



微分几何 与齿轮啮合原理

傅则绍 主编

石油大学出版社

内 容 提 要

本书系统地论述了齿轮啮合的基本原理,全书分为两篇共七章。

第一篇:齿轮啮合原理的数学基础——微分几何,包括矢量函数、曲线论、曲面论和包络论四章;

第二篇:齿轮啮合原理,包括平面啮合原理、空间啮合原理和平面二次包络弧面蜗杆传动三章。

本书可作为机械学专业的研究生以及机械类专业本科高年级学生的专业课教材,也可供有关专业的教师和工程技术人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

微分几何与齿轮啮合原理/傅则绍主编. —东营:石油
大学出版社,1999.9

ISBN 7-5636-1216-5

I. 微… II. 傅… III. 微分几何-应用-齿轮-啮合原理
IV. TH132.4

中国版本图书馆 CIP 数据核字(1999)第 26782 号

微分几何与齿轮啮合原理

傅则绍 主编

出版者:石油大学出版社(山东 东营,邮编 257062)

印刷者:石油大学印刷厂

发行者:石油大学出版社(电话:0546—8392563)

开 本:787×1092 1/16 印张:11.75 字数:301千字

版 次:1999年8月第1版 1999年8月第1次印刷

印 数:1—1000册

定 价:15.00元

前 言

1979年西北工业大学奉令招收“机械设计本科师资班”，为了教学需要，我们编写了60课时的“齿轮啮合原理”和40课时的“微分几何”教材。在1981年至1984年原高教部委托西北工业大学举办的四届“全国机械原理教师讲习班”上，也采用这两本教材进行教学。1983年直到现在，西北工业大学及部分兄弟院校还以这两本教材作为机械学专业硕士研究生的教材。10多年来，在课时不变的前提下，也曾对这两本教材作过多次的修订。目前在适应教学改革、压缩课时的情况下，我们拟将这两本教材合二为一，按60课时编写成“微分几何与齿轮啮合原理”，作为机械学硕士研究生的教材。

这次编写在原有的基础上作了较大幅度的修订。全书共分两篇，第一篇：啮合原理的数学基础——微分几何，精简了一些与啮合原理无关的内容。第二篇：齿轮啮合原理，由于篇幅的限制仅介绍平面与空间啮合的基本原理，分析各种齿轮啮合的共性问题，不讨论齿轮的具体特性。这当然与学时限制有关，但主要是考虑学习本课程的重点是掌握啮合的基本理论，有了这些基础，学生就具备了对各种齿轮特性进行分析与探讨的能力。

在平面啮合中，叙述基本理论后，将以实例来验证理论、解决实际问题。在空间啮合中，由于理论比较繁杂、例题比较冗长，如果在基本理论中参入较长的例题，不仅使全章结构臃肿，而且还有喧宾夺主之嫌。为此，在书末另立一章“平面二次包络弧面蜗杆传动”作为空间啮合理论应用的实例。

参加本书编著的有：李继庆（第一、二、三、四章），陈作模、王鸿飞（第五章），乐可锡、傅则绍（第六、七章），并由傅则绍担任主编。

本书承卢子馨教授主审，并提出许多宝贵意见，在此表示衷心的感谢。

由于水平所限，书中漏误、欠妥之处在所难免，敬请有关教师和广大读者不吝指正。

编 者

1999年1月

目 录

第一篇 齿轮啮合原理的数学基础——微分几何

第一章 矢量函数	(1)
§ 1-1 矢量代数	(1)
§ 1-2 矢量分析	(3)
§ 1-3 几种具有特殊性质的矢量函数	(5)
§ 1-4 直线与平面的矢量方程	(7)
习题	(9)
第二章 曲线论	(10)
§ 2-1 空间曲线	(10)
§ 2-2 空间曲线的活动标架	(11)
§ 2-3 空间曲线的自然参数——弧长	(15)
§ 2-4 空间曲线的曲率与挠率	(17)
§ 2-5 等距曲线	(23)
习题	(24)
第三章 曲面论	(26)
§ 3-1 一般曲面	(26)
§ 3-2 曲面的第一基本二次型	(30)
§ 3-3 曲面的第二基本二次型	(34)
§ 3-4 曲面上的测地线	(47)
§ 3-5 直纹面、可展曲面与切线曲面	(53)
习题	(57)
第四章 包络论	(60)
§ 4-1 平面曲线族的包络	(60)
§ 4-2 单参数曲面族的包络	(62)
§ 4-3 单参数平面族的包络	(64)
§ 4-4 用曲线坐标表示的单参数曲面族的包络	(66)
习题	(68)

第二篇 齿轮啮合原理

第五章 平面啮合原理	(69)
§ 5-1 瞬心线	(69)
§ 5-2 共轭曲线	(73)

§ 5-3	坐标变换	(79)
§ 5-4	用运动学法求共轭曲线	(83)
§ 5-5	用齿廓法线法求共轭曲线	(86)
§ 5-6	根据啮合线求共轭曲线	(90)
§ 5-7	齿廓过渡曲线	(94)
§ 5-8	共轭曲线的曲率关系	(98)
§ 5-9	平面啮合中的根切	(104)
§ 5-10	平面啮合中的两类界限点	(109)
§ 5-11	二重点和三重点	(115)
§ 5-12	平面齿轮机构运动规律的确定	(117)
	习题	(121)
第六章	空间啮合原理	(125)
§ 6-1	坐标系的选择与坐标变换	(125)
§ 6-2	空间相对运动及其螺旋轴	(130)
§ 6-3	共轭曲面	(136)
§ 6-4	螺旋面	(141)
§ 6-5	两类界限线	(151)
§ 6-6	两次啮合与双接触线	(153)
§ 6-7	诱导法曲率	(155)
§ 6-8	齿面啮合点处的曲率干涉	(163)
	习题	(164)
第七章	平面二次包络弧面蜗杆传动	(166)
§ 7-1	第一次包络——包络出蜗杆齿面 Σ_1	(166)
§ 7-2	第二次包络——包络出蜗杆齿面 Σ_2^*	(174)
	习题	(181)
	主要参考文献	(182)

第一篇 齿轮啮合原理的 数学基础——微分几何

第一章 矢量函数

矢量函数的代数运算和分析是研究微分几何的基本工具。本章先简要复习矢量代数，然后简述矢量分析。

§ 1-1 矢量代数

一、矢量的概念

如图 1-1 所示，在空间任取一点 O 和三个右旋（即构成右手系）的彼此垂直的单位矢量 i, j, k ，构成直角坐标系 $OXYZ$ （或称标架）。点 O 称为坐标原点， i, j, k 所在的直线 X, Y, Z 称为坐标轴， i, j, k 称为基矢量。

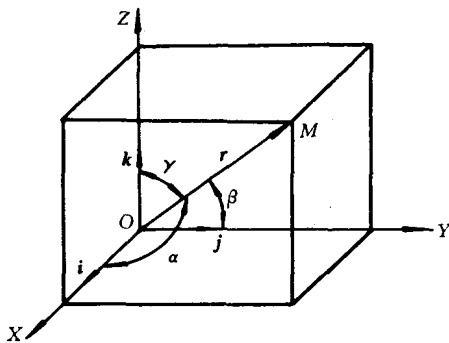


图 1-1

设 M 为空间任意一点，其径矢为 r ， r 在坐标轴上的投影的代数长度分别为 x, y, z 。称 x, y, z 为矢量 r 在三个坐标轴上的分量。

$$r = xi + yj + zk$$

可记为

$$r = \{x, y, z\}$$

其模为

$$|r| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \tag{1-1}$$

$x/|r| = \cos \alpha$ ， $y/|r| = \cos \beta$ ， $z/|r| = \cos \gamma$ 称为 r 的方向余弦。而且

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{|r|^2} = 1$$

二、矢量运算

1. 两矢量的和

$$\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 = \{x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2\} \quad (1-2)$$

2. 一个矢量与标量的数乘矢量

设 λ 为一标量, 则

$$\lambda \mathbf{r} = \{\lambda x, \lambda y, \lambda z\} \quad (1-3)$$

3. 两矢量的数积(又称内积)

$$\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2 = |\mathbf{r}_1| \cdot |\mathbf{r}_2| \cos \theta \quad (1-4)$$

式中: θ 为 \mathbf{r}_1 与 \mathbf{r}_2 之间的夹角, $0 \leq \theta \leq \pi$ 。

由数积的定义可推出:

- ① 当 \mathbf{r}_1 与 \mathbf{r}_2 垂直时, 因 $\cos \theta = 0$, 故 $\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2 = 0$ 。对于基矢量, $\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{i} = 0$ 。
- ② 当 \mathbf{r}_1 与 \mathbf{r}_2 平行时, 因 $\cos \theta = 1$, 故 $\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2 = |\mathbf{r}_1| \cdot |\mathbf{r}_2|$ 。对于基矢量, $\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = 1$ 。
- ③ 若用分量表示, 则数积可写为

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2 &= (x_1 \mathbf{i} + y_1 \mathbf{j} + z_1 \mathbf{k})(x_2 \mathbf{i} + y_2 \mathbf{j} + z_2 \mathbf{k}) = \\ &= x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 \end{aligned} \quad (1-5)$$

4. 两矢量的矢积(又称外积)

$$\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2 = |\mathbf{r}_1| \cdot |\mathbf{r}_2| \sin \theta \cdot \mathbf{n} \quad (1-6)$$

式中: θ 为 \mathbf{r}_1 与 \mathbf{r}_2 之间的夹角, $0 \leq \theta \leq \pi$ 。 \mathbf{n} 为同时垂直于 \mathbf{r}_1 、 \mathbf{r}_2 的单位矢量, 且 \mathbf{r}_1 、 \mathbf{r}_2 、 \mathbf{n} 构成右手系, 如图 1-2 所示。

矢积的模为

$$|\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2| = |\mathbf{r}_1| \cdot |\mathbf{r}_2| \sin \theta$$

它代表以 \mathbf{r}_1 、 \mathbf{r}_2 为边的平行四边形的面积。

由矢积的定义可推出:

- ① 当 \mathbf{r}_1 与 \mathbf{r}_2 平行时, 因 $\sin \theta = 0$, 故 $\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2 = 0$ 。对于基矢量, $\mathbf{i} \times \mathbf{i} = \mathbf{j} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} \times \mathbf{k} = 0$ 。
- ② 当 \mathbf{r}_1 与 \mathbf{r}_2 垂直时, 因 $\sin \theta = 1$, 故 $\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2 = |\mathbf{r}_1| \cdot |\mathbf{r}_2| \mathbf{n}$ 。对于基矢量, $\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}$, $\mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i}$, $\mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j}$ 。

③ 若以分量表示, 则矢积可写为

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2 &= (x_1 \mathbf{i} + y_1 \mathbf{j} + z_1 \mathbf{k}) \times (x_2 \mathbf{i} + y_2 \mathbf{j} + z_2 \mathbf{k}) = \\ &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (1-7)$$

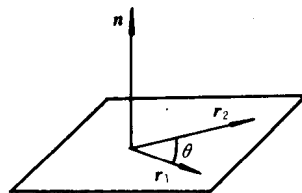


图 1-2

5. 矢量的代数运算法则

矢量的代数运算法则, 包括结合律、分配律、交换律等, 除了 $\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2 = -\mathbf{r}_2 \times \mathbf{r}_1$ 外, 其他运算均与标量的代数运算法则一致。

三、多矢量运算

1. 混合积

$\mathbf{r}_1 \cdot (\mathbf{r}_2 \times \mathbf{r}_3)$ 称为三矢量的混合积, 记为

$$(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3) = \mathbf{r}_1 \cdot (\mathbf{r}_2 \times \mathbf{r}_3) \quad (1-8)$$

混合积 $(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3)$ 为一标量, 其几何意义为: 混合积的绝对值是矢量 $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3$ 所构成的平行六面体的体积, 如图 1-3 所示。

显然, 当 $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3$ 共面时, $(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3) = 0$

当 $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3$ 为右手系时, $(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3) > 0$

当 $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3$ 为左手系时, $(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3) < 0$ 。

矢量的混合积也可用分量表示

$$(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} \quad (1-9)$$

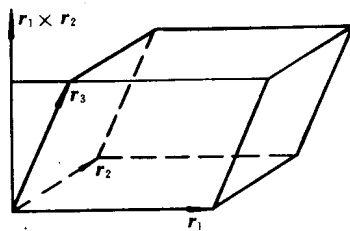


图 1-3

从行列式的性质可以得到

$$\begin{aligned} (\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3) &= (\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3, \mathbf{r}_1) = (\mathbf{r}_3, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \\ &= -(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_3, \mathbf{r}_2) = -(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_3) = -(\mathbf{r}_3, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1) \end{aligned}$$

混合积的概念, 在微分几何中的地位相当重要, 应予以重视。

2. 三矢矢积

$$\begin{aligned} (\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2) \times \mathbf{r}_3 &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ |y_1 & z_1| & |z_1 & x_1| & |x_1 & y_1| \\ |y_2 & z_2| & |z_2 & x_2| & |x_2 & y_2| \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = \\ &= (\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_3) \mathbf{r}_2 - (\mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{r}_3) \mathbf{r}_1 \end{aligned} \quad (1-10)$$

3. 拉格朗日恒等式

$$\text{因为 } [(\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2) \times \mathbf{r}_3] \cdot \mathbf{r}_4 = ((\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2) \cdot \mathbf{r}_3) \cdot \mathbf{r}_4 = (\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2) \cdot (\mathbf{r}_3 \times \mathbf{r}_4)$$

$$\text{又因为 } [(\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2) \times \mathbf{r}_3] \cdot \mathbf{r}_4 = [(\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_3) \cdot \mathbf{r}_2 - (\mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{r}_3) \cdot \mathbf{r}_1] \cdot \mathbf{r}_4 = (\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_3)(\mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{r}_4) - (\mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{r}_3)(\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_4)$$

$$\text{所以 } (\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2) \cdot (\mathbf{r}_3 \times \mathbf{r}_4) = (\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_3)(\mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{r}_4) - (\mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{r}_3)(\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_4) =$$

$$\begin{vmatrix} \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_3 & \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_4 \\ \mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{r}_3 & \mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{r}_4 \end{vmatrix} \quad (1-11)$$

上式即为著名的拉格朗日恒等式。

当 $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_3, \mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_4$ 时, 上式可化为

$$(\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2)^2 = \mathbf{r}_1^2 \cdot \mathbf{r}_2^2 - (\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2)^2$$

§ 1-2 矢量分析

一、矢量函数

若对于自变量 t (标量) 的每一个数值, 都有变矢量 \mathbf{r} 的确定量 (大小与方向都确定的一个矢量) 与之相对应, 则变矢量 \mathbf{r} 称为自变量 t 的矢量函数, 记作

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$$

矢量函数也可表示为

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

这里, $x=x(t), y=y(t), z=z(t)$ 为三个标量函数。

若把变矢量表示成点 M 的径矢形式 $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, 则当 t 变动时, 点 M 在空间描绘出一条曲线, 称为矢量函数的矢端曲线。

类似于标量函数数学分析, 可引入矢量函数的极限、连续、导数、微分、不定积分和定积分等概念。为了避免不必要的重复, 这里仅着重叙述矢量函数导数的定义。

二、矢量函数分析

① 矢量函数的极限与连续性: 其概念与标量函数相类似。

② 矢量函数的导数: 其形式也与标量函数相类似。

对于矢量函数 $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ 和 $t_0 \in (t_1, t_2)$ 若存在极限, 则极限就称作 $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ 在 t_0 处的导矢, 记作 $\mathbf{r}'(t_0)$ 或 $\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)_{t_0}$ 。

$$\mathbf{r}'(t_0) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{r}(t_0 + \Delta t) - \mathbf{r}(t_0)}{\Delta t}$$

如果将矢量函数 $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ 用三个分量来表示, 即

$$\mathbf{r}(t) = \{x(t), y(t), z(t)\}$$

则, 众所熟悉的关于标量函数数学分析中的种种概念对于各个分量自然也适用, 因为它们也都是普通的标量函数。将数量分析中的理论用于各个分量, 然后再结合基本矢, 稍加处理, 即可成为矢量分析的相应内容。如导矢

$$\mathbf{r}'(t) = \{x'(t), y'(t), z'(t)\}$$

式中: $x'(t) = \frac{dx}{dt}, y'(t) = \frac{dy}{dt}, z'(t) = \frac{dz}{dt}$ 。

一般地说, $\mathbf{r}(t)$ 的矢端轨迹为一条曲线, $\Delta\mathbf{r}$ 是该曲线上参数分别为 t_0 和 $t_0 + \Delta t$ 的两点所引的弦上的矢量。显然当 Δt 为正值时, $\frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t}$ 与 $\Delta\mathbf{r}$ 同向; 反之为异向。为此, 约定今后所讨论的若是有向曲线, 并把 t 增加的方向作为曲线的正向, 则当 $\Delta t \rightarrow 0$ 时, $\frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t}$ 的极限显然就是 t_0 处的切线方向的矢量, 并且它总是指向曲线的正向, 如图 1-4 所示。

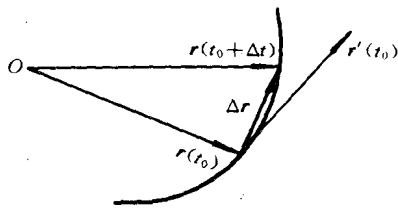


图 1-4

矢量函数微分的定义和微分形式与标量函数相类似。

对于复合函数

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t), \quad t = \varphi(u)$$

则有

$$\frac{d\mathbf{r}}{du} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \cdot \frac{dt}{du}$$

③ 矢量函数的泰勒公式:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(t_0 + \Delta t) = & \mathbf{r}(t_0) + \mathbf{r}'(t_0)\Delta t + \frac{1}{2}\mathbf{r}''(t_0)(\Delta t)^2 + \dots + \\ & \frac{1}{(n-1)!}\mathbf{r}^{(n-1)}(t_0)(\Delta t)^{(n-1)} + \frac{1}{n!}\mathbf{r}^{(n)}(t_0)(\Delta t)^n + \varepsilon(\Delta t)^n \end{aligned}$$

式中: ε 为无穷小矢量, $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \varepsilon = 0$ 。

④ 矢量函数的积分: 矢量函数 $r(t)$ 的不定积分为

$$\int r(t) dt = R(t) + C$$

式中: $R(t)$ 为 $r(t)$ 的一个原函数, 即 $R'(t) = r(t)$, C 为常矢。

若矢量函数 $r(t) = x(t)i + y(t)j + z(t)k$ 是可积的, 则有

$$\int_a^b r(t) dt = i \int_a^b x(t) dt + j \int_a^b y(t) dt + k \int_a^b z(t) dt$$

标量函数定积分的概念, 以及定积分的许多性质都可以相应地推广到矢量函数。其基本公式仍然是

$$\int_a^b r(t) dt = R(b) - R(a)$$

式中: $R(t)$ 为 $r(t)$ 的任一原函数。

§ 1-3 几种具有特殊性质的矢量函数

一、平行于固定平面的变矢

设 $r(t)$ 平行于一固定平面, n 为该平面的单位法矢, 则

$$n \cdot r(t) = 0$$

对上式连续微分两次, 则有

$$n \cdot r'(t) = 0, \quad n \cdot r''(t) = 0$$

可见矢量 $r(t)$ 、 $r'(t)$ 与 $r''(t)$ 都垂直于 n , 因而共面。故有

$$(r, r', r'') = 0$$

引理: 变矢 $r(t)$ 平行于固定平面的充要条件为 $(r, r', r'') = 0$ 。

其几何意义为: 若矢量函数 $r = r(t)$ 所表示的曲线是平面曲线, 其充要条件为 $(r, r', r'') = 0$ 。

二、定向变矢

对于任何一个 $r(t) \neq 0$ 的定向变矢, 总可以取一个单位定向矢量 e 与 $r(t)$ 相平行 (参看图 1-5), 并假设

$$r(t) = \lambda(t) \cdot e$$

其中: $\lambda(t) \neq 0$ 。

微导上式, 得

$$r'(t) = \lambda'(t) \cdot e$$

因

$$r(t) \times r'(t) = \lambda(t) \cdot e \times \lambda'(t) \cdot e = 0$$

故表明定向变矢与它的导矢相平行。

引理: 非零变矢 $r(t)$ 具有固定方向的充要条件是 $r(t) \times r'(t) = 0$ 。

其几何意义为: 若曲线 $r = r(t)$ 是一条经过原点的直线, 其充要条件是它的切矢和径矢处处平行。

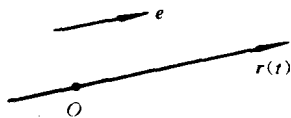


图 1-5

三、定长变矢

设 $r(t)$ 的长度 $|r(t)| = \text{常数}$, 即 $r(t) = |r(t)| \cdot e$ 则

$$r^2(t) = |r(t)|^2 \cdot e^2 = |r(t)|^2 = \text{常数}$$

对上式微分, 得 $r(t) \cdot r'(t) = 0$ 。这表明 $r(t)$ 与 $r'(t)$ 相垂直。

引理: 变矢 $r(t)$ 具有固定长度的充要条件是 $r(t) \cdot r'(t) = 0$ 。

其几何意义为

① 球面或圆周上每一点的切矢必垂直于径矢;

② 若曲线 $r=r(t)$ 位于以原点为中心的一个球面上, 其充要条件为曲线上每一点的切矢 $r'(t)$ 与其径矢 $r(t)$ 均相互垂直。

圆矢量和球矢量都是定长变矢。下面将介绍圆矢量和球矢量的旋转变化。

1. 圆矢量函数

如图 1-6 所示, e 为在 OXY 平面上的一个单位矢量。它与 X 轴正向间的夹角为 θ 。 θ 角从 X 轴到矢量 e 沿逆时针方向度量为正。

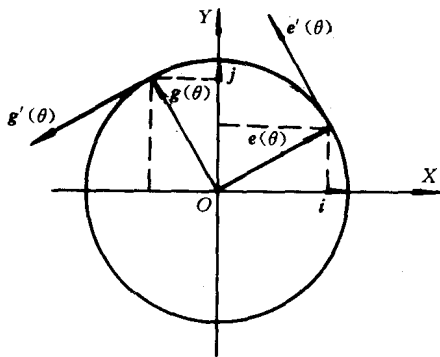


图 1-6

由于 e 为单位矢量, 故 e 完全由 θ 角的大小来决定, 可记作

$$e = e(\theta)$$

显然, 圆可用下式来表示

$$r(\theta) = re(\theta)$$

式中: r 为圆的半径。

若将 $e(\theta)$ 沿逆时针方向旋转 90° , 得

$$g(\theta) = e(90^\circ + \theta)$$

因为

$$e(\theta) = \{\cos \theta, \sin \theta\} \quad (1-12)$$

故

$$g(\theta) = \{\cos(90^\circ + \theta), \sin(90^\circ + \theta)\} = \{-\sin \theta, \cos \theta\} \quad (1-13)$$

将式(1-12)及(1-13)分别对 θ 角取导数, 得

$$e'(\theta) = \{-\sin \theta, \cos \theta\} = g(\theta)$$

$$g'(\theta) = \{-\cos \theta, -\sin \theta\} = -e(\theta)$$

2. 球矢量函数

如图 1-7 所示, $m(\theta, \lambda)$ 为空间一单位矢量, 它在 OXY 平面上的投影与 X 轴的夹角为 θ , 其方向以 Z 为轴按右旋定则确定。它与 Z 轴间的夹角为 λ 。则

$$\begin{aligned} m(\theta, \lambda) &= \sin \lambda e(\theta) + \cos \lambda k \\ &= \sin \lambda (\cos \theta i + \sin \theta j) + \cos \lambda k \\ &= \{\sin \lambda \cos \theta, \sin \lambda \sin \theta, \cos \lambda\} \end{aligned} \quad (1-14)$$

图 1-7 中, $q(\theta, \lambda)$ 也是空间一单位矢量, 它在 OXY 平面上的投影与 X 轴的夹角也为 θ , 但与 Z 轴的夹角为 $(90^\circ + \lambda)$, 则

$$q(\theta, \lambda) = \sin(90^\circ + \lambda)e(\theta) + \cos(90^\circ + \lambda)k =$$

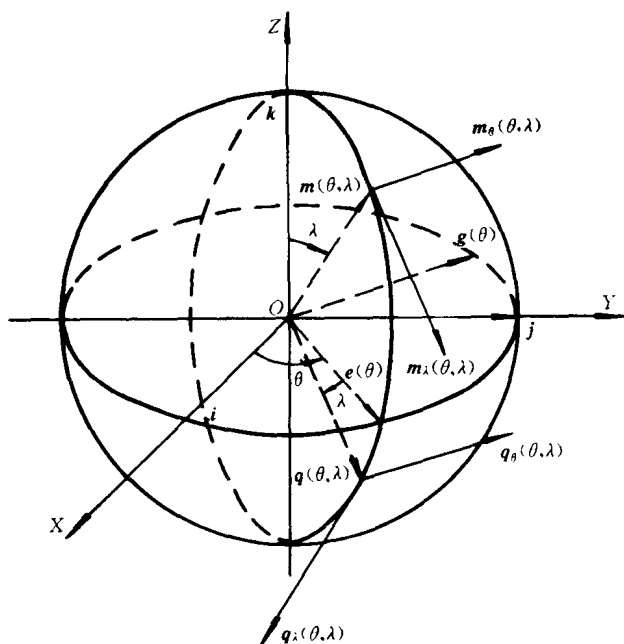


图 1-7

$$\begin{aligned} \cos \lambda (\cos \theta i + \sin \theta j) - \sin \lambda k = \\ \{ \cos \lambda \cos \theta, \cos \lambda \sin \theta, -\sin \lambda \} \end{aligned} \quad (1-15)$$

把 $m(\theta, \lambda)$ 、 $q=(\theta, \lambda)$ 分别对 θ 和 λ 取偏导矢, 则有

$$\begin{aligned} m_\theta(\theta, \lambda) &= \sin \lambda \{-\sin \theta, \cos \theta\} = \sin \lambda g(\theta) \\ m_\lambda(\theta, \lambda) &= \{\cos \lambda \cos \theta, \cos \lambda \sin \theta, -\sin \lambda\} = q(\theta, \lambda) \\ q_\theta(\theta, \lambda) &= \cos \lambda \{-\sin \theta, \cos \theta\} = \cos \lambda g(\theta) \\ q_\lambda(\theta, \lambda) &= \{-\sin \lambda \cos \theta, -\sin \lambda \sin \theta, -\cos \lambda\} = -m(\theta, \lambda) \end{aligned}$$

显然, 由于 $m(\theta, \lambda)$ 和 $q(\theta, \lambda)$ 都是定长变矢, 故 $m_\theta(\theta, \lambda)$ 及 $m_\lambda(\theta, \lambda)$ 都垂直于 $m(\theta, \lambda)$; $q_\theta(\theta, \lambda)$ 及 $q_\lambda(\theta, \lambda)$ 都垂直于 $q(\theta, \lambda)$ 。

正由于圆矢量和球矢量都是定长矢量, 在旋转变换中, 模的值不变, 仅方向发生改变, 故应用于齿轮啮合的研究较为方便。

§ 1-4 直线与平面的矢量方程

一、直线方程

如图 1-8 所示, l 为空间任意直线, P_0 为 l 上的已知点, 其径矢为 r_0 , v 为与 l 平行的不等于零的矢量。若 r 为直线 l 上任意点 P 的径矢, 则直线 l 的参数方程为

$$r = r_0 + P_0P = r_0 + tv \quad (-\infty < t < +\infty) \quad (1-16)$$

若 P_1 为直线 l 上另一已知点, 其径矢为 r_1 , 令上式中的 $v = r_1 - r_0$, 则直线 l 的参数方程又可以写为

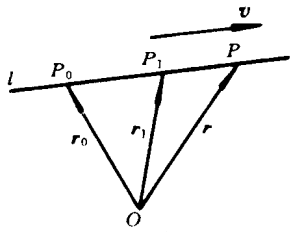


图 1-8

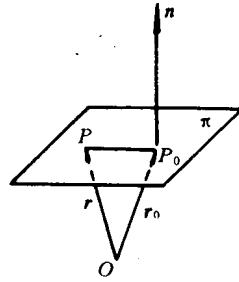


图 1-9

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0) \quad (-\infty < t < +\infty) \quad (1-17)$$

二、平面方程

如图 1-9 所示, P_0 为 π 平面上的已知点, 其径矢为 \mathbf{r}_0 , \mathbf{n} 为与 π 平面垂直的不等于零的向量。若 \mathbf{r} 为 π 平面上任意点的径矢, 则 $\mathbf{P}_0\mathbf{P} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0$, 且与 \mathbf{n} 相垂直, 故 π 平面的矢量方程为

$$\mathbf{n}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 0 \quad (1-18)$$

若 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ 为平行于 π 平面, 但彼此不平行的两个向量。由于 $\mathbf{P}_0\mathbf{P} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0$ 与 $(\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2)$ 相垂直, 如图 1-10 所示, π 平面的矢量方程可写为

$$\{(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0), \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\} = 0 \quad (1-19)$$

若 P_1, P_2 为 π 平面上不与 P_0 共线的两点, 它们的径矢分别为 $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$, 由于 $(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0), (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0), (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_0)$ 为 π 平面上三个不平行的向量, 如图 1-11 所示, π 平面的矢量方程又可写为

$$\{(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0), (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0), (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_0)\} = 0 \quad (1-20)$$

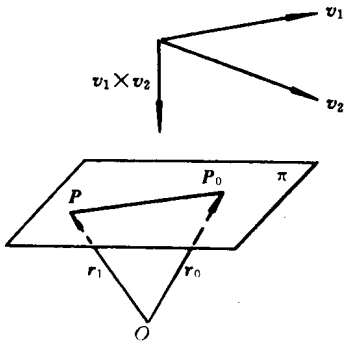


图 1-10

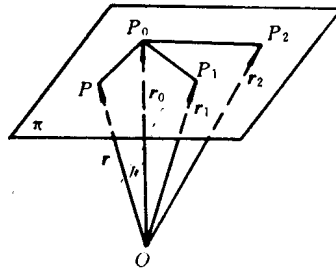


图 1-11

习 题

1-1 证明:

$$(a_1, a_2, a_3) \cdot (b_1, b_2, b_3) = \begin{vmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & a_1 b_3 \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & a_2 b_3 \\ a_3 b_1 & a_3 b_2 & a_3 b_3 \end{vmatrix}$$

1-2 证明: $(r_1 \times r_2) \cdot (r_3 \times r_4) + (r_1 \times r_3) \cdot (r_4 \times r_2) + (r_1 \times r_4) \cdot (r_2 \times r_3) = 0$

1-3 证明: $(r_1 \times r_2, r_3 \times r_4, r_5 \times r_6) = (r_1, r_2, r_4)(r_3, r_5, r_6) - (r_1, r_2, r_3)(r_4, r_5, r_6)$

1-4 证明: $(r_1 \times r_2) \times (r_3 \times r_4) = (r_1, r_2, r_4)r_3 - (r_1, r_2, r_3)r_4$

1-5 证明: $r_1 = 3i + 2j + k$ 与 $r_2 = 2i - 3j$ 垂直。

1-6 证明: $r_1 \times (r_2 \times r_3) + r_2 \times (r_3 \times r_1) + r_3 \times (r_1 \times r_2) = 0$

1-7 证明: $((r_1 + r_2), (r_2 + r_3), (r_3 + r_1)) = 2(r_1, r_2, r_3)$

1-8 证明: i, j, k 对 t 的导数矢量共面, 即

$$\left(\frac{di}{dt}, \frac{dj}{dt}, \frac{dk}{dt} \right) = 0$$

(提示: 动坐标 (O, i, j, k) 的瞬时角速度为 ω_0)

1-9 判断下列命题是否正确。若错误, 应如何修改? 并说明其理由。

① 若 $r_1 \neq 0$, $r_1 \cdot r_2 = r_1 \cdot r_3$, 则 $r_2 = r_3$;

② 若 $r_1 \neq 0$, $r_1 \times r_2 = r_1 \times r_3$, 则 $r_2 = r_3$;

③ $(r_1 \times r_2) \cdot r_3 = r_1 \times (r_2 \cdot r_3)$;

④ $(r_1 \times r_2) \cdot r_3 = r_1 \cdot (r_2 \times r_3)$ 。

1-10 若下列关系成立, 矢量 r_1, r_2 应具有什么特征?

① $|r_1 + r_2| = |r_1| + |r_2|$;

② $|r_1 + r_2| = |r_1| - |r_2|$;

③ $|r_1 - r_2| = |r_1| + |r_2|$;

④ $\frac{r_1}{|r_1|} = \frac{r_2}{|r_2|}$ 。

1-11 下列关系式在 $r(t)$ 具有何种性质时才能成立?

① $|r'| = |r|'$;

② $r \cdot r' = |r| \cdot |r'|$ 。

第二章 曲线论

本章运用微积分来推导描绘一条空间曲线几何性质的三个基本几何量——弧长、曲率和挠率。然后运用曲线上的活动标架,对几种典型的空间曲线和平面曲线进行讨论。

§ 2-1 空间曲线

一、空间曲线的参数方程

经常采用的空间曲线的参数方程为

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \quad (a \leq t \leq b) \quad (2-1)$$

式中: x, y, z 表示曲线上一点在右手直角坐标系中的坐标; t 是参数。如果把 t 看成时间,那末所讨论的曲线可以看作是空间一质点从时刻 a 到 b 间的运动轨迹。不过,一般来说, t 不具有时间这个物理意义,而且其选择并不唯一。

【例 2-1】 圆柱螺旋线

如图 2-1 所示,当空间一动点 P 绕 Z 轴作等速旋转,并沿 Z 轴向作等速移动时,其轨迹就是圆柱螺旋线。设 ω 为动点 P 绕 Z 轴的旋转角速度(常数), r_0 为圆柱半径, p 为螺旋运动参数,则动点 P 从点 $P_0(r_0, 0, 0)$ 出发,经过时间 t 后的位置坐标 x, y, z 可以写为

$$\begin{cases} x = r_0 \cos \omega t \\ y = r_0 \sin \omega t \\ z = p\omega t \end{cases} \quad (-\infty < t < +\infty) \quad (2-2)$$

二、空间曲线的矢量方程

设右手直角坐标系 $OXYZ$ 中的基本矢为 i, j, k ,则可把空间曲线的参数方程式(2-1)改写为矢量方程

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) \quad (a \leq t \leq b) \quad (2-3)$$

式中: $\mathbf{r} = xi + yj + zk$ 。代表空间曲线上点的位置矢量。

而将 $\mathbf{r}(t) = x(t)i + y(t)j + z(t)k$ 称为关于变量 t 的矢量函数。

上式常简写成分量表示式

$$\mathbf{r}(t) = \{x(t), y(t), z(t)\} \quad (2-6)$$

【例 2-2】 圆柱螺旋线

图 2-1 所示圆柱螺旋线的矢量方程可写为

$$\mathbf{r} = \mathbf{OA} + \mathbf{AP} =$$

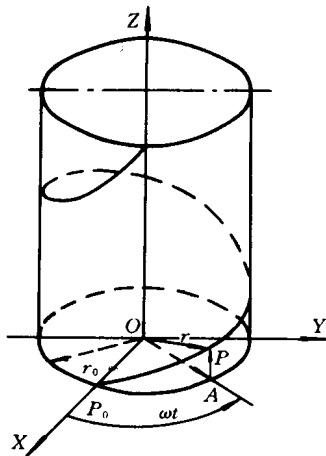


图 2-1

$$r_0 \cos \omega t i + r_0 \sin \omega t j + p \omega t k = \{r_0 \cos \omega t, r_0 \sin \omega t, p \omega t\} \quad (-\infty < t < +\infty) \quad (2-7)$$

三、正则曲线与曲线的正则点

若 $r=r(t)$ 是 K 阶连续可微的函数, 则称该曲线为 C^K 类曲线。当 $K=1$ 时, 即为 C^1 类曲线, 又称为光滑曲线。

若 C^1 类曲线 $r=r(t)$ 上, 有一点 $(t=t_0)$, 且存在

$$r'(t_0) \neq 0$$

即表示 $x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0)$ 三者中, 至少有一个不等于零, 称该点为曲线的正则点。

实际上 $r'(t_0)$ 是很特殊的点, 称为奇异点。如果在一段曲线上 $r'(t) \equiv 0$, 则 $r(t)$ 变成常矢量, 这时一段曲线就缩短为一个点。所以一段曲线上 $r'(t_0) = 0$ 的点一般是孤立点。

若曲线上所有的点都是正则点, 则称该曲线为正则曲线。参数 t 称为正则参数。

【例 2-3】 分析圆柱螺旋线是否为正则曲线。

解: 由式(2-7)可写出它的导矢为

$$r'(t) = \{-r_0 \sin \omega t, r_0 \cos \omega t, p \omega\}$$

由于 $r_0 \neq 0, p \neq 0, \omega \neq 0$, 所以在曲线上任何 t 值均为 $r'(t) \neq 0$, 因此圆柱螺旋线上的点都是正则点, 从而圆柱螺旋线为正则曲线, t 为正则参数。

【例 2-4】 分析平面渐开线 $r=r_0[(\cos t + t \sin t)i + (\sin t - t \cos t)j]$ 是否为正则曲线。

解: 由于平面渐开线的导矢为

$$r'(t) = r_0\{(-\sin t + \sin t + t \cos t), (\cos t - \cos t + t \sin t)\} = r_0\{t \cos t, t \sin t\}$$

可见平面渐开线上除了 $t=0, r'(t)=0$ 的点是奇异点外, 其它的点都是正则点, 即除掉 $t=0$ 一点外, 平面渐开线是一条正则曲线。

§ 2-2 空间曲线的活动标架

一、空间曲线的切线与法面

若已知曲线 Γ 的矢量方程为

$$r = r(t) = \{x(t), y(t), z(t)\}$$

由第一章知, 切线方向由导矢 $\frac{dr}{dt} = r'(t)$ 决定。如图 2-2 所示, 设切点 P_0 的径矢为 $r_0 = r(t_0)$, 切线上的动点 P 的径矢为 $R = R(t)$ 。显然曲线 Γ 在 P_0 点的切线矢量方程为

$$R(t) = r(t_0) + \lambda r'(t_0) \quad (2-8)$$

式中: λ 为切线上的一参数。

由式(2-8)可得

$$x = x_0 + \lambda x'_0, \quad y = y_0 + \lambda y'_0, \quad z = z_0 + \lambda z'_0$$

消去 λ 即得切线的参数方程为

$$\frac{x - x_0}{x'_0} = \frac{y - y_0}{y'_0} = \frac{z - z_0}{z'_0} \quad (2-9)$$

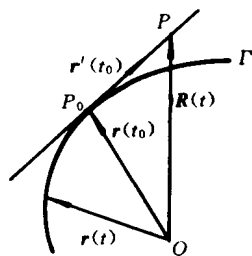


图 2-2

若 $x'_0=y'_0=z'_0=0$, 即点 P_0 为奇异点, 则切线方向不定。

经过切点 P_0 且垂直于切线 $r'(t_0)$ 的每一条直线皆称为曲线 Γ 在点 P_0 的法线, 而这些法线所在的平面就称为曲线 Γ 在点 P_0 的法面。

如图 2-3 所示, 法面上动点 P 的径矢为 $R=R(t)$ 。由于 P_0P 垂直于切矢 $r(t_0)$, 故曲线 Γ 在点 P_0 的法面矢量方程为

$$r'(t_0)[R(t) - r(t_0)] = 0 \quad (2-10)$$

法面的参数方程为

$$x'_0(x - x_0) + y'_0(y - y_0) + z'_0(z - z_0) = 0 \quad (2-11)$$

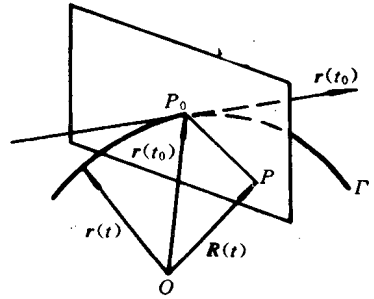


图 2-3

二、空间曲线的密切面与副法线

在 C^1 类曲线的正则点处, 总存在一条切线, 它是最贴近曲线的直线。对于一条 C^2 类空间曲线, 过曲线上一点的切线则可以作无数多个切平面, 其中有一个最贴近曲线的切平面, 它在讨论曲线的性质时具有重要作用。

定义: 过空间曲线上点 P_0 的切线和点 P_0 的邻近一点 Q 可以作一平面 σ , 当点 Q 沿着曲线趋近于点 P_0 时, 平面 σ 的极限位置 π 就称为曲线在点 P_0 的密切面。下面研究曲线 $r=r(t)$ 的密切面方程。

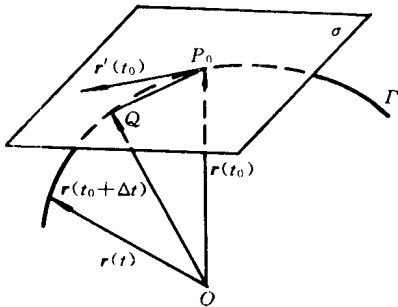


图 2-4

如图 2-4 所示, 曲线 Γ 上的点 P_0 和点 Q 分别对应参数 t_0 和 $t_0 + \Delta t$, 根据泰勒公式有

$$P_0Q = r(t_0 + \Delta t) - r(t_0) = r'(t_0)\Delta t + \frac{1}{2}(r''(t_0) + \epsilon)\Delta t^2$$

其中: $\lim \epsilon = 0$ 。

由于矢量 $r'(t_0)$ 和 P_0Q 都在平面 σ 上, 因此它们的线性组合

$$\frac{2}{\Delta t^2}[P_0Q - r'(t_0)\Delta t] = r''(t_0) + \epsilon$$

也在平面 σ 上。

当点 Q 沿着曲线 Γ 趋近于点 P_0 时, $\Delta t \rightarrow 0$, 这时 $r'(t_0)$ 不动; 但 $\epsilon \rightarrow 0$, 这个线性组合矢量就趋于 $r''(t_0)$ 。所以平面 σ 的极限位置就是由矢量 $r'(t_0)$ 和 $r''(t_0)$ 所确定的平面。若 $r''(t_0)$ 和 $r'(t_0)$ 不平行, 即 $r'(t_0) \times r''(t_0) \neq 0^*$, 则这两个矢量以及点 P_0 就完全确定了曲线 Γ 在点 P_0 的密切面。

如图 2-5 所示, 密切面上的动点 P 的径矢为 $R=R(t)$, 由于 P_0P 与 $r'(t_0)$ 、 $r''(t_0)$ 在同一平面上, 故得曲线 $r(t)$ 在点 P_0 的密切面的矢量方程为

$$\{R(t) - r(t_0), r'(t_0), r''(t_0)\} = 0 \quad (2-12)$$

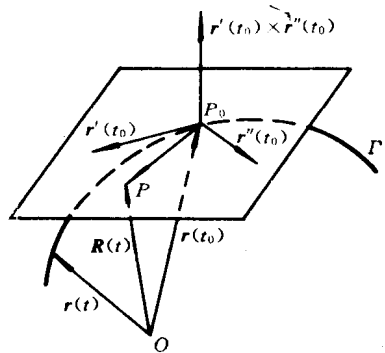


图 2-5

* 对曲线上某一点($t=t_0$)若有 $r'(t_0) \times r''(t_0) = 0$, 亦即 $r'(t_0) \parallel r''(t_0)$, 则称该点为曲线上的逗留点。以后我们假定曲线上所讨论的点为非逗留点, 即假定 $r'(t_0) \times r''(t_0) \neq 0$, 亦即 $r'(t_0)$ 不平行于 $r''(t_0)$ 。