景山学校学习之友丛书

高中数学
灵活基本训练题例

中国新闻出版社

高中数学
灵活基本训练题例

徐望根
曹木秀
王念亲

中国新闻出版社
一九八五年五月

责任编辑：徐望根
封面设计：赵之洪

高中数学灵活基本训练题例
北京景山学校学习之友丛书编辑委员会
※
中国新闻出版社出版
新华书店北京发行所发行
北京景山学校印刷厂印刷
787×1092毫米　32开本　6.5印张　146千字
1985年6月第一版　1985年6月第一次印刷
印数1——295000册
统一书号：7363·013　定价：1.10元

前　言

在数学教学中，充分而适当地选配例题和习题由学生解答，是保证学生牢固地掌握基础知识、熟练地掌握基本技能，并在分析问题和解决问题的能力上，得到进一步的培养和提高的重要手段之一。教材中所包含的例题和习题，特别是在习题中还按一定的比例包含着通常所说的基本题和综合题等不同性质的题，其主要目的就是根据教学大纲的要求，为了发挥上述的学生解答例题和习题的作用而编选的。但是，由于教材中的题，是按照广大学生一般的知识和能力水平而编选的，自不待言在班级教学中，为了贯彻因材施教原则，教师在为学生选配例题和习题时，势必要针对教材中编选的题有所挑选、改编或补充，以使学生通过解题受益更大，尤其是在分析问题和解决问题的能力上得到充分的培养和提高。

景山学校数学教师徐望根、曹木秀、王念亲同志，在历年的高中教学工作中，根据教学大纲的要求，按照任教班级学生的具体水平、针对教材中编选例题和习题的深广度，积累了一些补充题。在编选这些补充题的过程中，感到教材中作为某些课题的基本题与综合题之间，在难度和繁度以及灵活性和技巧性等方面距离过大。因而编选了一些与一般基本题相比具有一定的灵活性和技巧性，但与一般综合题相比又较为简易的补充题。由于这类题使学生解答后受益较大，确实起到了承前启后的作用，因而愿意把这类题作进一步的整理和选择，印刷成册，供中学数学老师和高中同学们用作参考。

从选题的方面来说，这本册子还不够全面。而从各题的难

易与繁简程度上说，由于是按照任教班级学生的具体水平而确定的，也不尽具有一般性。因而只是一本题例，即《高中数学灵活基本训练题例》。希望继续积累，使这类题日趋全面并能较具一般性。

这本题例不仅供中学数学老师和高中同学们教与学及高考复习的参考，也可用作中等专业学校的数学老师和同学们以及校外进修高中数学课程的同学们的参考。为了阅读方便，这本题例按代数、立体几何、解析几何、微积分等学课进行划分，归类为四部分。在每一题后都附有参考解法；而且还穿插有"附注"，其中指出了求解的难点、得解的关键以及解得的主要方法等，用以帮助读者明确知识的运用和总结解题经验。

正当这本题例即将付印之际，略志数语如上，用表祝贺之意。

钟善基

1985年于北京师大

目　录

一、代　　数

(一) 实数和式

1. 从集合的角度指出记号 0，{0}，Φ，{Φ} 的含意.

解：0 表示数零，即 0，它不是一个集合；{0} 是含有一个元素 0 的集合，是非空集；Φ 是空集合的记号；{Φ} 是含有一个元素 Φ（以空集合 Φ 作为一个元素）的集合，是非空集.

附注：可以打个比方来体会{Φ}是一个非空集：Φ 好比是一个空的箱子，{Φ}好比是把这个空箱子放在一个空的房间里，那末这个房间就不空了．所以{Φ}是含有一个元素 Φ 的集合，是非空集．

2. 已知对数 $\lg N$ 的首数是 a，尾数是 p，求对数 $\lg\frac{1}{N^2}$ 的首数和尾数．

解：$\because\quad \lg N = a + p\qquad (a\in Z,\ p\in[0,1))$，

$$\therefore\quad \lg\frac{1}{N^2} = \lg N^{-2} = -2\lg N$$

$$= -2(a+p)$$

$$= -2a - 2p.$$

1°．当 $p=0$ 时，$\lg\frac{1}{N^2}$ 的首数为 $-2a$，尾数为 0．

2°．当 $p\in(0,\frac{1}{2}]$ 时，有

$$\lg\frac{1}{N^2}=-2a-2p$$

$$=(-2a-1)+(1-2p).$$

此时，$1-2p\in[0,1)$，故$\lg\frac{1}{N^2}$的首数为$-(2a+1)$，而尾数为$1-2p$。

3°. 当$p\in(\frac{1}{2},1)$时，有

$$\lg\frac{1}{N^2}=-2a-2p$$

$$=(-2a-2)+(2-2p).$$

此时，$2-2p\in(0,1)$，故$\lg\frac{1}{N^2}$的首数为$-2(a+1)$，而尾数为$2(1-p)$。

附注：要注意的是，对数的首数是整数，而其尾数为正的纯小数或零。

3. 已知a是自然数，a^{100}是一个120位数，试问$\frac{1}{a}$从小数点后第几位开始出现非零数字。

解：∵ a^{100}是120位数，

∴ $119<\lg a^{100}<120$,

$1.19<\lg a<1.20$,

$-1.20<-\lg a<-1.19$,

$-1.20<\lg\frac{1}{a}<-1.19$,

$\overline{2}.80<\lg\frac{1}{a}<\overline{2}.81.$

$\therefore\quad \dfrac{1}{a}$从小数点后第 2 位开始出现非零数字.

附注：此类题是根据常用对数的首数的确定法则来解的. 这里并不能求出$\lg\dfrac{1}{a}$，但可以确定$\lg\dfrac{1}{a}$取值范围，从而求出$\lg\dfrac{1}{a}$的首数是-2.

4. 已知$A=\{x\mid x=2n-1,\ n\in Z\}$,

$B=\{x\mid x=2n+1,\ n\in Z\}$，求证$A=B$.

证：1°. 设$x_1\in A$，那么存在$n_1\in Z$，有$x_1=2n_1-1$. 但$x_1=2n_1-1=2(n_1-1)+1$，而$n_1-1\in Z$，故$x_1\in B$.

2°. 设$x_2\in B$，那么存在$n_2\in Z$，有$x_2=2n_2+1$. 但$x_2=2n_2+1=2(n_2+1)-1$，而$n_2+1\in Z$，故$x_2\in A$.

由1°、2°知$A=B$.

附注：A、B中元素的表达形式的互相转化，是解这类题的常用方法.

读者思考：

已知$A=\{x\mid x=4n\pm 1,\ n\in Z\}$,

$B=\{x\mid x=2n-1,\ n\in Z\}$，求证$A=B$.

5. 设$b>a>0$，且a，$b\in Q$，试用统一的表达式分别在区间$(a,\ b)$内找出无穷多个有理数和无理数.

解：在$(a,\ b)$内，这无穷多个有理数是

$$\alpha_m=a+\frac{b-a}{1+m}\qquad (m=1,\ 2,\ 3,\ \cdots).$$

在$(a,\ b)$内，这无穷多个无理数是

$$\beta_n=a+\frac{(b-a)\sqrt{2}}{2n}\qquad (n=1,\ 2,\ 3,\cdots).$$

附注：①前者主要根据有理数的稠密性，后者主要根据实

数的连续性和有理数不具有连续性。

②上面的两个表达式所表示的有理数和无理数分别是(a, b)内的有理数和无理数的一部分，并不是全部，因此，除了上面的两种表达式以外，还可以有其它各种不同的表达式。

读者思考：

（1）设$1<\varepsilon<2$，且$\varepsilon\in R$，试找出无穷多个$x\in Q$，使$|x-2|<\varepsilon$；

答：如$x=2+\dfrac{1}{m}$　$(m=1, 2, 3, \cdots)$。

（2）在(e, π)内找出无穷多个无理数。

答：如$e+\dfrac{(\pi-e)\sqrt{2}}{2m}$　$(m=1, 2, 3, \cdots)$。

6.（1）已知a、b是正有理数，而$\sqrt{a}$、$\sqrt{b}$是无理数，试证$\sqrt{a}+\sqrt{b}$是无理数；

（2）试证$\cos 10°$是无理数。

证：（1）设$\sqrt{a}+\sqrt{b}$是有理数，那末$\dfrac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$也是有理数，即$\sqrt{a}-\sqrt{b}$也是有理数。由此得$(\sqrt{a}+\sqrt{b})+(\sqrt{a}-\sqrt{b})$是有理数，即$2\sqrt{a}$是有理数，得$\sqrt{a}$是有理数。这与已知$\sqrt{a}$是无理数矛盾，故$\sqrt{a}+\sqrt{b}$是无理数。

（2）如果$\cos 10°$是有理数，那末$\cos 30°=4\cos^3 10°-3\cos 10°$也是有理数，但$\cos 30°=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$是无理数，故矛盾，由此得$\cos 10°$是无理数。

附注：证明一个数为无理数，一般用反证法。有的反证法把所要证的数设为有理数，经过一些推理运算，引出矛盾（如证$\sqrt{2}$是无理数）；也有的反证法是利用有理数对四则运算的封闭性，经过一些恰当的推理和运算，与已知条件矛盾（如(1)），或与其它明显的事实矛盾（如(2)）等。

读者思考：

（1）试证$\lg 7$为无理数；

（2）试证$\sin 10^\circ$为无理数。

7．试确定整数a和b的值，使方程

$$3x^3+ax^2+bx+12=0$$

的一个根等于$1+\sqrt{3}$。

解：∵ $1+\sqrt{3}$是原方程的根，

∴ $3(1+\sqrt{3})^3+a(1+\sqrt{3})^2+b(1+\sqrt{3})+12=0$。

整理得 $4a+b+42+(2a+b+18)\sqrt{3}=0$。

∵ a、b是整数，$\sqrt{3}$是无理数，

∴ 有 $\begin{cases}4a+b+42=0\\2a+b+18=0.\end{cases}$

解得 $a=-12$，$b=6$。

此即为所求。

附注：这里运用了形如$A+B\sqrt{K}$（这里A、$B\in Q$，$\sqrt{K}\overline{\in Q}$）的数的相等条件，即如果a、b、c、$d\in Q$，且$\sqrt{m}\overline{\in Q}$，则$a+b\sqrt{m}=c+d\sqrt{m}\Longleftrightarrow\begin{cases}a=c\\b=d\end{cases}$。特别有$a+b\sqrt{m}=0\Longleftrightarrow\begin{cases}a=0\\b=0.\end{cases}$

读者思考：

用反证法证明“附注”中的题目。

8．下列各式在什么条件下，才能成立？

(1) $\dfrac{(\sqrt[7]{a})^7}{a}=1$;

(2) $(\sqrt[4]{a})^4=a$;

(3) $4\ln(-x)=\ln x^4$;

(4) $|\log_x 3-\log_x 2|=-(\log_x 3-\log_x 2)$。

解：(1) 当 $a\neq 0$时原式成立。

(2) 当 $a\geqslant 0$时原式成立。

(3) 当$x<0$时原式成立。

(4) 当 $0<x<1$ 时原式成立。

附注：考虑一个式子有意义，常从以下几个方面研究：

① 分母不等于0。

② 偶次根式下，被开方数或式必须是非负数。

③ 对数真数大于0，而底数为非1的正数。

④ 一个数或式的绝对值是非负数。

⑤ 其他。

9．写出使等式 $\sqrt{\dfrac{ac^4}{b^2}}\cdot\dfrac{1}{\sqrt[3]{d^3}}=-\dfrac{c^2\sqrt{a}}{bd}$ 成立的条件。

解：使等式两边的式子都有意义的条件是

$$\begin{cases} a\geqslant 0 \\ b\neq 0 \\ d\neq 0. \end{cases}$$

当$b<0$时，有$|b|=-b$，得

$$\sqrt{\frac{ac^4}{b^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{d^3}}=\frac{c^2\sqrt{a}}{|b|d}=-\frac{c^2\sqrt{a}}{bd}.$$

故原等式成立的条件是 $\begin{cases} a\geqslant 0 \\ b<0 \\ d\neq 0. \end{cases}$

附注：这类题，一般要从两方面考虑：先求出使等式两边的式子有意义的字母的取值范围，再进一步从中求出使等式成立的字母的取值范围（或其他条件）。

10．已知$\frac{a}{b+c}=\frac{b}{a+c}=\frac{c}{a+b}$，求$\frac{a}{b+c}$之值。

解：设 $\frac{a}{b+c}=\frac{b}{a+c}=\frac{c}{a+b}=k$，有

$$a=(b+c)k \qquad (1)$$

$$b=(c+a)k \qquad (2)$$

$$c=(a+b)k \qquad (3)$$

(1)＋(2)＋(3)得

$$a+b+c=2(a+b+c)k,$$

$$(a+b+c)(2k-1)=0,$$

$$k=\frac{1}{2} \quad 或 \quad a+b+c=0.$$

当$a+b+c=0$时，有$a=-(b+c)$，根据已知$b+c\neq 0$，得$\frac{a}{c+b}=-1$。

故 $\frac{a}{b+c}$之值为$\frac{1}{2}$或-1。

附注：本题也可用等比定理求解，但要注意分情况讨论：

1°．当$a+b+c\neq 0$时，有

$$\frac{a}{b+c}=\frac{b}{a+c}=\frac{c}{a+b}=\frac{a+b+c}{2(a+b+c)}=\frac{1}{2}.$$

2°．当$a+b+c=0$时，$\because$ $b+c\neq 0$，$\therefore$ $\frac{a}{b+c}=-1$。

11．比较$\frac{3}{2}$，$\log_8 27$，$\log_9 25$的大小。

解1：∵ $\log_8 27 = \log_{2^3} 3^3 = \log_2 3 = \log_4 9 > \log_4 8$

$= \log_4 4^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2}$，

而 $\log_9 25 < \log_9 27 = \log_9 9^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2}$，

∴ $\log_9 25 < \frac{3}{2} < \log_8 27$.

解2：∵ $\log_8 27 > \log_9 27 = \frac{3}{2}$，

$\log_9 25 < \log_9 27 = \frac{3}{2}$，

∴ $\log_9 25 < \frac{3}{2} < \log_8 27$.

附注：选择其中两个换成同底，然后比较真数的大小；或换成同真数，然后比较底数的大小，常是这类对数比较大小的途径。

读者思考：

比较 $\log_{\sqrt{2}} 1.74$ 与 $1 + \log_{16} 5$ 的大小。

答：$\log_{\sqrt{2}} 1.74$ 大些。

12. 已知 $\log_3 2 = a$，$\log_5 2 = b$，试用 a、b 表示 $\log_{30} 90$.

解：$\log_{30} 90 = \frac{2 + \log_3 10}{1 + \log_3 10}$

$= \frac{2 + \log_3 2 + \log_3 5}{1 + \log_3 2 + \log_3 5}$

∴ $= \frac{2 + a + \frac{\log_2 5}{\log_2 3}}{1 + a + \frac{\log_2 5}{\log_2 3}}$

$$=\frac{2+a+\dfrac{\log_3 2}{\log_5 2}}{1+a+\dfrac{\log_3 2}{\log_5 2}}$$

$$=\frac{2+a+\dfrac{a}{b}}{1+a+\dfrac{a}{b}}$$

$$=\frac{a+2b+ab}{a+b+ab}.$$

附注：这类题常利用换底公式和对数的运算法则，把要表示的对数式充分展开，化成底为质数的若干对数的代数式，再与已知条件挂上钩，具体做时，要根据已知条件之“矢”去射未知结论之“的”。

读者思考：

已知：$\lg 1690=a$，$\lg 63.7=b$，求 $\lg 91$。

答：$\lg 91=\frac{1}{4}(a+2b+1)$。

13．在直角△ABC中，a、b为直角边，c为斜边，求证 $\log_{b+c}a+\log_{c-b}a=2\log_{b+c}a\cdot\log_{c-b}a$。

证：$\because$ $c^2=a^2+b^2$，$\therefore$ 有

$$\log_{b+c}a+\log_{c-b}a$$

$$=\frac{1}{\log_a(b+c)}+\frac{1}{\log_a(c-b)}$$

$$=\frac{\log_a a^2}{\log_a(c+b)\log_a(c-b)}$$

$$=\frac{2}{\log_a(c+b)\log_a(c-b)}$$

$$=2\log_{c+b}a\cdot\log_{c-b}a.$$

附注：在证明对数等式时，常考虑用换底公式化成同底对数，当真数相同而底数不同时，更应如此。

14. 如果 $a>0$，$b>0$，且 $a^b=b^a$，求证

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{a}{b}}=a^{\frac{a-b}{b}}.$$

证1： 1°．当 $a=1$时，则 $a^b=1$，$b^a=1$，得 $b=1$，故有

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{a}{b}}=a^{\frac{a-b}{b}}=1.$$

2°．当 $a\neq1$时，由 $a^b=b^a$ 两边取以 a 为底的对数得

$$b=a\log_a b,$$

即
$$1=\frac{a}{b}\log_a b.$$

∴
$$\frac{a}{b}-1=\frac{a}{b}-\frac{a}{b}\log_a b$$

$$=\frac{a}{b}\left(1-\log_a b\right)$$

$$=\frac{a}{b}\left(\log_a a-\log_a b\right)$$

$$=\frac{a}{b}\left(\log_a\frac{a}{b}\right)$$

$$=\log_a\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{a}{b}}.$$

得
$$a^{\frac{a}{b}-1}=\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{a}{b}}.$$

即
$$\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{a}{b}}=a^{\frac{a-b}{b}}.$$

由1°、2°知，原等式得证．

证2： $\because\quad a^b=b^a,\quad\therefore\quad b=a^{\frac{b}{a}}$，有

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{a}{b}}=\left(a^{1-\frac{b}{a}}\right)^{\frac{a}{b}}=a^{\left(1-\frac{b}{a}\right)\frac{a}{b}}=a^{\frac{a-b}{b}}.$$

故原式得证．

附注：在证明指数形式恒等式时，常利用已知等式的两边取对数，化为对数恒等式证之(如证１)．有时也可用指数幂的运算法则证之（如证２）．

读者思考：

已知 $y=10^{\frac{1}{1-\lg x}}$，$z=10^{\frac{1}{1-\lg y}}$，试证 $x=10^{\frac{1}{1-\lg z}}$．

15．化简$\sqrt{5^{2\log_5\lg x}-2\lg x+1}$．

解：原式$=\sqrt{\lg^2x-2\lg x+1}$

$$=\sqrt{(\lg x-1)^2}$$

$$=|\lg x-1|$$

$$=\begin{cases}\lg x-1 & (x\geqslant10)\\ 1-\lg x & (1<x<10).\end{cases}$$

附注：注意一个非负数的算术平方根是一个非负数．

读者思考：

(1) 原式$=1-\lg x$时，为什么取 $1<x<10$，而不取 $0<x<10$?

(2) 化简$\sqrt{5^{2\log_5\lg x}}$．