普通高等教育“十五”国家级规划教材配套参考书

线性代数与空间解析几何学习指导教程

电子科技大学应用数学学院

黄廷祝　余时伟　主编

高等教育出版社

普通高等教育“十五”国家级规划教材配套参考书

线性代数与空间解析几何
学习指导教程

电子科技大学应用数学学院
黄廷祝　余时伟　主编

高等教育出版社

内容提要

本书是电子科技大学国家工科数学课程教学基地组织编写的工科数学系列参考书之一，是根据教育部《关于高等工业学校线性代数课程的教学基本要求》和《全国工学硕士研究生入学考试数学考试大纲》编写而成，并与“十五”国家级规划教材、国家级精品课程《线性代数与空间解析几何》(第二版)(黄廷祝、成孝予编，高等教育出版社出版)相配套。本书共分七章，每章内容分为五部分：基本要求、基本内容、典型例题分析、练习题、单元检测题。

本书内容全面，例题典型，融入了编者多年的教学经验，对问题分析透彻，深入浅出，叙述清晰，便于自学，可作为高等工科院校大学生结合线性代数与空间解析几何课程学习、复习或参加研究生入学考试的参考资料，也可以作为成人高等教育和高等教育自学考试等各类学生学习“线性代数与空间解析几何”课程的参考书，以及有关教师的教学参考书。

图书在版编目(CIP)数据

线性代数与空间解析几何学习指导教程/黄廷祝，余时伟主编.—北京：高等教育出版社，2005.6

ISBN 7-04-016701-8

Ⅰ.线... Ⅱ.①黄...②余... Ⅲ.①线性代数-高等学校-教学参考资料②空间几何：解析几何-高等学校-教学参考资料 Ⅳ.①O151.2②O182.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 046528 号

策划编辑 马　丽　**责任编辑** 董达英　**封面设计** 于文燕　**责任绘图** 尹文军
版式设计 王艳红　**责任校对** 杨凤玲　**责任印制** 孔　源

出版发行	高等教育出版社	**购书热线**	010-58581118
社　　址	北京市西城区德外大街4号	**免费咨询**	800-810-0598
邮政编码	100011	**网　　址**	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
经　　销	北京蓝色畅想图书发行有限公司	**网上订购**	http://www.landraco.com
印	成印刷有限公司		http://www.landraco.com.cn
	0　1/16	**版　　次**	2005年6月第1版
		印　　次	2005年6月第1次印刷
		定　　价	17.00元

脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换。

前　言

《线性代数与空间解析几何学习指导教程》是电子科技大学国家工科数学课程教学基地组织编写的工科数学系列参考书之一。本书是根据教育部颁发的《关于高等工业学校线性代数课程的教学基本要求》，参考工科硕士研究生入学考试大纲，并在我校《线性代数与空间解析几何同步学习指导》的基础上编写而成。其编写指导思想是，帮助大学生在学习线性代数与空间解析几何课程时，进一步深入理解基本概念，掌握基本理论和基本方法，提高分析问题和解决问题的能力。

本书的特色是，紧扣教学大纲，突出重点，加强基础，重视综合，启迪思维，注重应用，体现线性代数与空间解析几何的有机结合。本书共分七章，每章内容分为五部分：基本要求、基本内容、典型例题分析(包括填空题、选择题、计算题、证明题)、练习题、单元检测题。其中练习题和单元检测题附有提示和参考答案。基本要求部分阐述了教学大纲对该章的学习要求，基本内容部分概括了该章的学习要点、重点和难点。典型例题分析部分是本书的主要内容，例题编排由浅入深，许多例题都配有分析、解答和评注，部分例题提供了多种解法，使读者能够更加深入地理解相关概念、性质和定理，举一反三、触类旁通，具有事半功倍的效果。希望读者在理解基本内容的基础上，通过深入体会典型例题的分析与求解，逐步掌握解决问题的思想与方法，然后完成本书提供的该章练习题，最后再完成该章的单元检测题，从而达到巩固基础、掌握知识、提高能力的目的。

本书内容全面、例题典型，融入了编者多年的教学经验，并与“十五”国家级规划教材、国家级精品课程《线性代数与空间解析几何》(第二版)(黄廷祝、成孝予编,高等教育出版社出版)相配套。本书对问题分析透彻，深入浅出，叙述清晰，便于自学，是大学生学习线性代数与空间解析几何的得力助手，同时还是一本难得的全面系统的研究生入学考试辅导书，也可以作为成人高等教育和高等教育自学考试等各类学生学习线性代数与空间解析几何课程的参考书，以及工科数学教师的教学参考书。

本书由黄廷祝、余时伟主编。各章编写者分别是：何军华(第一章)，王转德(第二章)，李卷澜(第三章)，余时伟(第四章、第六章和检测题)，杨传胜(第五章和第七章)，谢云荪和刘金水老师对书稿进行了全面仔细的审阅，提出了

宝贵的意见，傅英定老师对本书给予了很大的帮助，在此一并深表感谢。

由于编者水平有限，疏漏之处在所难免，敬请同行和广大读者不吝批评指正。

编者

2005 年 1 月于成都

目 录

第一章　矩阵及其初等变换

一、基本要求

1. 理解矩阵的概念，掌握单位矩阵、对角矩阵、对称矩阵、反对称矩阵的概念及其性质.

2. 熟练掌握矩阵的线性运算、乘法运算、转置运算及各种运算规律.

3. 熟练掌握矩阵的初等变换，理解初等矩阵.

4. 理解逆矩阵的概念，熟练掌握逆矩阵的性质，掌握用初等变换求逆矩阵的方法.

5. 了解分块矩阵，掌握分块矩阵的运算.

二、基本内容

1. 矩阵的定义

由 mn 个数排成 m 行 n 列的矩形数表

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

称为 m 行 n 列的矩阵，简称为 $m\times n$ 矩阵，记为 $A=(a_{ij})_{m\times n}$，其中 $a_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$表示第 i 行第 j 列的元，i 称为 a_{ij}的行指标，j 称为 a_{ij} 的列指标.

2. 矩阵的线性运算

设

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad 与 \quad B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

是两个 $m \times n$ 矩阵，k 为一个数，规定矩阵的线性运算(加法与数乘)为

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix},$$

$$k\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \cdots & ka_{mn} \end{pmatrix}.$$

注 两个矩阵 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$，$\boldsymbol{B}_{r\times s}$可以相加减$\Leftrightarrow m=r$，$n=s$，此时也称矩阵 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 同型.

当 $k\neq 0$ 时，$k\boldsymbol{I}$ 称为数量矩阵，其中 $\boldsymbol{I}$ 是单位矩阵.

3. 线性运算的性质

(1) 加法交换律　　$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$.

(2) 加法结合律　　$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})$.

(3) 零矩阵　　$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{O}=\boldsymbol{O}+\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}$.

(4) 负矩阵　　$\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{A})=\boldsymbol{O}$,

其中
$$-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} -a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & -a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{m1} & -a_{m2} & \cdots & -a_{mn} \end{pmatrix}.$$

(5)　　$1\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}$.

(6) 乘法结合律　　$k(l\boldsymbol{A})=(kl)\boldsymbol{A}$.

(7) 分配律 1　　$k(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=k\boldsymbol{A}+k\boldsymbol{B}$.

(8) 分配律 2　　$(k+l)\boldsymbol{A}=k\boldsymbol{A}+l\boldsymbol{A}$,

在上述线性运算的 8 条性质中，$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{C}$ 均为 $m\times n$ 矩阵，k，l 为数，$\boldsymbol{O}$ 为 $m\times n$ 阶零矩阵. 由这 8 条性质还可推出如下结果：

(1) $(-1)\boldsymbol{A}=-\boldsymbol{A}$.

(2) $0\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$.

(3) $k\boldsymbol{O}=\boldsymbol{O}$.

(4) 减法的定义　$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{B})$.

4. 矩阵的乘法及其性质

(1) 矩阵乘法的定义　设

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1s} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{ns} \end{pmatrix},$$

则由元

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{in}b_{nj} \quad (i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,s)$$

组成的 $m\times s$ 矩阵

$$C=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1s} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{ms} \end{pmatrix}$$

称为矩阵 A 与 B 的乘积，记为 $AB=C$.

注 $C_{m\times s}=A_{m\times n}B_{n\times s}$的确定原则：

1）当 A 的列数等于 B 的行数时，$C=AB$ 才有意义；

2）C 的行数等于 A 的行数，C 的列数等于 B 的列数；

3）C 的第 i 行第 j 列的元是 A 的第 i 行元与 B 的第 j 列元的对应乘积之和.

（2）矩阵乘法的性质

结合律　$A(BC)=(AB)C$，$k(AB)=(kA)B=A(kB)$.

分配律　$A(B+C)=AB+AC$，$(A+B)C=AC+BC$.

单位矩阵的作用　$I_mA_{m\times n}=A_{m\times n}I_n=A_{m\times n}$，特别地对 n 阶矩阵 A 有 $IA=AI=A$.

注 单位矩阵是对角线上全为 1，其他元均为 0 的方阵，而不是所有元全为 1 的矩阵.

一般说来，乘法交换律不成立，即 $AB\neq BA$；若 $AB=BA$，则称矩阵 A 与 B 可交换.

方阵的幂　设 k 为正整数，A 为方阵，则

$$A^1=A, \quad A^{k+1}=A^kA \quad (k=2,3,\cdots).$$

方阵的幂具有的性质是：$A^mA^k=A^{m+k}$，　$(A^m)^k=A^{mk}$.

方阵的多项式　设

$$f(x)=a_kx^k+a_{k-1}x^{k-1}+\cdots+a_1x+a_0$$

是 x 的 k 次多项式，A 是 n 阶方阵，则称

$$f(A)=a_kA^k+a_{k-1}A^{k-1}+\cdots+a_1A+a_0I$$

是方阵 A 的 k 次多项式.

方阵的多项式满足：设 $f(A)$，$g(A)$都是 A 的多项式，有

$$f(\boldsymbol{A})g(\boldsymbol{A})=g(\boldsymbol{A})f(\boldsymbol{A}).$$

更一般地，虽然矩阵不满足乘法交换律，但是当一个方阵 $\boldsymbol{A}$ 与另一个方阵 $\boldsymbol{B}$ 可以交换相乘时，即 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$ 时，有：

$$f(\boldsymbol{A})g(\boldsymbol{B})=g(\boldsymbol{B})f(\boldsymbol{A}).$$

5. 转置矩阵及其性质

转置矩阵　设

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

将 $\boldsymbol{A}$ 的行、列交换后，所得到的矩阵称为 $\boldsymbol{A}$ 的转置矩阵，记为 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$，即

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

转置矩阵的性质：

(1) $(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$；

(2) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$；

(3) $(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$，一般地，有 $(\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2\cdots\boldsymbol{A}_s)^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}_s^{\mathrm{T}}\cdots\boldsymbol{A}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_1^{\mathrm{T}}$；

(4) $(k\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}}=k\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$.

两种特殊矩阵：

(1) 对称矩阵　　$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$；

(2) 反对称矩阵　　$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=-\boldsymbol{A}$.

6. 矩阵的初等变换

(1) 矩阵中某两行元互换位置；

(2) 用非零的常数乘以矩阵的某一行的全部元；

(3) 矩阵某一行元的 k 倍加到另一行.

以上三种变换都称为矩阵的行初等变换. 将上面(1)、(2)、(3)中的“行”全换成“列”，就是矩阵的列初等变换. 矩阵的行初等变换和列初等变换统称为矩阵的初等变换.

7. 矩阵的等价

设 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 是同型矩阵，若 $\boldsymbol{A}$ 经过有限次初等变换化为 $\boldsymbol{B}$，则称 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 等价，记为 $\boldsymbol{A}\cong\boldsymbol{B}$.

矩阵的等价的性质：

反身性 $\boldsymbol{A} \cong \boldsymbol{A}$;

对称性 $\boldsymbol{A} \cong \boldsymbol{B} \Leftrightarrow \boldsymbol{B} \cong \boldsymbol{A}$;

传递性 $\boldsymbol{A} \cong \boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{B} \cong \boldsymbol{C} \Rightarrow \boldsymbol{A} \cong \boldsymbol{C}$.

8. 线性方程组的求解

$\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{b}$ 称为非齐次线性方程组，$\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{O}$ 称为齐次线性方程组，其中

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{O} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\overline{\boldsymbol{A}} = (\boldsymbol{A}\quad \boldsymbol{b}) \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix} c_{11} & 0 & \cdots & 0 & c_{1,r+1} & \cdots & c_{1n} & d_1 \\ 0 & c_{22} & \cdots & 0 & c_{2,r+1} & \cdots & c_{2n} & d_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & c_{rr} & c_{r,r+1} & \cdots & c_{rn} & d_r \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & d_{r+1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

其中 $c_{ii}(i=1,2,\cdots,r)$不为零。若 $d_{r+1}=0$，则 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 有解，此时当 $r=n$ 时，$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 有唯一解；当 $r<n$ 时，$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 有无穷多组解. 若 $d_{r+1}\neq 0$，则 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 无解.

$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{O}$ 有非零解的充分必要条件是 $r<n$.

9. 初等矩阵

对单位矩阵任作一次初等变换所得到的矩阵就称为初等矩阵，即

$$\boldsymbol{E}_{ij} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & & \\ & & & 0 & & \cdots & & 1 & & \\ & & & & 1 & & & & & \\ & & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \\ & & & & & & 1 & & & \\ & & & 1 & & \cdots & & 0 & & \\ & & & & & & & & 1 & \\ & & & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & & & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \\ (\text{第 } i \text{ 行}) \\ \\ , \\ \\ (\text{第 } j \text{ 行}) \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

$$E_i(c)=\begin{pmatrix}1&&&&&&\\&\ddots&&&&&\\&&1&&&&\\&&&c&&&\\&&&&1&&\\&&&&&\ddots&\\&&&&&&1\end{pmatrix}(\text{第 } i \text{ 行}),$$

$$E_{ij}(c)=\begin{pmatrix}1&&&&&\\&\ddots&&&&\\&&1&&&\\&&\vdots&\ddots&&\\&&c&\cdots&1&\\&&&&&\ddots&\\&&&&&&1\end{pmatrix}\begin{array}{l}\\\\(\text{第 } i \text{ 行})\\ \\(\text{第 } j \text{ 行})\\\\\\\end{array}.$$

初等矩阵在矩阵运算中的作用：

(1) 对矩阵 A 做一次列初等变换(如第 i 列,第 j 列互换)相当于在该矩阵 A 的右边乘以列初等变换(第 i 列,第 j 列互换)对应的初等矩阵 E_{ij}；

(2) 对矩阵 A 做一次行初等变换(如第 i 行的 c 倍加到第 j 行)相当于在该矩阵 A 的左边乘以行初等变换(第 i 行的 c 倍加到第 j 行)对应的初等矩阵 $E_{ij}(c)$；

(3) 对矩阵施行初等变换，相当于在矩阵的两端乘上相应的初等矩阵，这就建立了矩阵初等变换与矩阵乘法之间的联系.

10. 逆矩阵的定义及其性质

逆矩阵的定义：设 A 是 n 阶方阵，如果存在一个 n 阶方阵 B，使

$$AB=BA=I,$$

则称 A 是可逆矩阵，简称 A 可逆，并称 B 是 A 的逆矩阵，记为 $B=A^{-1}$.

逆矩阵的性质：

若以下矩阵的逆矩阵均存在，则成立

(1) $(A^{-1})^{-1}=A$；

(2) $(kA)^{-1}=\frac{1}{k}A^{-1}(k\neq0)$；

(3) $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$，一般地有 $(A_1A_2\cdots A_s)^{-1}=A_s^{-1}\cdots A_2^{-1}A_1^{-1}$；

(4) $(A^{\mathrm{T}})^{-1}=(A^{-1})^{\mathrm{T}}$.

注 n 阶方阵 A 可逆的要求是：A 是方阵且存在方阵 B 使得 $AB=BA=I$. 以后的学习当中可以看到，条件可以削弱为：存在方阵 B 使得 $AB=I$（或

者 $BA=I$)．这就告诉我们，要说明某矩阵 A 可逆，只需说明：A 是方阵，并找出另一个方阵 B 使得 $AB=I$ 或 $BA=I$.

11. 利用初等变换求矩阵 A 的逆矩阵

由于矩阵 A 可逆的充分必要条件是 A 可以经过有限次行初等变换化为单位矩阵，故求 A 的逆矩阵的方法为

$$(A \quad I)\xrightarrow{\text{行初等变换}}(I \quad A^{-1}).$$

12. 分块矩阵

以子矩阵为元的矩阵称为分块矩阵．对分块矩阵做加法、数乘、乘法运算时，与矩阵的加法、数乘、乘法运算对应一致，特别是求块对角矩阵的逆矩阵时，可把它化为求对角线上的子矩阵的逆．

13. 几个等价结论

当 A 为 n 阶方阵时，A 可逆 $\Leftrightarrow AX=O$ 只有零解 $\Leftrightarrow A\cong I\Leftrightarrow A$ 可表示为有限个初等矩阵的乘积．

三、典型例题分析

（一）填空题

例 1　设 A，B 均为三阶矩阵，I 是三阶单位矩阵，已知 $AB=2A+B$，$B=\begin{pmatrix}2&0&2\\0&4&0\\2&0&2\end{pmatrix}$，则 $(A-I)^{-1}=$ ________.

解　$AB=2A+B$

$$\Rightarrow O=AB-2A-B=(A-I)(B-2I)-2I\Rightarrow(A-I)(B-2I)=2I$$

$$\Rightarrow(A-I)^{-1}=\frac{1}{2}(B-2I)=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0&0&2\\0&2&0\\2&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}.$$

例 2　设矩阵 A 满足 $A^2+A-4I=O$，其中 I 为单位矩阵，则 $(A-I)^{-1}$ $=$ ________.

解　$O=A^2+A-4I=(A-I)(A+2I)-2I\Rightarrow(A-I)(A+2I)=2I$，因而 $(A-I)^{-1}=\frac{1}{2}(A+2I)$.

例 3　设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&-1\\2&3\end{pmatrix}$，$B=A^2-3A+2I$，则 $B^{-1}=$ ________.

分析　直接计算则计算量较大，先对 B 进行因式分解可简化计算

解　$B=(A-I)(A-2I)=\begin{pmatrix}0&-1\\2&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&-1\\2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&-1\\2&0\end{pmatrix}$.

简单计算可得：$\boldsymbol{B}^{-1}=\begin{pmatrix}0 & \frac{1}{2}\\ -1 & -1\end{pmatrix}$.

例 4 设 $\boldsymbol{\alpha}$ 为 3 维列向量，$\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$是 $\boldsymbol{\alpha}$ 的转置. 若 $\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ -1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=$ ________ .

解 由 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}1\\ -1\\ 1\end{pmatrix}(1,-1,1)$，知 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=(1,-1,1)\begin{pmatrix}1\\ -1\\ 1\end{pmatrix}=3$.

例 5 设 n 维向量 $\boldsymbol{\alpha}=(a,0,\cdots,0,a)^{\mathrm{T}}$，$a<0$，$\boldsymbol{I}$ 为 n 阶单位矩阵，矩阵

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{I}-\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}},\qquad \boldsymbol{B}=\boldsymbol{I}+\frac{1}{a}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}},$$

其中 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵为 $\boldsymbol{B}$，则 $a=$ ________ .

解

$$\begin{aligned}\boldsymbol{I}=\boldsymbol{AB}&=(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}})\left(\boldsymbol{I}+\frac{1}{a}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\right)\\ &=\boldsymbol{I}-\frac{1}{a}\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha})\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}+\frac{1-a}{a}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\\ &=\boldsymbol{I}-\frac{\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}+a-1}{a}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}.\end{aligned}$$

又 $a<0\Rightarrow\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\neq\boldsymbol{O}$，于是必有 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}+a-1=0$，此即

$$1-a-2a^2=0\Rightarrow a=-1\text{ 或 }\frac{1}{2},$$

但是 $a<0$，因此 $a=-1$.

（二）选择题

例 1 设 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 为同阶可逆阵，则（ ）成立.

（A）$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$ （B）存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{B}$

（C）存在可逆矩阵 $\boldsymbol{C}$，使 $\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AC}=\boldsymbol{B}$ （D）存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，$\boldsymbol{Q}$，使 $\boldsymbol{PAQ}=\boldsymbol{B}$

分析 同阶可逆矩阵等价，因而存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，$\boldsymbol{Q}$，使 $\boldsymbol{PAQ}=\boldsymbol{B}$，因此(D)正确. 由于 $\boldsymbol{P}$，$\boldsymbol{Q}$ 之间没有必然的联系，故(B)，(C)均错误.（事实上，(B)给出的是两矩阵相似的定义，而(C)给出的是两矩阵合同的定义.）同阶可逆矩阵也不满足交换律，故(A)错误.

例 2 设 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{C}$ 满足关系式 $\boldsymbol{ABC}=\boldsymbol{I}$，则（ ）成立.

（A）$\boldsymbol{ACB}=\boldsymbol{I}$ （B）$\boldsymbol{CBA}=\boldsymbol{I}$ （C）$\boldsymbol{BAC}=\boldsymbol{I}$ （D）$\boldsymbol{BCA}=\boldsymbol{I}$

分析 本题考查对方阵可逆的充要条件及结合律的掌握情况.

$$\boldsymbol{ABC}=\boldsymbol{I}\Rightarrow\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})=\boldsymbol{I}\Rightarrow\boldsymbol{A}\text{ 与 }\boldsymbol{BC}\text{ 互逆}\Rightarrow(\boldsymbol{BC})\boldsymbol{A}=\boldsymbol{I},$$

应当选择(D).

例 3 设 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1}$均为 n 阶可逆矩阵，则$(\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1})^{-1}=(\quad)$.

(A) $\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1}$ (B) $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$

(C) $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{B}$ (D) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{-1}$

分析 两个矩阵的求和运算与求逆运算一般是不能交换的，首先应当猜测最可能的答案是(C)，然后逐步检验：

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1})[\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{B}]&=[(\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1})\boldsymbol{A}](\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{B}\\&=(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A})(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{B}.\end{aligned}$$

此时等式看似不可再化简下去，其原因是乘积的中间有$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{-1}$，但是仔细观察，可以发现，从第一个括号中是可以分离出 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 的：

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A})(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{B}&=(\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A})(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{B}\\&=\boldsymbol{B}^{-1}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{I},\end{aligned}$$

因此(C)正确.

此外，若令 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$，则容易发现，除了答案(C)，其他答案均是错误的.

例 4 设 $\boldsymbol{A}$ 是 3 阶方阵，将 $\boldsymbol{A}$ 的第 1 列与第 2 列交换得 $\boldsymbol{B}$，再把 $\boldsymbol{B}$ 的第 2 列加到第 3 列得 $\boldsymbol{C}$，则满足 $\boldsymbol{AQ}=\boldsymbol{C}$ 的可逆矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 为(　　).

(A) $\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\1&0&1\end{pmatrix}$ (B) $\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&0&1\end{pmatrix}$

(C) $\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&1&1\end{pmatrix}$ (D) $\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

分析 对矩阵进行一次初等列变换相当于右乘初等变换对应的初等矩阵(对单位矩阵施行该初等列变换所得到的矩阵).

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{C}=\boldsymbol{B}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}\Rightarrow\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}=\boldsymbol{C}$$

$$\Rightarrow\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix},$$

故应选(D).

例 5 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}a_{13}&a_{12}&a_{11}+a_{12}\\a_{23}&a_{22}&a_{21}+a_{22}\\a_{33}&a_{32}&a_{31}+a_{32}\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{P}_1=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，

$$P_2=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\ P_3=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix},\ \text{则 } B=(\quad).$$

(A) P_2AP_3　(B) AP_1P_3　(C) AP_3P_1　(D) AP_2P_3

分析 矩阵 B 可以视为 A 经由两次列初等变换而得：将 A 的第二列加到第一列得 A_1，然后将 A_1 的第一列，三列互换即可得到 B，对矩阵做一次列初等变换相当于右乘对应的初等矩阵，应选(B).

(三) 计算题

例 1 设

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&2&1\\3&4&3\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}2&1\\5&3\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}1&3\\2&0\\3&1\end{pmatrix}.$$

求矩阵 X，使其满足

$$AXB=C.$$

解 如果 A^{-1}，B^{-1}存在，则由 A^{-1}左乘上式，B^{-1}右乘上式，有

$$A^{-1}AXBB^{-1}=A^{-1}CB^{-1},$$

即

$$X=A^{-1}CB^{-1}.$$

因为

$$(A\quad I)=\begin{pmatrix}1&2&3&1&0&0\\2&2&1&0&1&0\\3&4&3&0&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&3&1&0&0\\0&-2&-5&-2&1&0\\0&-2&-6&-3&0&1\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&0&-2&-1&1&0\\0&-2&-5&-2&1&0\\0&0&-1&-1&-1&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&1&3&-2\\0&-2&0&3&6&-5\\0&0&1&1&1&-1\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&0&0&1&3&-2\\0&1&0&-\frac{3}{2}&-3&\frac{5}{2}\\0&0&1&1&1&-1\end{pmatrix},$$

所以

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}1&3&-2\\-\frac{3}{2}&-3&\frac{5}{2}\\1&1&-1\end{pmatrix}.$$

又因为

$$(B\quad I)=\begin{pmatrix}2&1&1&0\\5&3&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}5&3&0&1\\2&1&1&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&-2&1\\2&1&1&0\end{pmatrix}$$