Jiangsusheng chuzhongshuxuejingsai fudao

江苏省初中数学竞赛辅导

初三分册

3

江苏教育出版社

江苏省初中数学竞赛辅导

（初三分册）

顾　　问：左宗明

主　　编：陈志廉

分册主编：陈兴信

编写人员：（以姓氏笔画为序）

王福礽　　[illegible]嘉禄　　孙振武

陈大勇　　陈兴信　　范子坚

郝志刚　　赵学潢　　徐随保

江苏教育出版社

江苏省初中数学竞赛辅导
(初三分册)
责任编辑　欧阳春　王巧林

出版发行：江　苏　教　育　出　版　社
(南京市马家街 31 号，邮政编码：210009)
网　　址：http://www.edu-publisher.com
经　　销：江　苏　省　新　华　书　店
照　　排：南京展望照排印刷有限公司
印　　刷：海　门　市　印　刷　厂
(海门市解放中路 90 号，邮政编码 226100)

开本 787 × 1092 毫米　1/32　印张　6.5　字数 136600
2000 年 9 月第 1 版　2000 年 10 月第 2 次印刷

ISBN 7—5343—3964—2

G · 3659　定价：6.50 元

前　言

为了充分发挥数学教育的功能，在江苏省各市数学教学专业委员会和教研室的大力支持下，我们组织了全省富有教学、教研经验的教师和教研员，编写了这套《江苏省初中数学竞赛辅导》(包括初中一年级、初中二年级、初中三年级分册).

全书的编写宗旨在于帮助学生打好基础、培养能力、发展智力. 以教学大纲所明确的系统数学知识为载体，在巩固基础知识、优化知识结构的同时，刻意为学生深刻领会、掌握和运用数学思想方法创设良好的情境，使他们具备想数学、用数学的习惯、意识和能力；并提供适当具有趣味性和实用性的数学题，促进学生个性品质的形成和发展.

内容的选取，突出初中数学的教学重点和难点，对精选的问题，重在分析与评注，以便学生领悟其中的思想、观点、方法，并有针对性地为学生提供精选的思考、训练内容.

有关代数和几何的内容，安排顺序与教学基本同步；对于开展数学课外活动，时间也相适应. 使用方便.

牢固的基础和良好的素质，不论对学生升学、竞赛、就业，都将是十分重要的. 本书也正以此追求对大面积学生发展的适应性.

本书可供初中学生和教师在数学课外活动中使用.

本书的编写和出版，得到江苏教育出版社的大力支持. 在

此特致谢意.

由于多种因素的影响,书中疏漏之处在所难免,诚请广大师生提出宝贵的意见和建议,以臻修改、完善.

江苏省教育学会
中学数学教学专业委员会
2000 年 9 月

目　　录

1. 一元二次方程

解一元二次方程的重点是掌握一元二次方程的求根公式.对于字母系数的一元二次方程问题,在解题过程中需加以分析、讨论、判断;对于可化为一元二次方程的某些特殊形式的高次方程,应根据方程的特点,灵活采用换元的方法,以达到降次的目的.

例 1 解方程 $(2-\sqrt{3})x^2-2(\sqrt{3}-1)x-6=0$.

分析 为使 x^2 的系数变简单,方程两边可乘以 $2+\sqrt{3}$.

解 两边乘以 $2+\sqrt{3}$,得

$$x^2-2(1+\sqrt{3})x-6(2+\sqrt{3})=0.$$

$$\begin{aligned}\Delta&=4(1+\sqrt{3})^2+24(2+\sqrt{3})\\&=[4(1+\sqrt{3})]^2>0.\end{aligned}$$

$\therefore\ x=1+\sqrt{3}\pm2(1+\sqrt{3})$,

即方程的根为 $3(1+\sqrt{3})$, $-(1+\sqrt{3})$.

评注 将二次项系数有理化,实际是对利用公式所求的根提前进行了分母有理化.

例 2 解关于 x 的方程

$$a^2(x^2-x+1)-a(x^2-1)=(a^2-1)x.$$

分析 对于含字母系数的方程,主要是针对每个参数允许值就“二次项系数是否为零”、“方程是否无解”、“解的表达是否相异”(或其中某些方面)进行讨论.

解 整理原方程，得

$$(a^2-a)x^2-(2a^2-1)x+(a^2+a)=0.$$

(1) 若 $a^2-a\neq 0$，即 $a\neq 0,1$，则原方程是二次方程.运用因式分解法，得

$$[ax-(a+1)][(a-1)x-a]=0,$$

$$\therefore\quad x_1=\frac{a+1}{a},\ x_2=\frac{a}{a-1}.$$

(2) 若 $a^2-a=0$，即 $a=0,1$，则原方程是一次方程.当 $a=0$ 时，$x=0$；当 $a=1$ 时，$x=2$.

例 3 求方程 $x^2-|2x-1|-4=0$ 的实数根.

分析 关键是根据绝对值的意义去掉绝对值的符号.

解 设 $2x-1=0$，即 $x=\frac{1}{2}$. 以 $\frac{1}{2}$ 为分界点把实数分为两个区间：$x<\frac{1}{2}$ 和 $x\geqslant\frac{1}{2}$.

(1) 若 $x<\frac{1}{2}$，则 $2x-1<0$，原方程化为

$$x^2+2x-5=0,\quad\therefore\quad x=-1-\sqrt{6};$$

(2) 若 $x\geqslant\frac{1}{2}$，则 $2x-1\geqslant 0$，原方程化为

$$x^2-2x-3=0,\quad\therefore\quad x=3.$$

评注 应注意：(1)中解 $x^2+2x-5=0$ 时，舍去了 $x=-1+\sqrt{6}$；(为什么？)(2)中解 $x^2-2x-3=0$ 时，舍去了 $x=-1$.(为什么？)

例 4 解方程 $2x^4-9x^3+14x^2-9x+2=0$.

分析 观察方程各项系数，不难发现与首、末两项等距离的两项系数相同且 $x\neq 0$. 由此，可在方程两边同除以 x^2，然后配方成关于 $\left(x+\frac{1}{x}\right)$ 的一元二次方程，再利用换元法求解.

解 因为 $x \neq 0$，用 x^2 除方程两边，得

$$2x^2 - 9x + 14 - \frac{9}{x} + \frac{2}{x^2} = 0,$$

即 $$2\left(x^2 + \frac{1}{x^2} + 2\right) - 9\left(x + \frac{1}{x}\right) + 10 = 0. \quad ①$$

设 $y = x + \dfrac{1}{x}$，则 $\quad x^2 + \dfrac{1}{x^2} = y^2 - 2. \quad ②$

将②代入①，得 $\quad 2y^2 - 9y + 10 = 0.$

解方程，得 $\quad y_1 = \dfrac{5}{2}, y_2 = 2.$

由 $x + \dfrac{1}{x} = \dfrac{5}{2}$，得 $\quad x_1 = 2, x_2 = \dfrac{1}{2}.$

由 $x + \dfrac{1}{x} = 2$，得 $\quad x_3 = x_4 = 1.$

例 5 已知：三个二次方程

$$ax^2 + bx + c = 0,$$
$$bx^2 + cx + a = 0,$$
$$cx^2 + ax + b = 0 \text{ 有公共根.}$$

求证：$a + b + c = 0.$

证明 设 x_0 为其公共根，则 x_0 满足三个方程. 代入后相加，整理得

$$(a + b + c)(x_0^2 + x_0 + 1) = 0.$$

$\because \quad x_0^2 + x_0 + 1 = \left(x_0 + \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{3}{4} \neq 0,$

$\therefore \quad a + b + c = 0.$

例 6 试求满足方程

$$x^2 - kx - 7 = 0 \quad 与 \quad x^2 - 6x - (k + 1) = 0$$

有公共根的所有 k 值和其所有公共根、所有相异根.

解 设两方程有公共根 x，则两方程消去 x^2 项得

$$(6-k)x+(k+1)-7=0,$$

$$(6-k)x=6-k.$$

故当 $k\neq 6$ 时，$x=1$ 为其公共根．此时，将 $x=1$ 代入一个方程可得 $k=-6$．由于当 $k=-6$ 时，两方程为

$$x^2+6x-7=0,\quad x^2-6x+5=0,$$

因此，它们的公共根为 $x=1$，相异根为 -7 和 5．

当 $k=6$ 时，两方程变为同一方程 $x^2-6x-7=0$．此时，有公共根 $x=7$，-1，而无相异根．

练　习　1

1．若 a、b 都是正实数，且 $\frac{1}{a}-\frac{1}{b}-\frac{1}{a+b}=0$，求 $\frac{b}{a}$ 的值．

2．若两个方程 $x^2+ax+b=0$ 和 $x^2+bx+a=0$ 只有一个公共根，则（　　）．

(A) $a=b$　　(B) $a+b=0$

(C) $a+b=1$　　(D) $a+b=-1$

3．解关于 x 的方程 $(2x^2-3x-2)n^2+(1-x^2)m^2=mn(1+x^2)$．

4．求方程 $x^2+|x+3|+|3-x|=\frac{9}{2}x+6$ 的实数根．

5．解下列各方程：

(1) $6x^4-13x^3+12x^2-13x+6=0$；

(2) $2x^4+7x^3-x^2-7x+2=0$．

6．解方程 $(12x-1)(6x-1)(4x-1)(3x-1)=5$．

7．解方程 $(x^2+3x-4)^2+(2x^2-7x+6)^2=(3x^2-4x+2)^2$．

（郝志刚）

2. 分式方程

解分式方程，主要是把分式方程转化为整式方程．手段通常有去分母、换元等，并且要注意检验．

例 1 解方程 $\frac{x+1}{x+2}+\frac{x+6}{x+7}=\frac{x+2}{x+3}+\frac{x+5}{x+6}$.

分析 方程中各项的分母与分子之差都为 1，根据这个特点把每一个分式都化成整式与真分式的和，那么原方程即可化简．

解 原方程可化为

$$1-\frac{1}{x+2}+1-\frac{1}{x+7}=1-\frac{1}{x+3}+1-\frac{1}{x+6},$$

$$\frac{1}{x+6}-\frac{1}{x+7}=\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+3},$$

即 $$\frac{x+7-x-6}{(x+6)(x+7)}=\frac{x+3-x-2}{(x+2)(x+3)}.$$

$\therefore$ $$(x+6)(x+7)=(x+2)(x+3).$$

解方程，得 $x=-\frac{9}{2}$.

经检验，$x=-\frac{9}{2}$ 是原方程的解．

评注 (1) 原方程可转化为 $\frac{1}{x+6}+\frac{1}{x+3}=\frac{1}{x+7}+\frac{1}{x+2}$．由上述过程可知，此方程的解为 $x=-\frac{6+3}{2}$ $\left(或\ x=-\frac{7+2}{2}\right)$；

(2) 若有方程 $\frac{1}{x+a}+\frac{1}{x+b}=\frac{1}{x+c}+\frac{1}{x+d}$（其中

a、b、c、d 为常数且 $a+b=c+d$)，试问：此方程的解是否为 $x=-\dfrac{a+b}{2}$?

例 2 解方程

$\dfrac{1}{x^2+7x}-\dfrac{1}{x^2+7x+6}+\dfrac{1}{x^2+7x+18}-\dfrac{1}{x^2+7x+12}=0.$

解 设 $y=x^2+7x+9$，则原方程变为

$$\frac{1}{y-9}-\frac{1}{y-3}+\frac{1}{y+9}-\frac{1}{y+3}=0.$$

即 $$\frac{2y}{y^2-81}-\frac{2y}{y^2-9}=0.$$

$\therefore\quad y=0$ 或 $\dfrac{1}{y^2-81}=\dfrac{1}{y^2-9}$(无解).

$\therefore\quad x^2+7x+9=0$. 解这个方程，得 $x=\dfrac{-7\pm\sqrt{13}}{2}$.

经检验，它们都是原方程的解.

例 3 解方程 $\dfrac{1}{x^2+11x-8}+\dfrac{1}{x^2+2x-8}+\dfrac{1}{x^2-13x-8}=0.$

分析 若去分母，则会变为高次方程. 注意到分母中都有 x^2-8，可用换元法降次.

解 设 $y=x^2+2x-8$，原方程变为

$$\frac{1}{y+9x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{y-15x}=0.$$

解关于 y 的方程，得 $y=9x$ 或 $y=-5x$.

即 $x^2+2x-8=9x$，得 $x_1=8, x_2=-1$;

或 $x^2+2x-8=-5x$，得 $x_3=-8, x_4=1$.

经检验，它们都是原方程的解.

例 4 解方程 $\dfrac{19x-x^2}{x+1}\left(x+\dfrac{19-x}{x+1}\right)=84$.

解 设 $\dfrac{19-x}{x+1}=y$，则原方程化为

$$xy(x+y)=84.$$

又 $xy+(x+y)=\dfrac{19x-x^2}{x+1}+\left(x+\dfrac{19-x}{x+1}\right)=19$,

$$\therefore \begin{cases} xy(x+y)=84, \\ xy+(x+y)=19. \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} x+y-7, \\ xy=12, \end{cases} \text{或} \quad \begin{cases} x+y=12, \\ xy=7. \end{cases}$$

$\therefore$ $x_1=3, x_2=4, x_3=6+\sqrt{29}, x_4=6-\sqrt{29}$.

经检验，它们都是原方程的解.

例 5 k 为何值时，方程 $\dfrac{2x}{x+1}-\dfrac{k}{x^2+x}=\dfrac{x+1}{x}$ 只有唯一解？

分析 分式方程一般化为整式方程来解．原方程有唯一解的情况有两种：(1) 整式方程只有唯一解又是原方程的解；(2) 整式方程有多个解，但只有一个是原方程的解，其余是增根.

解 原方程可化为

$$x^2-2x-k-1=0. \quad ①$$

$$\Delta=4+4(k+1)=4(k+2).$$

(1) 若 $\Delta=0$，即 $k=-2$ 时，

方程①变为 $x^2-2x+1=0$.

该方程有两相等实数根 $x=1$.

经检验，$x=1$ 是原方程的根.

所以 $k=-2$ 时，原方程有唯一解.

(2) 若 $\Delta>0$，即 $k>-2$ 时，方程①有两不相等的实根，

那么只有其中一个是原方程的增根时，原方程才可能有唯一解.

原方程增根只可能是 $x=-1$ 或 $x=0$.

以 $x=-1$ 代入方程①，得 $k=2$.

当 $k=2$ 时，方程①变为 $x^2-2x-3=0$，

解得 $x_1=-1, x_2=3$.

经检验，$x=3$ 是原方程的根，$x=-1$ 为增根，即原方程有唯一解 $x=3$.

以 $x=0$ 代入方程①，得 $k=-1$.

当 $k=-1$ 时，方程①变为 $x^2-2x=0$.

解得 $x_1=0, x_2=2$.

经检验，$x=2$ 为原方程的根，$x=0$ 是增根，即方程有唯一解 $x=2$.

因此，$k=2$ 或 $k=-2$ 或 $k=-1$ 时，方程只有唯一解.

例 6 某商店将甲、乙两种糖果混合销售，并按以下公式确定混合糖果的单价：

$$\text{单价}=\frac{a_1m_1+a_2m_2}{m_1+m_2}\text{(元/千克)}.$$

其中 m_1、m_2 分别为甲、乙两种糖果的重量(千克)，a_1、a_2 分别为甲、乙两种糖果的单价(元/千克). 已知甲种糖果单价为 20 元/千克，乙种糖果单价为 16 元/千克. 现将 10 千克乙种糖果和一箱甲种糖果混合(搅拌均匀)销售，售出 5 千克后，又在混合糖果中加入 5 千克乙种糖果，再出售时，混合糖果的单价为 17.5 元/千克. 问：这箱甲种糖果有多少千克？

解 设这箱甲种糖果有 x 千克，则有

$$\frac{20x+160}{x+10}\cdot(x+5)+80=17.5(x+10).$$

化简，得 $2.5x^2-10x-150=0$，

即 $x^2 - 4x - 60 = 0$,

解得 $x_1 = 10, x_2 = -6$.

经检验,x_1、x_2 都是原方程的根,但 $x_2 = -6$ 不合题意,舍去.

答:这箱甲种糖果有 10 千克.

评注 这是一道有关统计初步的加权平均数知识与一元二次方程的综合题,有一定难度.在本题中,由于甲种糖果与乙种糖果的单价已确定,因此,混合糖果的单价就由甲种糖果与乙种糖果的重量决定了,两种糖果混合的比例不同,混合糖果的单价也就不同.

练 习 2

1. 解方程 $\frac{x-1}{x+1}+\frac{x-4}{x+4}=\frac{x-2}{x+2}+\frac{x-3}{x+3}$.
2. 解方程 $\frac{x^3+7x^2+24x+30}{x^2+5x+13}=\frac{2x^3+11x^2+36x+45}{2x^2+7x+20}$.
3. 求方程 $\frac{1}{x^2-10x-29}+\frac{1}{x^2-10x-45}-\frac{2}{x^2-10x-69}=0$ 的正数解.
4. 解方程 $\frac{4x}{x^2+x+3}+\frac{5x}{x^2-5x+3}=-\frac{3}{2}$.
5. 解方程 $\frac{x^2+x+1}{x^2+1}+\frac{2x^2+x+2}{x^2+x+1}=\frac{19}{6}$.
6. 解方程 $\frac{x^2}{3}+\frac{48}{x^2}=10\left(\frac{x}{3}-\frac{4}{x}\right)$.
7. 解方程 $\frac{13x-x^2}{x+1}\left(x+\frac{13-x}{x+1}\right)=42$.
8. k 为何值时,方程 $\frac{2x}{x^2-4}-\frac{k}{x-2}=3$ 有增根?
9. 一个容器盛满药液 20 升,第一次倒出若干升,用水加满,第二次倒出同样的升数,这时容器里剩下药液 5 升,问:每次倒出药液多少升?

(郝志刚)

3. 无 理 方 程

解无理方程时应首先考虑如何将无理方程转化为有理方程. 其主要方法是两边同时乘方、因式分解和换元法. 但在有些变形中,由于扩大了未知数允许值的范围,而可能产生增根. 所以解无理方程时必须验根.

例 1 解方程 $\sqrt[3]{2-x}=1-\sqrt{x-1}$.

解 设 $\sqrt[3]{2-x}=u$,则 $x=2-u^3$. 原方程可化为

$$u=1-\sqrt{1-u^3}.$$

即 $u^3+u^2-2u=0$.

解方程,得 $u_1=0, u_2=1, u_3=-2$.

即 $\sqrt[3]{2-x}=0, \sqrt[3]{2-x}=1, \sqrt[3]{2-x}=-2$.

解方程,得 $x_1=2, x_2=1, x_3=10$.

经检验,它们都是原方程的解.

评注 此例是含有两个根式的无理方程,通过引入一个辅助参数 u,巧妙地将它转化为只含一个根式,解起来就方便得多. 关键是如何引入辅助参数.

例 2 解方程 $\sqrt{3x^2-5x+7}-\sqrt{3x^2-7x+6}=1$.

分析 原方程中两个根号内的代数式之差很简单,所以可以用换元法.

解 设 $\sqrt{3x^2-5x+7}=u$, $\sqrt{3x^2-7x+6}=v$,

则 $u-v=1$. ①

又 $u^2-v^2=(3x^2-5x+7)-(3x^2-7x+6)=2x+1$. ②