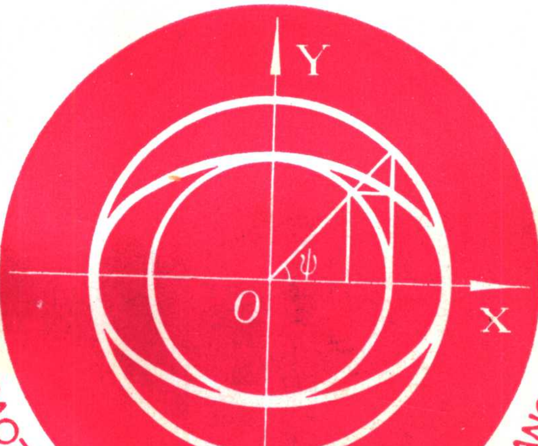
中学数学自学与研究丛书

ZHONGXUE SHUXUE ZIXUE YU YANJIU CONGSHU

高中数学专题选讲

刘国材 编



GAOZHONG SHUXUE ZHUANTI XUANJIANG

辽宁人民出版社

中学数学自学与研究丛书

高中数学专题选讲

辽宁省实验中学

刘国材 编

辽宁人民出版社

一九八五年·沈阳

高中数学专题选讲

Gao Zhong Shuxue Zhuanti Xuanjiang

刘 国 材 编

辽宁人民出版社出版　辽宁省新华书店发行
（沈阳市南京街6段1里2号）　锦 州 印 刷 厂 印 刷

字数：156,000　开本：787×1092 1/32　印张：7 5/8
印数：1—34,000
1985年6月第1版　1985年6月第1次印刷

责任编辑：俞晓群　封面设计：赵多良

统一书号：7090·325　定价：0.99元

出版说明

为了满足中学师生和广大自学者的需要，我们根据教育部中学教学大纲的精神，组织编写了这套《中学数学自学与研究丛书》。

这套丛书的内容大致包括：初等数学知识的综合性研究；中学数学教学的经验总结；数学史、数学逻辑和数学方法论的介绍；还有数学教学中的一些补充性的专题等。

这套丛书的编辑出版，是对中学数学知识进行系统的归纳和研究的一种尝试。我们热切希望数学界和教育界人士，以及广大读者不吝赐教，并为我们提供新的选题，使这套丛书进一步充实和完善。

前　言

从一九七八年以来，由于工作需要，我在校内外作了多次数学专题讲座。

在总复习阶段，高中以专题讲座的形式进行教学的次数较多。我按照教学大纲的要求，根据教材和教学中的实际情况，认真确定专题，并注意收集课后学生的反映。几年来，随着教学大纲和教材的变化，我对这些专题讲座的内容不断地进行修改和补充，尤其是注意把历年积累的教学资料和学生的反馈情况、意见充实进来。

本书仅是近年所作过的专题讲座中的一部分。没有把全部材料收入的原因很多：有的专题（如排列组合，数学归纳法），已有同一内容的书籍出版；有的专题（如反三角函数、三角方程），教材已指明对其内容要求不高；有的专题（如平面几何的某些专题），当前已经不是高中总复习的重点；有的专题（如复数在几何中的应用），可在课外活动中介绍，不宜在总复习中讲授。还有其它原因不再一一赘述。

本书各讲的内容都尽可能地从现行教材中的例题和习题，以及教学中的问题引入。对教材习题的补充是讲座必不可少的内容，但是补充不着重在数量，而着眼于必要的综合、拓广和加深；同时注意对所选习题深度的控制。在每一讲中，总要夹杂着一些长短不等的议论，指明常见的与内容

有关的错误，以及各种方法的特点等等。

总之，由于各讲的内容很不相同，讲授的方法也很难完全一致，总的来说是“有话则长，无话则短”。能否体现原来所设想的特点，议论是否恰当，还有哪些缺点和错误，请读者评论和教正。

本书中所指的现行教材是：

（1）全日制十年制学校高中课本，《数学》第一册至第四册（中小学通用教材编写组编，人民教育出版社，1979年1月——1980年4月第一版）；

（2）六年制重点中学高中数学课本（试用本），《代数》第一、二册。《立体几何》、《解析几何》（人民教育出版社中小学数学编辑室编，人民教育出版社，1981年12月——1982年12月第一版）。

编　者

1984年5月

目　　录

一　含有字母的问题及其讨论

在中学数学教学中，含有字母的公式，含有字母的习题、例题，含有参变量的问题，是十分普遍的，随着年级的增高，对学生的要求也越来越高，数学教学的内容抽象性也越来越突出．在讨论问题中，使用字母表示已知数和带有参变量也会越来越多．使用字母表示已知数和参数，给讨论问题带来了许多方便，同时也给教学增加了许多困难，但是这些对学生学习都是必要的，也是有好处的．

在现行教材中，有专门章节讨论含有字母的问题．例如，二元线性方程组的解的讨论．虽然在教学过程中多次涉及对含有字母的问题的讨论．但是教学的实践表明，学生处理此类问题一向是很困难的，对此，应该引起注意．

本讲将首先列举一些事例，来说明学生回答含有字母的问题时的错误或不完整的答案是十分普遍的．各种教科书、参考书在此类问题上的疏误也是很多的；其次将对常见的一些含有字母的问题进行某种分类；然后着重介绍一些含有字母的问题的讨论的方法．

（一）不完整的和错误的答案是十分普遍的

引起我对含有字母的问题的讨论的重视，是1978年辽宁

省数学竞赛，当时我有机会从事省数学竞赛试卷分析的工作，一个竞赛试题的错误率使我震惊，该题是解不等式 $(m+n)x>c$. 在参加竞赛的近300名学生中，能得出完整的解答的学生人数不足2%！多数学生不知道要先后对 $m+n$ 和 c 进行必要的讨论，如果说当时是刚刚结束了十年动乱，出现这种现象是可以理解的话，那么，我们看一个目前教学中的例子.

在一次代数课上，这堂课的教学内容是等比数列的前 n 项和的公式. 在学生进行指定范围的教材阅读之后，教师检查学生阅读的情况，向学生提出问题：叙述公比为 q 的等比数列的前 n 项和的公式.

学生答：$S_n=\dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q}$.

我请其他同学也发表意见，结果全班几乎无人对上面的回答提出异议！正确、全面的回答应该是

$$S_n=\begin{cases} na_1 & (q=1) \\ \dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q} & (q\neq1) \end{cases}$$

教科书中明明白白地写着："很明显，当 $q=1$ 时，$S_n=na_1$ "."很明显"的结论，在学生的心目中竟然变成"很不明显了".

事情并没有到此结束. 仅仅是几天以后，在课堂练习时发现，对下面两个习题的解答，差不多是百分之百的学生又重复了前面提问时所出现的错误，他们对两个习题的解答是这样的：

（1）　$$(a-1)+(a^2-2)+\cdots+(a^n-n)$$

$$=(a+a^2+a^3+\cdots+a^n)-(1+2+3+\cdots+n)$$

$$=\frac{a(1-a^n)}{1-a}-\frac{n(1+n)}{2}$$

（2）　$$\left(x+\frac{1}{y}\right)+\left(x^2+\frac{1}{y^2}\right)+\left(x^3+\frac{1}{y^3}\right)$$

$$+\cdots+\left(x^n+\frac{1}{y^n}\right)$$

$$=(x+x^2+x^3+\cdots+x^n)+\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{y^2}\right.$$

$$\left.+\frac{1}{y^3}+\cdots+\frac{1}{y^n}\right)$$

$$=\frac{x(1-x^n)}{1-x}+\frac{\frac{1}{y}\left(1-\frac{1}{y^n}\right)}{1-\frac{1}{y}}$$

第（1）题的解答是不全面的，正确的答案是：

$$\text{原式}=\begin{cases}\dfrac{a(1-a^n)}{1-a}-\dfrac{n(1+n)}{2} & (a\neq 1, a\neq 0)\\[2ex] -\dfrac{n(1+n)}{2} & (a=0)\\[2ex] n-\dfrac{n(1+n)}{2} & (a=1)\end{cases}$$

第（2）题的解答就更不全面了，它仅仅是当$x\neq 1$，$x\neq 0$，$y\neq 1$时的结果，遗漏掉下面的各种情况的相应结果：

$$
\text{原式}=\begin{cases}
\dfrac{\dfrac{1}{y}\left(1-\dfrac{1}{y^n}\right)}{1-\dfrac{1}{y}} & (x=0,\ y\neq 1)\\[2ex]
n+\dfrac{\dfrac{1}{y}\left(1-\dfrac{1}{y^n}\right)}{1-\dfrac{1}{y}} & (x=1,\ y\neq 1)\\[2ex]
n & (x=0,\ y=1)\\
2n & (x=1,\ y=1)\\
\dfrac{x(1-x^n)}{1-x}+n & (x\neq 1,\ x\neq 0,\ y=1)
\end{cases}
$$

对于含有字母的问题的解答，不仅是学生容易出现错误和疏漏，就是参考书，甚至于教科书中也难免有这种疏漏的地方．至于教师在解答问题时，出现此类问题也是屡见不鲜的．对于含有字母的问题的解答，学生容易发生错误的主要原因是这种问题本身比较困难，各种有关参考资料和教师在教学过程中的类似错误不能及时发现和纠正，以致谬误流传，对学生也有一定的影响．

下面再列举教学中的几个例子，它们有的是摘自教科书，有的选自参考书，有的是学生对教科书中习题的解答．问题类型虽不相同，但是解答中却犯有共同的毛病，即解答过程不完整．

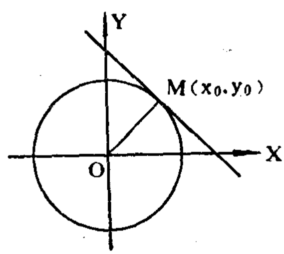


图 1—1

（3）已知圆的方程是 $x^2+y^2=r^2$，求经过圆上一点

$M(x_0, y_0)$的切线方程.

解 如图1—1，设切线的斜率为k，半径OM的斜率为k_1. 因为切线垂直于过切点的半径，得

$$k=-\frac{1}{k_1}$$

又 $$k_1=\frac{y_0}{x_0}$$

∴ $$k=-\frac{x_0}{y_0}.$$

经过点$M(x_0, y_0)$的切线方程是

$$y-y_0=-\frac{x_0}{y_0}(x-x_0), x_0x+y_0y=x_0^2+y_0^2$$

即 $$x_0x+y_0y=r^2$$

（4）过抛物线$y^2=2px$的焦点的一条直线和这抛物线相交，两个交点的纵坐标为y_1、y_2.

求证：$y_1y_2=-p^2$.

证明 两交点的坐标是 $(\frac{y_1^2}{2p}, y_1)$, $(\frac{y_2^2}{2p}, y_2)$.

它们与焦点 $(\frac{p}{2}, 0)$ 共线，得

$$\frac{y_1-0}{\frac{y_1^2}{2p}-\frac{p}{2}}=\frac{y_2-0}{\frac{y_2^2}{2p}-\frac{p}{2}}$$

整理得 $$y_1y_2(y_2-y_1)=p^2(y_1-y_2)$$

∴ $$y_1y_2=-p^2.$$

（5）求证 $\mathrm{arctg}x+\mathrm{arcctg}x=\frac{\pi}{2}$.

证明 设 $\alpha=\mathrm{arctg}x, \beta=\mathrm{arcctg}x$.

∵　　$-\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{\pi}{2}, 0<\beta<\pi,$

∴　　$-\frac{\pi}{2}<\alpha+\beta<\frac{3\pi}{2}$.

又　　$\operatorname{ctg}(\alpha+\beta)=\frac{1-\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}=\frac{1-x\cdot\frac{1}{x}}{x+\frac{1}{x}}=0$

∴　　$\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$.

（6）已知$\sin\beta=m\ \sin(2\alpha+\beta)$，求证

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{1+m}{1-m}\operatorname{tg}\alpha$$

证明　由已知$\sin\beta=m\ \sin(2\alpha+\beta)$，得

$$\frac{\sin(2\alpha+\beta)}{\sin\beta}=\frac{1}{m}$$

由合分比定理，得

$$\frac{\sin(2\alpha+\beta)+\sin\beta}{\sin(2\alpha+\beta)-\sin\beta}=\frac{1+m}{1-m}$$

也就是　　$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)\cdot\operatorname{ctg}\alpha=\frac{1+m}{1-m}$

∴　　$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{1+m}{1-m}\cdot\operatorname{tg}\alpha.$

（7）有一个圆锥如图1—2，它的底面半径为r，母线长为l，在母线SA上有一点B，$AB=a$、求由A绕圆锥一周到B的最短距离是多少？

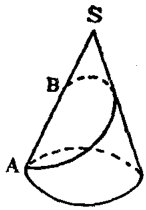


图　1—2

解　把圆锥沿母线SA展开成扇形（见图1—3），线段AB就是最短距

离，由余弦定理，

得

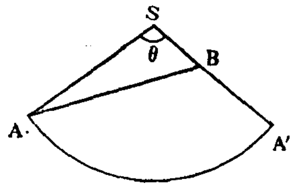


图 1—3

$$|AB|=\sqrt{l^2+(l-a)^2-2l(l-a)\cos\theta}$$

其中， $\theta=\dfrac{2\pi r}{l}$

以上选自解析几何、三角和立体几何的五个例子的解答或证明过程都是不完整的.

（3）题的解答是$x_0\neq 0, y_0\neq 0$的情况；

（4）题的证明忽略了$y_1{}^2=y_2{}^2=P^2$的情况；

（5）题的证明忽略了$x=0$的情况；

（6）题的证明的是对$\sin\beta\neq 0$时，等式成立，而忽略了$\sin\beta=0$，$\alpha=k\pi$时的情况；

（7）题的结果是当$0<\theta<\pi$，也就是$l>2r$时，才是正确的. 原题应加条件$l>2r$或$0<\theta<\pi$.否则，当$\pi\leqslant\theta<2\pi$时，“由A绕圆锥一周到B的最短距离”十分费解. 因此，符合题意的最短距离是指什么就首先成了问题.

问题中含有字母，稍不注意不仅会出现问题本身的不严密，解答过程不完整，有时还会出现“增解”甚至更严重的错误.

（二）含字母问题的几种情况

含有字母的问题虽然容易出现命题或解答的疏误，但是处理这类问题也不必过份神经紧张，并不是每一个含有字母的问题都会出现解答中对字母进行讨论的困难局面．把含有字母的问题可以初步地作如下分类：含有字母但不必讨论的问题；含有字母可以回避讨论的问题；含有字母必须进行讨论的问题．

1　含有字母但不必进行字母讨论的问题

下面的两例中都含有字母或参数，然而对它们的解答自始至终不必进行讨论．

例 1　已知直线$y=kx+b$　$(k\neq 0)$是抛物线 $y=mx^2$和$y=-[x-(m+1)]^2$的公切线$(m>0)$．求k和b的值．

解　依题意，

$$\begin{cases} y=kx+b \\ y=mx^2 \end{cases}$$

消去y，得

$$mx^2-kx-b=0$$

此方程应有两个相同的实根，判别式为零，即

$$k^2+4mb=0 \qquad ①$$

同理

$$\begin{cases} y=kx+b \\ y=-[x-(m+1)]^2 \end{cases}$$

消去y，得

$$x^2+[k-2(m+1)]x+(m+1)^2+b=0$$

此方程的判别式也等于零，即

$$[k-2(m+1)]^2-4[(m+1)^2+b]=0$$

得 $$k^2-4(m+1)k-4b=0 \quad ②$$

由①+②×m，消去b，得

$$(1+m)(k^2-4km)=0$$

∵ $1+m\neq 0, k\neq 0$,

∴ $k=4m$.

代入①，得

$$b=-4m.$$

例 2 求抛物线$y^2=4p(1-m)(x+mp)$的准线方程($p>0, m\neq 1$).

解 将坐标系平移，新原点在原坐标系中的坐标是$O'(-mp, 0)$，则在新坐标系中抛物线的方程是$y'^2=4p(1-m)x'$，它的准线方程是$x'=-p(1-m)$.

由平移变换公式

$$\begin{cases}x'=x+mp\\ y'=y\end{cases}$$

消去x'，得准线在原坐标系的方程

$$x+mp=-p(1-m)$$

即 $$x=-p$$

例 1 和例 2 没有对字母进行讨论的主要原因是原题本身对有关字母带有限制条件，这些条件有的是为了保证问题本身严密、确切. 有的是为了避开讨论，减少解题的困难. 这

种利用限制条件避免讨论的情况是比较多见的.

本讲的重点不是介绍这种问题. 实践表明，对于含有字母又不必进行讨论的问题，当运算量较大时，错误率还是很高的. 尽管此类习题在本讲中已不再出现，使我们能把精力集中于研究那些需要进行字母讨论的问题，我还是认为学生应该增加这种练习，这对于进一步学习数学是很必要的.

2　含有字母但可回避讨论的问题

下面将举出几个例子，每个例题如果解法选择得当则可以避开字母讨论的麻烦.为了便于对照,我们对每个例题都写出两种解法,其中不必对有关字母进行讨论的解法放在后面.

例 3　求证　$\operatorname{arctg}x+\operatorname{arcctg}x=\frac{\pi}{2}$.

证法 1　见前面的问题（5）.

证法 2　证明等价的等式

$$\frac{\pi}{2}-\operatorname{arcctg}x=\operatorname{arctg}x$$

$\because$　$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arcctg}x\right)=\operatorname{ctg}\left(\operatorname{arcctg}x\right)=x$,

又　$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}x)=x$

由　$0<\operatorname{arcctg}x<\pi$　即 $-\pi<-\operatorname{arcctg}x<0$

得　$-\frac{\pi}{2}<\frac{\pi}{2}-\operatorname{arcctg}x<\frac{\pi}{2}$

而　$-\frac{\pi}{2}<\operatorname{arctg}x<\frac{\pi}{2}$