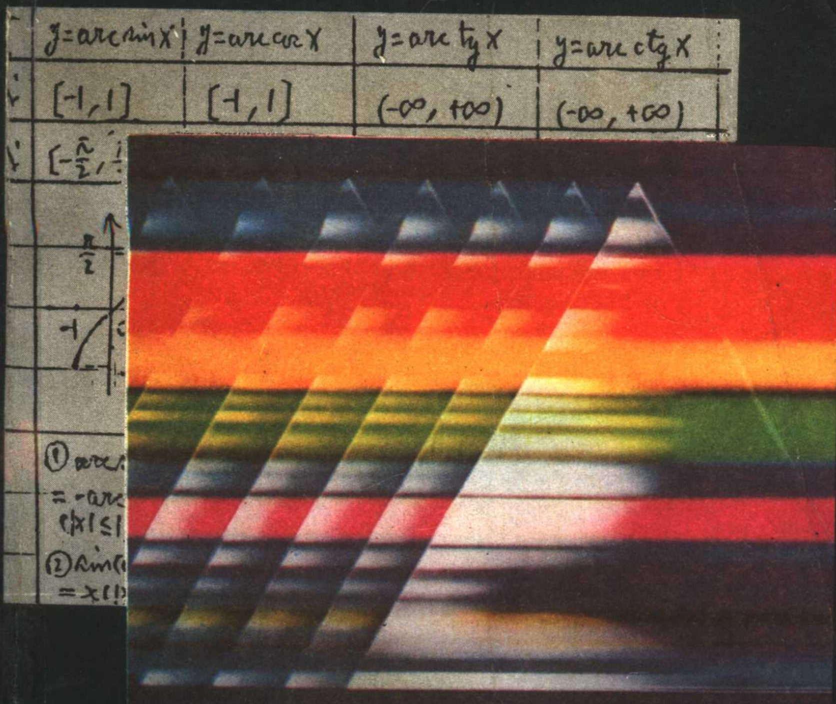
高中数学
知识转化为能力的途径

刘膺淳 著

湖南人民出版社



高中数学
知识转化为能力的途径

Tu Jing

刘膺淳 著

湖南人民出版社

高中数学知识转化为能力的途径

刘膺淳 著

责任编辑：刘刚强 何新波

湖南人民出版社出版、发行

（长沙市河西银盆南路67号）

湖南省新华书店经销 湖南省新华印刷二厂印刷

1988年10月第1版第1次印刷

开本：787×1092 1/32 印张：15.125 插页：2

字数：312,000 印数：1—5,460

ISBN 7—217—00445—4

G·26 定价：3.95元

湘人：88—13

前　言

高中学生常提出这样的问题：基础知识我自信已经掌握，但遇到一道未见过面的数学问题，不是束手无策，就是东一碰，西一闯，经过好几个回合后，才能作出正确的回答，问题在哪里？

当你告诉他这仍然是由于基础知识没有吃透的缘故时，他又作如下的申述：他阅读任何一道题的解答，有时并不困难，有时虽有困难，也只需琢磨一番就领会了，可见问题不在基础知识，而是由于别的什么原因，比喻说自己的智力比不上人家等等。

是这样吗？不，不是这样。这里提出了必须解决的另一个问题，知识转化为能力的问题。

从知识到能力，不是一个自然的、连续的过程，而是一个人工的、飞跃的过程，换句话说，不是记住了某些知识，也就有了运用这些知识的能力，正如不是认识了某些字，也就有了运用这些字写成诗歌和小说的能力一样，必须再作一番努力，把知识吃透，所谓吃透，指的是不仅能记住它，还能指出它的来龙去脉，举出它的多种用场，并能把它和它的"邻居"联系起来作出多种多样的综合应用，做到了这几个方面，就会不自觉地出现一个飞跃，知识转化为能力的飞跃。当然，这必须对基础知识进行剖析，并通过足够数量的范例给予阐扬，才能奏效。本书正是为了帮助读者实现这一飞跃而编写的。

全书分十三个单元，每一单元由基础知识，用法举隅、范

例、习题四部分组成，通过基础知识扼要复习课本内容，通过用法举隅揭示知识转化为能力的一般途径，通过范例掌握知识转化为能力的具体途径，通过习题培养独立解答问题的能力。

每一范例，在解答之前都有简析，简析是从三个方面写的，这三个方面是：理清思路、突破难点、提示解法。每一习题，都有答案附在题后，个别题还有提示或略解，这样会给读者学习本书时带来方便。

本书是我从事中学数学教学40年的经验结晶。在写作过程中还认真吸取了一些同志的建议，力求使内容充实、完整、实用。在编辑出版中得到了湖南人民出版社的鼎力支持，刘刚强、何新波二同志给予的帮助更多，在此一一表示谢意。由于见闻有限，不足之处敬请学者、广大数学教师、读者赐教。

编者

1988年2月

目　　录

第一单元　函　　数

基础知识

一、集合

一组对象的全体形成一个集合．集合里的各个对象叫做集合的元素，集合里的元素具有任意性、确定性、互异性及无序性．含有有限个元素的集合叫做有限集，含有无限个元素的集合叫做无限集，不含任何元素的集合叫做空集，空集记作ϕ.集合的表示方法有列举法和描述法．

元素与集合的从属关系有属于$\in$，不属于$\notin$；集合与集合的包含关系有包含于$\subseteq$，包含$\supseteq$，不包含于$\nsubseteq$，不包含$\nsupseteq$．

如果$A\subseteq B$，且$B\subseteq A$，那么$A=B$．

子集、真子集　如果$A\subseteq B$，那么A叫做B的子集．如果A是B的子集，且B中至少有一个元素不属于A，那么A叫做B的真子集，记作$A\subset B$．

全集　研究集合与集合之间的关系，当这些集合都是某一给定集合的子集时，这个给定的集合可以看作一个全集，记作I．

交集　$A\cap B=\{x|x\in A且x\in B\}$．

并集　$A\cup B=\{x|x\in A或x\in B\}$．

补集　$\bar{A}=\{x|x\in I且x\notin A\}$．

因此，不难推出：

1. $A\subseteq A$, $\phi\subseteq A$, $\left.\begin{matrix}A\subseteq B\\B\subseteq C\end{matrix}\right\}\Longrightarrow A\subseteq C$, $A\cap B\subseteq A$, $A\cap B\subseteq B$, $A\subseteq A\cup B$, $B\subseteq A\cup B$;

2. $A\cap A=A$, $A\cap\phi=\phi$, $A\cap B=B\cap A$, $A\cap I=A$, $A\cap\overline{A}=\phi$;

3. $A\cup A=A$, $A\cup\phi=A$, $A\cup B=B\cup A$, $A\cup I=I$, $A\cup\overline{A}=I$;

4. $\overline{\overline{A}}=A$, $\overline{I}=\phi$, $\overline{\phi}=I$.

二、映射与函数

1. 映射　　设有A、B两个集合，如果按照某种对应法则f，对于集合A中的任何一个元素，在集合B中都有唯一的元素和它对应，这样的对应叫做从集合A到集合B的映射，记作f：$A\to B$。

映射包括"一对一"与"多对一"两种对应，但"一对多"不是映射。

2. 函数　　如果在某变化过程中有两个变量x、y，并且对于x在某个范围内的每一个确定的值，按照某个对应法则，y都有唯一确定的值和它对应，那么y就是x的函数，x叫做自变量，x的取值范围叫做函数的定义域，和x的值对应的y的值叫做函数值，函数值的集合叫做函数的值域。

所以函数是由定义域、值域以及定义域到值域上的对应法则三部分组成的一类特殊的映射．例如，对于二次函数$y=2x^2+2$，函数的定义域是R，值域是$\{y|y\geqslant2\}$，对应法则是"平方乘2加2"，这个函数是一个从R到$\{y|y\geqslant2\}$上的映射。

三、反函数

1. 一一映射　　设A，B是两个集合，f：$A\to B$ 是从集合

A到集合B的映射，如果在这个映射的作用下，对于集合A中的不同元素，在集合B中有不同的象（称为单射），而且B中每一个元素都有原象（称为满射），那么这个映射就叫做A到B上的一一映射。

因此，一一映射就是既为单射又为满射的映射。映射具有方向性，一一映射与一一对应是有区别的，即一一对应包含正逆两个一一映射。例如，实数集与数轴上的点集成一一对应，它包含从实数集到数轴上的点集与从数轴上的点集到实数集正逆两个一一映射。

2. 逆映射　设f：$A\to B$是集合A到集合B上的一一映射，如果对于B中的每一个元素b，使b在A中的原象a和它对应，这样所得的映射叫做映射f：$A\to B$的逆映射，记作f^{-1}：$B\to A$。当然，映射f：$A\to B$也是映射f^{-1}：$B\to A$的逆映射．还应注意，只有对于一一映射，我们才研究它的逆映射。

3. 反函数　如果确定函数$y=f(x)$的映射f：$A\to B$是$f(x)$的定义域A到值域B上的一一映射，那么这个映射的逆映射f^{-1}：$B\to A$所确定的函数$x=f^{-1}(y)$叫做函数$y=f(x)$的反函数。函数$y=f(x)$的定义域、值域分别是函数$x=f^{-1}(y)$的值域、定义域。在习惯上，我们一般用x表示自变量，用y表示函数，为此我们把$x=f^{-1}(y)$改写成$y=f^{-1}(x)$。例如，函数$y=\sqrt{x}+1(x\geqslant 0)$的反函数在习惯上写为$y=(x-1)^2(x\geqslant 1)$，而不写为$x=(y-1)^2$。

4. 反函数的求法　求函数的反函数时，首先要求判定确定函数$y=f(x)$的映射f：$A\to B$是不是从$f(x)$的定义域到值域上的一一映射，是，反函数存在，否，反函数不存在．若存在，然后把函数式$y=f(x)$看作以x为未知数的方程，解出$x=f^{-1}(y)$，得反函数$y=f^{-1}(x)$。

显然，$y=f(x)$与$y=f^{-1}(x)$互为反函数，它们的图象关于直线$y=x$对称。

四、函数的简单性质

1．奇偶性　　如果对于函数的定义域内任意一个x都有$f(-x)=-f(x)$，那么函数$f(x)$就叫做奇函数。奇函数的图象关于原点成中心对称，反过来，一个函数的图象关于原点成中心对称，这个函数是奇函数。

如果对于函数的定义域内任意一个x都有$f(-x)=f(x)$，那么函数$f(x)$就叫做偶函数。偶函数的图象关于y轴成轴对称，反过来，一个函数的图象关于y轴成轴对称，这个函数是偶函数。

2．单调性　　设有函数$f(x)$，如果对于属于某区间的任意两个自变量的值x_1，x_2，当$x_1<x_2$时，都有$f(x_1)<f(x_2)$，那么就说$f(x)$在这个区间是增函数；如果对于属于某区间的任意两个自变量的值x_1，x_2，当$x_1<x_2$时，都有$f(x_1)>f(x_2)$，那么就说$f(x)$在这个区间是减函数。

如果函数$y=f(x)$在某个区间是增函数或减函数，就说$f(x)$在这一区间具有单调性，这一区间叫做$f(x)$的单调区间。

3．周期性　　对于函数$f(x)$，如果存在一个不为零的常数T，使得当x取定义域内的每一个值时，$f(x+T)=f(x)$都成立，那么就把函数$f(x)$叫做周期函数，不为零的常数T叫做这个函数的周期。

4．有界性　　设函数$f(x)$在区间(a,b)内有定义，如果存在一个正数M，对于所有的$x\in(a,b)$，恒有$|f(x)|\leqslant M$，则称函数$f(x)$在区间(a,b)内是有界的；如果不存在这样的正数M，则称函数$f(x)$在区间(a,b)内是无界的，例如，函数$y=\sin x$在R内是有界的，因为对于任何$x\in R$，恒有$|\sin x|\leqslant 1=M$，而函数

$y=\frac{1}{x}$在区间$(0,2)$内是无界的，在区间$[1, +\infty)$内是有界的。

用 法 举 隅

一、求函数的定义域　一般归结为解不等式或不等式组，若不等式组中含有参变数，取交集时应对参变数进行讨论。例如，求$y=\log_a[\log_a(\log_a x)]$的定义域，可按下法进行：

1．$a>1$时，

$$\begin{cases}\log_a(\log_a x)>0\\ \log_a x>0\\ x>0\end{cases}\Longrightarrow x>a$$

2．$0<a<1$时，

$$\begin{cases}\log_a(\log_a x)>0\\ \log_a x>0\\ x>0\end{cases}\Longrightarrow a<x<1$$

∴　当$a>1$时，函数的定义域是$\{x|x>a\}$

当$0<a<1$时，函数的定义域是$\{x|a<x<1\}$

常见函数的定义域的求法：

1、有理整函数$y=f(x)$：定义域R

2．有理分函数$y=\frac{f(x)}{g(x)}$：定义域$g(x)\neq 0$

3．无理函数$y=\sqrt[2n]{f(x)}$ $(n\in N)$：定义域$f(x)\geqslant 0$

4．对数函数$y=\log_a f(x)$ $(a>0, a\neq 1)$：定义域$f(x)>0$

5．三角函数

$y=\sin f(x)$，$y=\cos f(x)$：定义域$f(x)$为R

$y=\operatorname{tg}f(x)$，$y=\sec f(x)$：定义域 $f(x)\neq k\pi+\frac{\pi}{2}$ $(k\in Z)$

$y=\operatorname{ctg}f(x)$，$y=\csc f(x)$：定义域 $f(x)\neq k\pi(k\in Z)$

6．反三角函数

$y=\arcsin f(x)$，$y=\arccos f(x)$：定义域 $|f(x)|\leqslant 1$

$y=\operatorname{arctg}f(x)$，$y=\operatorname{arcctg}f(x)$：定义域 $f(x)$ 为 R

7．复合函数 $y=f[\varphi(x)]$：定义域是中间函数 $\varphi(x)$ 的定义域 A 与以中间函数 $\varphi(x)$ 作自变量函数 $f[\varphi(x)]$ 的定义域 B 的交集 $A\cap B$。例如，$y=\lg\sqrt{x}$ 的定义域是 $x\geqslant 0$ 与 $\sqrt{x}>0$ 的交集．即不等式组 $\begin{cases}x\geqslant 0\\ \sqrt{x}>0\end{cases}$ 的解集 $(0,\ +\infty)$。

8．和函数 $y=f_1(x)+f_2(x)+\cdots+f_n(x)$：定义域与求复合函数的定义域一样，是各项函数定义域的交集。

二、求函数的极值　如果在 $x=a$ 的时候，函数 $f(x)$ 的值比 x 略小于或略大于 a 时函数 $f(x)$ 的值都小（或都大），就说函数 $f(x)$ 在 $x=a$ 时有极小值（或极大值）$f(a)$，函数 $f(x)$ 的极小值和极大值，统称为极值。

如果当 $x=a$ 时，函数 $f(x)$ 的定义域里 x 的一切值，有 $f(a)\leqslant f(x)$（或 $f(a)\geqslant f(x)$），就说当 $x=a$ 时函数 $f(x)$ 有最小值（或最大值）$f(a)$。

对于二次函数来说，它的极大（小）值，也是它的最大（小）值。

1．二次函数的极值　$y=ax^2+bx+c$（$a\neq 0$）的极值，可用配方法求得：

$$y=ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}$$

当$x=-\dfrac{b}{2a}$时，$y=\dfrac{4ac-b^2}{4a}$是极值。

$a>0$时是极小值；$a<0$时是极大值。

2．利用基本不等式求极值　基本不等式

$\dfrac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$（$a$、$b\in R^+$，当且仅当$a=b$时取等号）

$\dfrac{a+b+c}{3}\geqslant\sqrt[3]{abc}$（$a$、$b$、$c\in R^+$，当且仅当$a=b=c$时取等号）

一般地，有

$\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\geqslant\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$（$a_1$、$a_2\cdots a_n\in R^+$，$n\in N$，$n>1$，当且仅当$a_1=a_2=\cdots=a_n$时取等号）

设$a_1+a_2+\cdots+a_n=s$，$a_1a_2\cdots a_n=p$，则

(1)当s为定值，且方程(组)$a_1=a_2=\cdots=a_n$有解时，p有最大值$\left(\dfrac{s}{n}\right)^n$；

(2)当p为定值，且方程(组)$a_1=a_2=\cdots=a_n$有解时，s有最小值$n\sqrt[n]{p}$。

例如，求$y=x^2(1-3x)$ $\left(0\leqslant x\leqslant\dfrac{1}{3}\right)$的最大值，可按下法进行：

$\because$　$0\leqslant x\leqslant\dfrac{1}{3}$，$\therefore$　x，$1-3x$都是非负数。

又　$y=x^2(1-3x)=x\cdot x\cdot(1-3x)$

$$=\frac{3}{2}\left[x\cdot x\cdot\left(\frac{2}{3}-2x\right)\right]\leqslant\frac{3}{2}\left[\frac{x+x+\left(\frac{2}{3}-2x\right)}{3}\right]^3$$

$$=\frac{4}{243}\ \left(x,\ x,\ \frac{2}{3}-2x\text{的和为定值}\frac{2}{3}\right)$$

∴ 当$x=\frac{2}{3}-2x\Rightarrow x=\frac{2}{9}$时 $\left(\text{方程组}x=x=\frac{2}{3}-2x\text{ 有 解 }x=\frac{2}{9}\right)$

$$y_{max}=\frac{4}{243}.$$

注：下面的解法是错误的

$$y=x^2(1-3x)=\frac{1}{2}\cdot x\cdot 2x\cdot(1-3x)$$

$$\leqslant\frac{1}{2}\left(\frac{x+2x+1-3x}{3}\right)^3=\frac{1}{54}$$

$$\therefore\quad y_{max}=\frac{1}{54}.$$

∵x，$2x$，$1-3x$的和虽为定值1，但方程组$x=2x=1-3x$无解，∴y不可能取得$\frac{1}{54}$，但$\frac{1}{54}$是y的一个上界。

3．利用判别式求函数的极值　当函数$y=f(x)$可化为$\phi_1(y)x^2+\phi_2(y)x+\phi_3(y)=0$时，因$x$是实数，可由判别式$\phi_2^2(y)-4\phi_1(y)\phi_3(y)\geqslant 0$求出$y$的变化范围，从而求得函数的极值。例如，求$y=\frac{4x^2-2}{4x-3}$的极值，可按下法进行：

化原函数为$4x^2-4yx+3y-2=0$，

∵ x为实数，

∴ $\Delta=(-4y)^2-4\cdot 4(3y-2)\geqslant 0$，

即 $y^2-3y+2\geqslant 0$。

解得　$y\leqslant 1$或$y\geqslant 2$。

$\therefore$　当$x=\dfrac{1}{2}$时，$y_{max}=1$。

当$x=1$时，$y_{min}=2$。

注：利用判别式求极值时，求出y的范围后，必须代入方程检查当y取临界值（本题y的临界值是1和2）时，对应的自变量x是否存在，且属于函数的定义域。对应的x不存在，或虽存在而不属于函数的定义域时，这临界值就非极值。

4. 三角函数的极值　　三角函数的极值并不是都能用初等方法求出的，这里仅介绍具有典型意义的三角函数$y=a\sin x+b$，$y=a\sin x+b\cos x$，$y=a\sin^2 x+b\sin x+c$的极值的求法：

（1）$y=a\sin x+b$

若$a>0$，当 $x=2k\pi+\dfrac{\pi}{2}$时，$y_{max}=a+b$；

当 $x=2k\pi-\dfrac{\pi}{2}$时，$y_{min}=-a+b$。

若$a<0$，当 $x=2k\pi-\dfrac{\pi}{2}$时，$y_{max}=-a+b$；

当 $x=2k\pi+\dfrac{\pi}{2}$时，$y_{min}=a+b$。

（2）$y=a\sin x+b\cos x$

$$\because\quad y=\sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x\right)$$

令$\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}=\cos\theta$，　则$\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}=\sin\theta$

$$\therefore\quad y=\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\theta)$$

当$x=2k\pi+\dfrac{\pi}{2}-\theta$时，　$y_{max}=\sqrt{a^2+b^2}$；

当$x=2k\pi-\frac{\pi}{2}-\theta$时，$y_{min}=-\sqrt{a^2+b^2}$。

(3) $y=a\sin^2x+b\sin x+c$

设$\sin x=t$，则$-1\leqslant t\leqslant 1$，问题转化为求二次函数$y=at^2+bt+c$在闭区间$[-1,1]$上的最大值和最小值。

设$a>0$（$a<0$留给读者）

① 当$t=-\frac{b}{2a}\leqslant -1$时，

函数$y=at^2+bt+c$在闭区间$[-1,1]$上单调递增

$\therefore$ $t=\sin x=-1$，即$x=2k\pi-\frac{\pi}{2}$时，$y_{min}=a-b+c$；（即最小值）。

$t=\sin x=1$，即$x=2k\pi+\frac{\pi}{2}$时，$y_{max}=a+b+c$（即最大值）。

② 当$-1<t=-\frac{b}{2a}<1$时，$y_{min}=\frac{4ac-b^2}{4a}$（即最小值）

又$t=\sin x=-1$，即$x=2k\pi-\frac{\pi}{2}$时，$y=a-b+c$；

$t=\sin x=1$，即$x=2k\pi+\frac{\pi}{2}$时，$y=a+b+c$。

这两个值中的较大者$a+|b|+c$是函数的最大值。

③ 当$t=-\frac{b}{2a}\geqslant 1$时，

函数$y=at^2+bt+c$在闭区间$[-1,1]$上单调递减；

$\therefore t=\sin x=1$，即$x=2k\pi+\frac{\pi}{2}$时，$y_{min}=a+b+c$（即最小值）；

$$t=\sin x=-1，\text{即}x=2k\pi-\frac{\pi}{2}\text{时}，\quad y_{max}=a-b+c$$

（即最大值）。

注：(1) 求二次函数的极值时，一定要注意二次函数的定义域：

①定义域为全体实数时，在顶点处取得一个极值。

②定义域在开区间内时，只有顶点横坐标在这开区间内时，才能在顶点处取得一个极值，否则不存在极值。

③定义域在闭区间上时，存在两个极值（本题属于这种情况）：

(i)顶点横坐标在闭区间内时，在顶点处取得一个极值，另一个极值在距顶点较远的端点处取得。

(ii)顶点横坐标不在闭区间内时，两个极值分别在两个端点处取得。

(2) 求$y=a\cos x+b$，$y=a\cos^2x+b\cos x+c$的极值可仿求$y=a\sin x+b$，$y=a\sin^2+b\sin x+c$的极值的方法求得。

三、求函数的值域　求函数的值域，没有普遍适用的准则可遵循，比求定义域要复杂些，这里介绍几种常用的求法：

1.**观察法**　例如，求$y=-\frac{1}{3}x^2+2$的值域，只要注意到$x^2\geqslant0$ $(x\in R)$，就可写出这函数的值域$\{y|y\leqslant2，y\in R\}$。

2.**通过解只含函数y的不等式求值域**　例如，求$y=\frac{1}{x^2-1}$的值域，可按下法进行：

因函数的定义域为$x\neq\pm1$，且$y\neq0$，

由$y=\frac{1}{x^2-1}$，可得$x^2-1=\frac{1}{y}$，$x^2=\frac{y+1}{y}$。