frac{\Omega_{c}}{\pi}\mathrm{Sa}(\Omega_{c}k), \quad -\infty < k < \infty$$

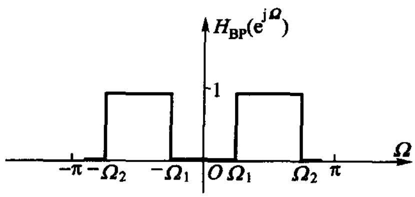
由上式可知理想低通滤波器是非因果系统，故不是物理可实现系统。若在滤波器的通带和阻带间有一个过渡带，且频率响应可在一定范围内波动，则滤波器可实现。滤波器设计是数字信号处理课程的重要内容之一，关于滤波器的设计将在后面详细讨论。



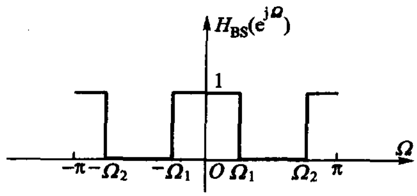
(a) 理想低通



(b) 理想高通



(c) 理想带通



(d) 理想带阻

图 1-1 理想数字滤波器的频率响应

3. 离散时间信号与系统的 z 域分析

(1) 双边 z 变换

序列 $x[k]$ 的双边 z 变换定义为

$$X(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]z^{-k}, \quad R_{x-} < |z| < R_{x+} \tag{1-23}$$

$X(z)$ 的收敛域(ROC)为 $R_{x-} < |z| < R_{x+}$。

若 $X(z)$ 的 ROC 包含单位圆,则序列 $x[k]$ 的 DTFT $X(e^{j\Omega})$ 与 $X(z)$ 的关系为

$$X(e^{j\Omega}) = X(z)\big|_{z=e^{j\Omega}}$$

z 反变换可用围线积分表示为

$$x[k] = \frac{1}{2\pi j}\oint_C X(z)z^{k-1}\mathrm{d}z \tag{1-24}$$

积分路径 C 为 $X(z)$ 的 ROC 中的一条环绕 z 平面原点的逆时针方向的闭合围线。

常用序列的 z 变换如下:

$$\delta[k] \xleftrightarrow{z} 1, \quad |z| \geq 0$$

$$a^k u[k] \xleftrightarrow{z} \frac{1}{1-az^{-1}}, \quad |z| > |a|$$

$$-a^k u[-k-1] \xleftrightarrow{z} \frac{1}{1-az^{-1}}, \quad |z| < |a|$$

$$(k+1)a^k u[k] \xleftrightarrow{z} \frac{1}{(1-az^{-1})^2}, \quad |z| > |a|$$

$$-(k+1)a^k u[-k-1] \xleftrightarrow{z} \frac{1}{(1-az^{-1})^2}, \quad |z| < |a|$$

$$\cos(\Omega_0 k)u[k] \xleftrightarrow{z} \frac{1-z^{-1}\cos\Omega_0}{1-2z^{-1}\cos\Omega_0+z^{-2}}, \quad |z| > 1$$

$$\sin(\Omega_0 k)u[k] \xleftrightarrow{z} \frac{z^{-1}\sin\Omega_0}{1-2z^{-1}\cos\Omega_0+z^{-2}}, \quad |z| > 1$$

(2) z 变换的主要性质

若 $x[k] \xleftrightarrow{z} X(z)$，$\boldsymbol{R}_x=\{z;\ R_{x-}<|z|<R_{x+}\}$；$y[k] \xleftrightarrow{z} Y(z)$，$\boldsymbol{R}_y=\{z;\ R_{y-}<|z|<R_{y+}\}$。则有

- 线性特性 $ax[k]+by[k] \xleftrightarrow{z} aX(z)+bY(z)$，$\mathrm{ROC}=\boldsymbol{R}_x\cap\boldsymbol{R}_y$
- 共轭特性 $x^*[k] \xleftrightarrow{z} X^*(z^*)$，$\mathrm{ROC}=\boldsymbol{R}_x$
- 翻转特性 $x[-k] \xleftrightarrow{z} X\left(\dfrac{1}{z}\right)$，$\dfrac{1}{R_{x+}}<|z|<\dfrac{1}{R_{x-}}$
- 位移特性 $x[k-n] \xleftrightarrow{z} z^{-n}X(z)$，$\mathrm{ROC}=\boldsymbol{R}_x$，除了 $z=0$ 或 $z=\infty$
- 卷积特性 $x[k]*y[k] \xleftrightarrow{z} X(z)Y(z)$，$\mathrm{ROC}=\boldsymbol{R}_x\cap\boldsymbol{R}_y$
- 指数加权特性 $a^k x[k] \xleftrightarrow{z} X\left(\dfrac{z}{a}\right)$，$\mathrm{ROC}=|a|\boldsymbol{R}_x$
- z 域微分特性 $kx[k] \xleftrightarrow{z} -z\dfrac{\mathrm{d}X(z)}{\mathrm{d}z}$，$\mathrm{ROC}=\boldsymbol{R}_x$，除了 $z=0$ 或 $z=\infty$
- Parseval 等式 $\displaystyle\sum_k x[k]y^*[k]=\frac{1}{2\pi\mathrm{j}}\oint_C X(z)Y^*\left(\frac{1}{z^*}\right)z^{-1}\mathrm{d}z$

(3) 部分分式法计算 z 反变换

设有理多项式 $X(z)$ 为

$$X(z)=\frac{B(z)}{A(z)}=\frac{\sum_{l=0}^{M}b_l z^{-l}}{1+\sum_{l=1}^{N}a_l z^{-l}} \tag{1-25}$$

其中 $A(z)$ 和 $B(z)$ 是 z^{-1} 的多项式。如果分母多项式 $A(z)$ 无重根，且 $M\geqslant N$，则式(1-25)可展开为

$$X(z)=\sum_{l=1}^{M-N}k_l z^{-l}+\sum_{l=1}^{N}\frac{r_l}{1-p_l z^{-1}} \tag{1-26}$$

$\{p_l\}$是分母多项式的根。系数$\{k_l\}$可由多项式的长除法确定。系数 r_l 为

$$r_l = (1 - p_l z^{-1})X(z)\big|_{z=p_l} \tag{1-27}$$

根据展开的部分分式,即可确定序列 $x[k]$。

(4) 离散系统的 z 域分析

系统函数 $H(z)$

系统函数 $H(z)$定义为系统单位脉冲响应 $h[k]$的 z 变换,即

$$H(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]z^{-k} \tag{1-28}$$

差分方程与 $H(z)$的关系

描述离散时间系统的差分方程为

$$\sum_{n=0}^{N} a_n y[k-n] = \sum_{n=0}^{M} b_n x[k-n]$$

根据差分方程,可得系统函数 $H(z)$为

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{n=0}^{M} b_n z^{-n}}{\sum_{n=0}^{N} a_n z^{-n}} \tag{1-29}$$

$H(z)$与系统稳定性关系

LTI 系统稳定的充分必要条件是 $H(z)$的 ROC 包括单位圆。根据这一结论可以推出,因果 LTI 系统稳定的充分必要条件是 $H(z)$的所有极点都在 z 平面的单位圆内。

FIR 系统的单位脉冲响应为有限长,因此系统稳定。而 IIR 系统的系统函数的极点可能在单位圆外,造成系统不稳定。因此,在设计 IIR 系统时需考虑系统的稳定性问题。

全通滤波器

全通滤波器是指系统的幅度响应恒为 1 或常数的系统。m 阶实系数全通滤波器的系统函数可表示为

$$A_m(z) = \frac{z^{-m}D_m(z^{-1})}{D_m(z)} = \frac{d_m + d_{m-1}z^{-1} + \cdots + d_1 z^{-(m-1)} + z^{-m}}{1 + d_1 z^{-1} + \cdots + d_{m-1}z^{-(m-1)} + d_m z^{-m}} \tag{1-30}$$

m 阶实系数全通滤波器有下列主要性质。

- $|A_m(e^{j\Omega})| = 1$。
- 全通滤波器零点与极点的位置关于单位圆镜像对称,若 p 为极点,则$\dfrac{1}{p^*}$