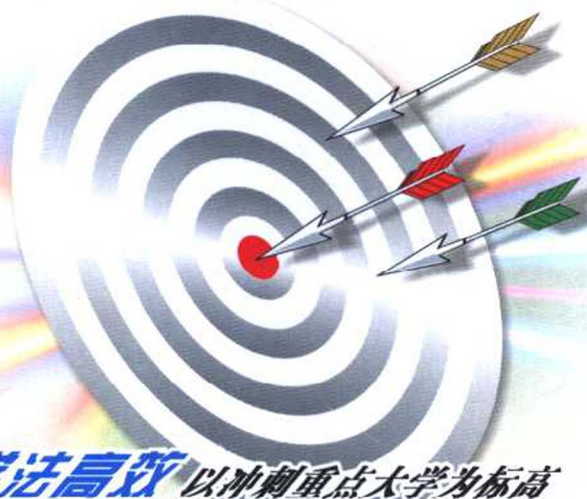


最新高考总复习创新战略

黄冈网 高考 兵法

黄冈市教学创新课题组 编写

最新修订版



学法高效 以冲刺重点大学为目标

久经考验 连续几年命中高考试题

数学

陕西师范大学出版社

最新高考总复习创新战略

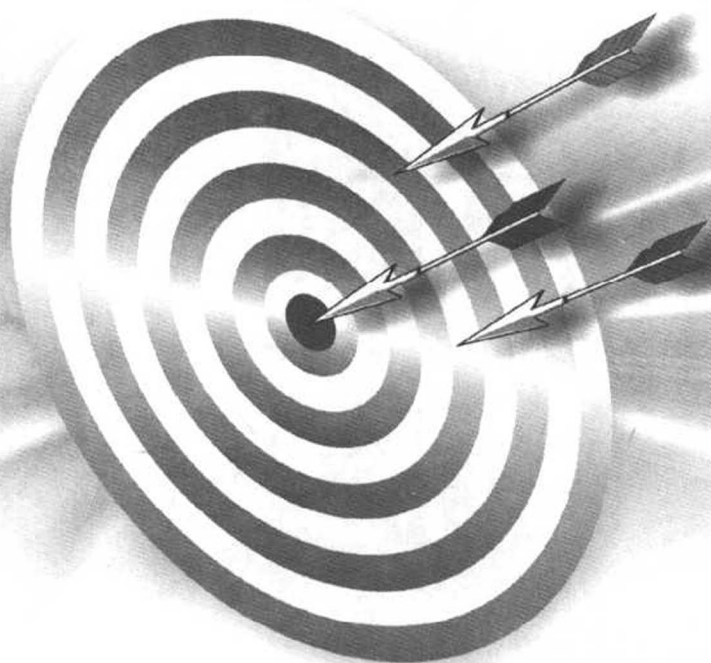
黄冈

高考兵法

黄冈市教学创新课题组 编写

主 编 王宪生

编 者 霍祝华 潘陈栋 陈昌乐 肖安平 程继承
张 智 江 博 吕恒明 王秋霞 汤彩仙
何明星 金松润 张科元 胡华川 董明秀
陈晓洁 陈文科 李青云 申 诚 李 哲



数学

陕西师范大学出版社

图书代号:JF5N0262

图书在版编目(CIP)数据

黄冈高考兵法·数学/王宪生编. — 西安:陕西师范大学出版社,2001

ISBN 7-5613-0531-1

I. 黄… II. 王… III. 数学课—高中—升学参考资料 IV. G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 25544 号

责任编辑 陈焕斌 责任校对 刘峰利 装帧设计 徐 明

出版发行:陕西师范大学出版社

(西安市南郊 陕西师大 120 信箱 邮编 710062)

http://www.snuph.com E-mail:if-centre@snuph.com)

印 制:陕西汉中印刷厂

开本 850×1168 1/16 印张 16.75 字数 573 千

版次印次:2005 年 5 月第 5 版 2005 年 5 月第 1 次印刷

定 价:22.00 元

开户行:光大银行西安电子城支行 账号:0303080—00304001602

读者购书、书店添货或发现印装问题,请与本社营销中心联系、调换。

电 话:(029)85307864 85233753 85251046(传真)

防 伪 提 示

我社 2005 年版文教图书封面覆有社徽和社名的全息激光防伪膜,请注意甄别。如发现盗版,欢迎拨打举报电话。经查实将给予举报者重奖。举报电话:(029)85308142



我们追求什么

——代出版说明

亲爱的同学,也许你是《黄冈兵法》刚结识的新朋友,也许你是多年的老朋友,你看着我长大,我也见证了您成长的每一步——我们一同经历长大的烦恼,享受成熟的喜悦,点点滴滴在心头。

如今,在全国各大、中书店的教辅图书卖场里,你都能看到《黄冈兵法》这一醒目的书名,以及封面上三支射向靶标的箭;也能看到众多读者在《黄冈兵法》书架前流连、翻阅的身影。《黄冈兵法》几年来走遍大江南北,走进千万个重点中学,走进千百万个渴望成功与进步的学子的心田……雪片似的读者来信从全国各地飘至编辑部,学子们倾诉成长的烦恼、阐述学习的心得、奉献对图书进行修订和改正的建议与智慧……

我们感到自豪,我们共同拥有《黄冈兵法》,她是我们与千百万个学子进行交流的窗口与平台;

我们感到欣慰,《黄冈兵法》寄托了千百万个学子的期望,见证了您生活的每一天,成长的每一步……

《黄冈兵法》作为陕西师范大学出版社的品牌图书,自 2000 年面世,便以“权威、系统、实用”等特点深受广大读者喜爱,迅速成长为全国著名品牌。几年来,我们倾注了无数的心血和热情,始终致力于为孜孜以求的学子提供最系统、最有效的学习、应试方案。如今,我们仍在探索、创新,力求使丛书的使用功能更加完善,图书质量更上一层楼,以紧贴教改形势、符合学生发展实际的更多更好的内容和形式,满足读者的实际需求。

“我是广州的学生,抱着试试看的心态买了本《黄冈兵法·初二代数》。哇,书里的内容设计非常丰富,多为常考题目,我特别钟爱,于是向老师推荐。老师以 A 级评价这本书(被老师以 A 级评价的辅导书寥寥无几),并在我们年级里热情推荐,所以全年级的同学人手一本。在期末考试后,全年级数学科平均分奇迹般地突破学校 6 年的纪录(平均分为 96 分,最高分满分,最低分 87 分),这个纪录在第二学期中得到了保持……”一位广州市海珠区的中学生朋友在信中如是说。几年来,《黄冈兵法》陪伴着无数学子的日常学习、备考复习,像一位饱学的良师益友,为大家答疑解惑,清除学习道路上的障碍。正是由于这些实实在在的效果,《黄冈兵法》赢得了读者朋友们的认同和信赖,连年畅销,深受市场欢迎。

那么,《黄冈兵法》到底有什么独特之处呢? 太原市山西大学附中的一位初三学生



在信中这样评价：“作为《黄冈兵法》的忠实读者，我很庆幸可以在每学期都拥有这样一本内容全面、质量很高的辅导书，它从启迪思维方法出发，精选例题，全方位、多角度地讲解知识点，为我打下了坚实的基础，特别是分级训练、思维延伸等板块，既巩固了课本知识，又深入解剖教材，全面提高了我的解题能力，使我从中等水平一跃成为班上前五名……”一位山东省临沂一中高二的学生在来信中写到：“我对《黄冈兵法》的评价非常高，它最大的特点是针对性强，简洁实用，练习题有层次，答案详尽，重视思路提示，很适合像我这样理解能力较弱的中等学生使用，我非常高兴，终于买到了物有所值的参考书……”

的确，“系统性、针对性、提高性”是《黄冈兵法》最大的特点。在编写过程中，丛书始终贯彻“实践、探究、创新”三位一体的结构模式，侧重学法指导，启迪思维方法。研发人员通过不断地探索和大量地调研，推出了“创设生活意境—提出现实问题—归纳知识规律—解决实际问题—探究拓广新知”的全新编写体例，提供了全面深入的学习内容和生动丰富的学习情境与助学资讯，通过大量精心编排的典型例题和习题，铺架阶梯式的能力提升程式，培养和提高学生应用知识、解决问题的能力，重视学生的均衡发展。

《黄冈兵法》出版几年来，先后荣获全国优秀教育图书奖和全国优秀畅销书奖，凭借着特有的魅力和雄厚的实力，赢得了广大读者的青睐。在一片赞誉声中，丛书策划人和作者们没有丝毫的懈怠，而是积极搜集教改前沿信息，不断地推出最新教研成果，并迅速转化为最新的栏目设计和内容设计，以求不断地提高丛书的品质和使用效果。我们的追求，是以《黄冈兵法》为火种，点燃全国中学生创新思维的火把，指引他们走进成功之门。

《黄冈兵法》策划组

目 录



第一篇 代数(1)

第1讲	集合的概念与运算	(4)
第2讲	两类不等式的解法	(8)
第3讲	简易逻辑与充要条件	(12)
第4讲	函数、映射与反函数	(16)
第5讲	函数的解析式与定义域	(20)
第6讲	函数的值域与最值	(24)
第7讲	函数的奇偶性与单调性	(28)
第8讲	指数运算与对数运算	(32)
第9讲	指数函数与对数函数	(36)
第10讲	函数的图象	(40)
第11讲	函数知识的综合应用	(44)
第12讲	等差数列和等比数列的概念与运算	(49)
第13讲	等差数列和等比数列的性质与应用	(53)
第14讲	数列的通项与求和	(57)
第15讲	数列知识的综合应用	(62)
第16讲	任意角与任意角的三角函数	(67)
第17讲	同角三角函数的基本关系式	(70)
第18讲	和、差、倍角的三角函数	(74)
第19讲	三角函数的图象	(77)
第20讲	三角函数的性质及应用	(81)
第21讲	不等式的概念与性质	(85)
第22讲	重要不等式及简单应用	(88)
第23讲	不等式的证明	(91)
第24讲	不等式的解法	(95)
第25讲	不等式的综合应用	(99)

第二篇 平面向量与解析几何

第26讲	平面向量的概念与运算	(106)
第27讲	平面向量的数量积及运算律	(110)
第28讲	平面向量的坐标运算	(113)
第29讲	线段的定比分点与平移公式	(116)

第 30 讲	正弦定理和余弦定理	(120)
第 31 讲	解斜三角形应用举例	(124)
第 32 讲	直线的方程	(128)
第 33 讲	两条直线的位置关系	(131)
第 34 讲	简单的线性规划及应用	(135)
第 35 讲	曲线方程和圆的方程	(139)
第 36 讲	直线和圆的位置关系	(143)
第 37 讲	椭圆的标准方程及几何性质	(147)
第 38 讲	双曲线的标准方程及几何性质	(151)
第 39 讲	抛物线的标准方程及几何性质	(156)
第 40 讲	直线与圆锥曲线的位置关系	(160)

第三篇 立体几何与空间向量

第 41 讲	平面的基本性质和空间的两条直线	(168)
第 42 讲	空间的直线与平面	(172)
第 43 讲	空间的平面与平面	(175)
第 44 讲	三垂线定理及其逆定理	(178)
第 45 讲	空间的角与距离	(180)
第 46 讲	棱柱与棱锥	(184)
第 47 讲	多面体与球	(189)
第 48 讲	空间向量的概念与运算	(192)
第 49 讲	空间向量的坐标运算	(197)
第 50 讲	空间向量的应用	(201)

第四篇 代数(2)

第 51 讲	两个计数原理与排列、组合的概念	(208)
第 52 讲	排列与组合的综合应用	(212)
第 53 讲	二项式定理及应用	(215)
第 54 讲	二项式系数的性质及应用	(218)
第 55 讲	随机事件的概率	(222)
第 56 讲	互斥事件、相互独立事件发生的概率	(225)
第 57 讲	离散型随机变量的分布列、期望与方差	(228)
第 58 讲	统计的方法与应用	(233)
第 59 讲	数学归纳法与数列的极限	(238)
第 60 讲	函数的极限及应用	(242)
第 61 讲	导数的概念及运算	(246)
第 62 讲	导数的应用	(249)
第 63 讲	复数的概念与性质	(253)
第 64 讲	复数的代数形式及运算	(256)



第一篇

代数(1)

【考纲诠释导读】

一、高考热点聚焦

高考重点考什么?

本篇内容包含有“集合与简易逻辑”、“函数”、“数列”、“三角函数”及“不等式”,其中除简易逻辑是教材新增设知识内容外,其余均为传统教材知识内容.本部分内容在高考中占有十分重要的地位,其命题具有“题目所占分量重,试题难易跨度大,命题形式多样化”的特点.分析近几年的高考试题可以发现,对于集合知识,高考主要考查集合的运算与集合的工具性作用,可以与不等式的解集运算相联系命题,以集合语言给出代数命题;函数是历年高考命题的重点内容,从函数的单调性、奇偶性,函数的最大值、最小值,到函数的图象、函数的思想方法无一不是高考的重要命题点;三角函数部分一般与三角函数的性质研究或三角函数的求值有关;数列则是高中数学内容中命题难度起伏最大的一部分内容,近几年数列的命题难度呈上升趋势,一般出现的是一道分步设问、有一定难度变化、与递推数列相关的压轴题;不等式内容依然以考查不等式的解法、不等式的证明与不等式的应用为主,其中对于不等式的解法难度要求有所下降,不等式的证明大多是一道分步设问的大题中的一步,应用则有所增强.另外,函数与数列、函数与不等式有较多的结合部,这些结合部都是综合性解答题或应用题型的命题热点.

二、高考能力要求

高考怎么考?

代数(1)的内容是高中数学学习的最基础的内容,以函数为其主线.从高考试题看,对于这部分知识内容应达到的能力要求可以概括为:熟悉数学语言的正确运用,形成数形结合分析问题的能力,理解函数及函数的思想方法,掌握分析法、综合法、反证法、换元法等诸多的常用数学方法与

基本技巧,提高代数推理能力,认识函数知识与三角知识在解决实际问题中的工具性作用,能灵活运用代数方法处理数学问题和实际应用问题.

【例1】 (2004年北京市高考试题)函数 $f(x) = \begin{cases} x, & x \in P \\ -x, & x \in M \end{cases}$ 其中 P, M 为实数集 $\mathbf{R}$ 的两个非空子集,又规定 $f(P) = \{y | y = f(x), x \in P\}$, $f(M) = \{y | y = f(x), x \in M\}$,给出下列四个判断:

- ①若 $P \cap M = \emptyset$, 则 $f(P) \cap f(M) = \emptyset$
- ②若 $P \cap M \neq \emptyset$, 则 $f(P) \cap f(M) \neq \emptyset$
- ③若 $P \cup M = \mathbf{R}$, 则 $f(P) \cup f(M) = \mathbf{R}$
- ④若 $P \cup M \neq \mathbf{R}$, 则 $f(P) \cup f(M) \neq \mathbf{R}$

其中正确的判断有

- A. 1个 B. 2个
C. 3个 D. 4个

【解答】 对各个判断逐一分析,可以举反例排除,也能利用已知结论证明:

(1) 设 P 为区间 $(0, +\infty)$, M 为区间 $(-\infty, 0)$, 则 $P \cap M = \emptyset$, 此时 $f(P)$ 为区间 $(0, +\infty)$, $f(M)$ 也为区间 $(0, +\infty)$, 此时 $f(P) \cap f(M) = \emptyset$ 不成立, $\therefore$ 可判断①不正确;

(2) 由函数 $y = f(x)$ 中的 y 值相对于 x 的唯一性,若 $P \cap M \neq \emptyset$, 则只能有 $P \cap M = \{0\}$, 此时 $0 \in f(P)$, 且 $0 \in f(M)$, $\therefore f(P) \cap f(M) \neq \emptyset$, 判断②正确;

(3) 若 P 为区间 $[0, +\infty)$, M 为区间 $(-\infty, 0)$, 则 $P \cup M = \mathbf{R}$, 则 $f(P) \cup f(M) = [0, +\infty)$, 从而判断③不正确;

(4) 设 $x_0 \notin P \cup M$, 则 $x_0 \notin P$, 且 $x_0 \notin M$, 由该函数的解析式知至少有一个实数 $y_0 = f(x_0) \notin (f(P) \cup f(M))$, $\therefore$ 判断④正确.

$\therefore$ 正确的选项为 B.

【点评】 能否正确认识分段函数、能否正确使用和数学符号语言是高中数学学习中的两个基本要求,也是高中数学学习中的重点和难点,本题是针对这两个重、难点,结合“集合的概念”、“集合的运算”、“函数的定义域和值域”等知识点命制而成,在看似寻常的知识点上给出了一道体现较高能力要求的试题,在考查考生基础知识的同时,考查到阅读理解能力和设计构造能力.

【例2】 (2004年福建省高考试题)定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数 $f(x)$ 满足 $f(x) = f(x+2)$, 当 $x \in [3, 5]$ 时, $f(x) = 2 - |x-4|$, 则



A. $f(\sin \frac{\pi}{6}) < f(\cos \frac{\pi}{6})$

B. $f(\sin 1) > f(\cos 1)$

C. $f(\cos \frac{2\pi}{3}) < f(\sin \frac{2\pi}{3})$

D. $f(\cos 2) > f(\sin 2)$

【解答】 当 $-1 \leq x \leq 1$ 时, $3 \leq x+4 \leq 5$, 则 $f(x+4) = 2 - |x| = f(x)$,

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 在 $[-1, 0]$ 上增, 在 $[0, 1]$ 上 $f(x)$ 减,

$$\therefore \pi > \frac{3\pi}{2} - 2 > 2 > \frac{\pi}{2}, \therefore 0 < -\cos 2 = \sin(\frac{3\pi}{2} - 2) < \sin 2 < 1,$$

又 $\because f(x)$ 是偶函数, $\therefore f(\cos 2) = f(-\cos 2) > f(\sin 2)$,

$\therefore$ 正确的选项为 D.

【点评】 本题既考查函数的周期性, 又考查函数的单调性, 同时考查到三角函数的基本性质和诱导公式的应用, 较好地体现了在知识交汇处命题、考查综合运用知识的能力的指导思想. 给我们的启示是: 复习中要抓好对于基本初等函数性质的研究工作, 注意找到各个基本初等函数之间以及各个函数的诸多性质之间的内在联系, 提高解决综合性问题的能力.

【例 3】 (2004 年湖南省高考试题) 已知 $\sin(\frac{\pi}{4} + 2\alpha) \cdot \sin(\frac{\pi}{4} - 2\alpha) = \frac{1}{4}$, $\alpha \in (\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$, 求 $2\sin^2 \alpha + \tan \alpha - \cot \alpha - 1$ 的值.

【解答】 解法一: 由 $\sin(\frac{\pi}{4} + 2\alpha) \cdot \sin(\frac{\pi}{4} - 2\alpha) = \sin(\frac{\pi}{4} + 2\alpha) \cdot \cos(\frac{\pi}{4} + 2\alpha) = \frac{1}{2} \sin(\frac{\pi}{2} + 4\alpha) = \frac{1}{2} \cos 4\alpha = \frac{1}{4}$,

得 $\cos 4\alpha = \frac{1}{2}$, 又 $\alpha \in (\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$, $\therefore \alpha = \frac{5\pi}{12}$,

$$\therefore 2\sin^2 \alpha + \tan \alpha - \cot \alpha - 1 = -\cos 2\alpha + \frac{\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha} = -\cos 2\alpha + \frac{-2\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} = -(\cos 2\alpha + 2\cot 2\alpha) = -(\cos \frac{5\pi}{6} + 2\cot \frac{5\pi}{6}) = -(-\frac{\sqrt{3}}{2} - 2\sqrt{3}) = \frac{5\sqrt{3}}{2}.$$

解法二: $\sin(\frac{\pi}{4} + 2\alpha) \cdot \sin(\frac{\pi}{4} - 2\alpha) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos 2\alpha + \sin 2\alpha) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos 2\alpha - \sin 2\alpha) = \frac{1}{2}(\cos^2 2\alpha - \sin^2 2\alpha) = \frac{1}{4} \cos 4\alpha = \frac{1}{4}$,

同解法一得 $\alpha = \frac{5\pi}{12} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}$, $\therefore \sin \frac{5\pi}{12} = \sin(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$,

$$\tan \frac{5\pi}{12} = \tan(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}) = 2 + \sqrt{3}, \cot \frac{5\pi}{12} =$$

$$(\tan \frac{5\pi}{12})^{-1} = 2 - \sqrt{3},$$

代入原式得所求值为 $\frac{5\sqrt{3}}{2}$.

解法三: 由积化和差公式

$$\sin(\frac{\pi}{4} + 2\alpha) \cdot \sin(\frac{\pi}{4} - 2\alpha) = -\frac{1}{2} [\cos(\frac{\pi}{4} + 2\alpha + \frac{\pi}{4} - 2\alpha) - \cos(\frac{\pi}{4} + 2\alpha - \frac{\pi}{4} + 2\alpha)] = -\frac{1}{2} (\cos \frac{\pi}{2} - \cos 4\alpha) = \frac{1}{2} \cos 4\alpha = \frac{1}{4},$$

下同解法一或解法二.

【点评】 在近几年的高考试题中, 三角函数解答题大多出现在解答题的第一或第二小题的位置上, 一般是结合三角函数的基本变换考查三角函数的性质应用或求三角函数式的值, 其中对于纯技巧性的三角函数的变形要求明显降低, 对于倍角的正、余弦公式的考查占有较大的比例. 此类问题的能力要求一是体现在看考生能否快速准确地找到解题路线, 用最简单快捷的方式得到问题的解上; 二是体现在考查考生研究性学习内容的钻研程度上. 如本例, 积化和差公式是不作记忆要求的公式之一, 但若掌握了这一公式, 本例的求解就多了一种方法手段.

【例 4】 (2002 年天津高考试题) 设 a_0 为常数, 且 $a_n = 3^{n-1} - 2a_{n-1}$ ($n \in \mathbb{N}^*$).

(1) 证明对任意 $n \geq 1$, $a_n = \frac{1}{5} [3^n + (-1)^{n-1} 2^n] + (-1)^n 2^n a_0$;

(2) 假设对任意 $n \geq 1$, 有 $a_n > a_{n-1}$, 求 a_0 的取值范围.

【解答】 (1) 证法一: ① 当 $n=1$ 时, 由已知 $a_1 = 1 - 2a_0$, 等式成立,

② 假设当 $n=k$ ($k \geq 1$) 时等式成立, 即 $a_k = \frac{1}{5} [3^k + (-1)^{k-1} 2^k] + (-1)^k 2^k a_0$,

那么 $a_{k+1} = 3^k - 2a_k = 3^k - \frac{2}{5} [3^k + (-1)^{k-1} 2^k] - (-1)^k 2^{k+1} a_0$

$$= \frac{1}{5} [3^{k+1} + (-1)^k 2^{k+1}] + (-1)^{k+1} 2^{k+1} a_0,$$

也就是说, 当 $n=k+1$ 时, 等式也成立,

根据①、②, 可知等式对任意 $n \geq 1$ 成立.

证法二: 可设 $a_n - a \cdot 3^n = b(a_{n-1} - a \cdot 3^{n-1})$ 对任意 $n \geq 1$ 成立,

展开, 与已知等式相比较得 $a = \frac{1}{5}$, $b = -2$, 即 $a_n -$

$$\frac{3^n}{5} = -2(a_{n-1} - \frac{3^{n-1}}{5}) \text{ 成立,}$$

$\therefore$ 数列 $\{a_n - \frac{3^n}{5}\}$ 是公比为 -2 , 首项为 $a_1 - \frac{3}{5}$ 的等比数列,

$$\therefore a_n - \frac{3^n}{5} = (1 - 2a_0 - \frac{3}{5}) \cdot (-2)^{n-1}, \text{ 即 } a_n =$$



$$\frac{3^n + (-1)^{n-1} 2^n}{5} + (-1)^n 2^n a_0 \quad (n \geq 1);$$

$$(2) \text{解法一: 由 } a_n \text{ 的通项公式得 } a_n - a_{n-1} = \frac{2 \cdot 3^{n-1} + (-1)^{n-1} \cdot 3 \cdot 2^{n-1}}{5} + (-1)^n 3 \cdot 2^{n-1} a_0,$$

$$\therefore a_n > a_{n-1} \text{ 等价于 } (-1)^{n-1} (5a_0 - 1) < \left(\frac{3}{2}\right)^{n-2}$$

对于任意正整数 n 成立,

①当 $n=2k-1 (k \in \mathbf{N}^*)$ 时, 上式即为

$$(-1)^{2k-2} \cdot (5a_0 - 1) < \left(\frac{3}{2}\right)^{2k-3},$$

$$\therefore a_0 < \frac{1}{5} \times \left(\frac{3}{2}\right)^{2k-3} + \frac{1}{5} \text{ 对于任意 } k \in \mathbf{N}^* \text{ 成立,}$$

$$\therefore a_0 < \frac{1}{5} \times \left(\frac{3}{2}\right)^{-1} + \frac{1}{5} = \frac{1}{3};$$

$$\text{②当 } n=2k (k \in \mathbf{N}^*) \text{ 时, 则为 } (-1)^{2k-1} (5a_0 - 1) < \left(\frac{3}{2}\right)^{2k-2} \text{ 对于任意 } k \in \mathbf{N}^* \text{ 成立,}$$

$$\therefore a_0 > -\frac{1}{5} \times \left(\frac{3}{2}\right)^{2-2} + \frac{1}{5} = 0;$$

综合知 a_0 的取值范围是 $(0, \frac{1}{3})$;

解法二: 如果 $a_n > a_{n-1}$ 对于任意正整数成立, 必有 $a_1 - a_0 > 0, a_2 - a_1 > 0$, 即 $1 - 3a_0 > 0, 6a_0 > 0$,

从而得到必要条件 $0 < a_0 < \frac{1}{3}$;

当 $0 < a_0 < \frac{1}{3}$ 时, 由 a_n 的通项公式得

$$5(a_n - a_{n-1}) = 2 \times 3^{n-1} + (-1)^{n-1} \times 3 \times 2^{n-1} + (-1)^n \times 5 \times 3 \times 2^{n-1} a_0,$$

当 $n=2k-1 (k \in \mathbf{N}^*)$ 时,

$$5(a_n - a_{n-1}) = 2 \times 3^{n-1} + 3 \times 2^{n-1} - 5 \times 3 \times 2^{n-1} a_0 > 2 \times 3^{n-1} + 3 \times 2^{n-1} - 5 \times 2^{n-1} = 0,$$

当 $n=2k (k \in \mathbf{N}^*)$ 时,

$$5(a_n - a_{n-1}) = 2 \times 3^{n-1} - 3 \times 2^{n-1} + 5 \times 3 \times 2^{n-1} a_0 > 2 \times 3^{n-1} \geq 0,$$

充分性得证. 从而可以断定 a_0 的取值范围是 $(0, \frac{1}{3})$.

【点评】 本题在考查数列、等比数列知识的同时, 对灵活运用数学知识和数学方法分析问题、解决问题的能力提出了较高的要求. 对于由递推关系给出的数列, 教材中提出的知识要求不高, 但潜藏的能力要求却较高, 其实, 无论是等差数列、还是等比数列, 由于我们可以将其分别看成是由递推关系 $a_n = a_{n-1} + d$ 和 $a_n = a_{n-1}q$ 给出的数列, 因此, 推导它们的通项公式和前 n 项和公式时所用到的方法, 对于由递推公式给出的数列的通项公式或前 n 项和公式都具有某种示范作用. 求解这部分内容的试题时, 可以用的方法一般有三种: 一是完全避开求数列的通项, 而用归纳、猜想、结合数学归纳法解决问题; 二是实施变换, 通过构造新的数列, 向等差或等比数列转化, 利用熟悉的知识解决问题; 三是可以

用“特征方程”方法, 从求数列的通项公式入手解题. 由于这部分知识内容与高等数学的联系较为密切, 且对考生的能力要求跨度较大, 能较好地地区分出考生的不同思维层次, 反映学生继续学习的能力, 因此, 高考以数列作为压轴题是有足够的理由的. 复习时, 可以就这部分知识内容在课本原有要求的基础上, 作进一步的深化与展开, 以此提高学生的综合解题能力.



三、高考考向预测

2006年将要考什么?

近三年的高考试题表明, 代数(1)中的内容仍将在 2006 年高考命题中占据举足轻重的地位, 三类题型中都将出现考查这部分知识内容的命题. 其中对传统内容“函数”、“三角函数”、“不等式”与“数列”的考查, 仍将保留近几年的一贯风格, 函数以考查反函数的概念、函数的最值、函数的单调性、奇偶性和周期性等性质为主, 以能力立意作为命题方向, 以函数的解析式作为基本载体, 综合考查不等式知识或数列知识的应用类解答题出现的可能性仍然很大; 三角函数部分则将继续出现运用综合性来考查三角变形与求值的选择題或解答题; 不等式部分仍将与函数知识相综合, 并伴有重要不等式的应用、实数与代数式的大小比较、解不等式等问题出现; 数列则与递推数列联系较紧. 最新的命题切入点是“简易逻辑”这一新增知识内容, 这一内容既能在选择题或填空题中借考查充要条件来与其他章节的数学知识相综合, 又能在解答题中与方程或不等式知识相综合, 一般会辅之以判断命题的真假的新形式(如 2003 年全国高考卷中的第 19 题); 不等式部分的内容, 主要与函数或数列知识相综合, 强调相等与不等之间的辩证关系, 考查不等式的证明, 也可以与解析几何知识综合命题, 以求某个变量的取值范围的形式考查不等式的解法.



四、高考复习建议

如何提高复习效率?

本篇共分 25 讲, 各讲的侧重点不同. 复习“集合与简易逻辑”时, 应该要求学生准确、完整地掌



握集合语言,能顺利地进行文字语言与数学语言的相互转化,掌握二次不等式的解法和含绝对值不等式的解法,善于进行不等式解集的集合运算,能准确地进行命题的复合与命题真假的判断,重点目标是全面进入数学复习打下坚实的基础.复习函数知识,要让学生牢固树立函数的概念与函数的思想,可以要求学生重点掌握各种基本初等函数的图象,因为通过图象就能迅速地解读函数的相应性质,同时通过这种对于图象的识记可以培养我们数形结合思考问题的习惯.三角函数的主要特点是公式多、结论多、性质多,复习中先要有一个较高的要求,不能总让公式、常用结论和性质都停留在课本上,只有熟记相关内容才能熟练运用这些内容,许多学生不能自如地解答三角问题,主要原因就在于他们对于该记忆的没有记住,当然这种记忆不能盲目地死记硬背,而应该是一种在理解的基础上的灵活记忆,如记诱导公式可以记口诀,记正、余弦函数的性质可以记图象

等.不等式复习中,在掌握几个重要不等式的基础上,主要掌握方法——不等式的解法与不等式的证法,通过掌握综合法、分析法、反证法等来达到复习的基本目标,并关注不等与相等的辩证关系,找出函数单调性与不等式知识之间的内在联系.数列复习的主要精力要放在掌握等差、等比数列的性质上,注意理解和把握数列与函数的关系,并能利用这种联系去分析问题、解决问题.同时要设法突破本内容的复习难点——递推数列问题.可以根据老师的教学和自己的学习体会,做一下分类工作,分出递推数列问题中,哪些是可以归纳法解决的类型和问题,哪些是可以通过换元法,构造新数列来解决的类型和问题,哪些又是可以通过特征方程方法解决的类型和问题,从中找到规律,形成数学直觉.



第1讲

集合的概念与运算



一、考点内容全解

本讲考什么?

1. 集合的概念

(1) 基本数集专用符号

常用的基本数集有正整数集 N^* 、自然数集 N 、整数集 Z 、有理数集 Q 、实数集 R 和复数集 C , 它们之间满足的关系是 $N^* \subset N \subset Z \subset Q \subset R \subset C$. 要认识清楚这些集合的意义.

(2) 集合的三种表示法

这三种表示法是:列举法、描述法和图示法. 通常我们会根据不同的需要来选用合适的方法来表示集合,一般地,表示有限集常用列举法;表示无限集常用描述法或区间;描述抽象集常用图示法. 正确认识一个集合的关键是理解集合中的元素特征.

(3) 集合中元素的三种属性

集合中的元素具有确定性、无序性和互异性. 在处理集合问题时,其中的互异性常通过检验确定.

(4) 元素与集合的关系

元素与集合之间的关系用 $\in$ 、 $\notin$ 来表示,注意不要与集合与集合之间的关系发生混淆. 若 a 是集合 A 中的元素则表示为 $a \in A$, 否则表示为 $a \notin A$ (或 $a \in A$), 判断元素与集合的属于与否,主要通过元素的确定性去分析.

【例1】 (2004年湖北省八校联考试题) 设由实数 $a^2 - a + 1, 3, a, -1$ 为对象组成的集合为 M , 且 M 中仅含有3个元素, 则这样的不同的实数 a 共有 ()

A. 1个 B. 2个 C. 3个 D. 4个

【分析】 依题意, 四个数中有且仅有两个是相等的, 究竟哪两个是相等的, 必须通过讨论来确定.

【解答】 $\because M$ 中的元素仅有3个, $\therefore$ 其中有且仅有两个数是相等的.

若 $a^2 - a + 1 = 3$, 则 $a^2 - a - 2 = 0$, 此时 $a = -1$, 或 $a = 2$, 由于 $a = -1$ 时, 四个数的取值仅有 -1 和 3 两种, 与已知矛盾, $\therefore a \neq -1$. 而 $a = 2$ 时, $M = \{-1, 2, 3\}$;

若 $a^2 - a + 1 = a$, 则 $a = 1$, 此时 $M = \{-1, 1, 3\}$;

若 $a = 3$, 则 $a^2 - a + 1 = 7$, 此时 $M = \{-1, 3, 7\}$;

而 $a^2 - a + 1 = -1$ 不可能, $\therefore a = 1, 2, 3$.

正确选项为 C.



【同类变式】 给出下列表述: ① $0 \in \mathbf{N}$; ② $\mathbf{R} = \{\text{实数集}\}$; ③ $\{(1, 2)\} = \{x=1, y=2\}$; ④ $\{x \in \mathbf{R} | x^2 + 1 = 0\} = \emptyset$; 其中正确表述的个数是_____.

【分析】 本题考查对集合的概念与表示法的认识, 这两点是学好集合的基础. 解题时可以根据集合的表示法及元素与集合的关系去逐一判断.

【解答】 自然数集含有数 0, 故表述①是错误的; “ $\{\}$ ”本身即含有“全体”、“所有”和“集”的意义, 因此表述②不对, 正确的表述应该是 $\mathbf{R} = \{\text{实数}\}$; ③中左边给出的集合中的元素是平面内的点, 但右边集合中的元素是等式, $\therefore$ 表述③也是错误的; 由于在实数集中 $x^2 + 1 = 0$ 无解, 故这一集合是空集, $\therefore$ 表述④是正确的. 即正确的表述有 1 个.

2. 集合的相等与包含

(1) 集合的相等与包含是两个重要的命题点, 二者之间既有联系又有区别. 一般地, 两个集合 A 与 B 的相等等价于它们互相包含, 即 $A=B \Leftrightarrow A \subseteq B$ 且 $B \subseteq A$; 用元素反映即 $A=B \Leftrightarrow$ “任意 $a \in A$, 必有 $a \in B$, 且任意 $b \in B$, 必有 $b \in A$ ”. 这是证明两个集合相等的依据.

(2) 子集反映的即是包含关系. 当题设的条件或结论中出现 $A \subseteq B$ (或 $A \subset B$) 就表明集合 A 是集合 B 的子集, 反之亦然. 子集有真子集与非真子集之别, 这在解题时尤其要引起注意, A 是 B 的真子集常用真包含关系 $A \subsetneq B$ 反映, 对于包含关系和子集问题要注意两个集合的先后顺序, 即要区别谁是谁的子集, 否则极易导致错误.

(3) 空集是任意一个集合的子集, 是任意一个非空集合的真子集, 这一点也是解题中容易被忽略的. 当一个集合中含有 n 个元素时, 这一集合的子集的个数是 2^n , 而其真子集的个数则只能是 $2^n - 1$.

【例 2】 已知以 3 个实数为元素给出的集合用列举法表示时, 既能表示为 $\{1, a, \frac{b}{a}\}$ 的形式, 又能表示为 $\{0, a^2, a+b\}$ 的形式, 试求实数 a, b 的值.

【分析】 设 $P = \{1, a, \frac{b}{a}\}$, $Q = \{0, a^2, a+b\}$, 依题意即是在 $P=Q$ 的条件下求实数 a, b 的值, 由于有限集合的相等即是对应元素之间的一一相等, 由此可以建立一个关于 x, y 的方程组, 但建立这一方程组时要注意讨论, 并要保证所求的 a, b 使得集合中元素的互异性得到满足.

【解答】 依题意由 $\{1, a, \frac{b}{a}\} = \{0, a^2, a+b\}$,

$\therefore$ 有 $a=0$ 或 $\frac{b}{a}=0$, 而 $a=0$ 显然与集合中元素的互异性矛盾, $\therefore \frac{b}{a}=0$, 即 $b=0$,

$$\therefore \{1, a, \frac{b}{a}\} = \{1, a, 0\} = \{0, a^2, a+b\} = \{0, a^2, a\},$$

$$\therefore a^2=1, \therefore a=\pm 1,$$

当 $a=1$ 时, $a^2=1$ 与集合中元素的互异性矛盾, 故舍去,

$$\text{当 } a=-1 \text{ 时, } \{1, a, \frac{b}{a}\} = \{0, a^2, a+b\} = \{0, -1, 1\},$$

$$\text{即所求的 } a=-1, b=0.$$

【同类变式】 (2004 年湖北省高考试题) 设 A, B 为两个集合, 下列四个命题:

$$\text{① } A \subseteq B \Leftrightarrow \text{对任意 } x \in A, \text{ 有 } x \in B; \text{② } A \subseteq B \Leftrightarrow A \cap B = \emptyset; \text{③ } A \subseteq B \Leftrightarrow A \not\subseteq B; \text{④ } A \subseteq B \Leftrightarrow \text{存在 } x \in A, \text{ 使得 } x \in B.$$

其中真命题的序号是_____ (把符合要求的命题序号都填上).

【分析】 本题考查的是子集概念、集合的包含关系和准确的数学符号认识能力, 只有正确掌握相关概念和正确记数学符号才能找到其中的真命题.

【解答】 解法一: $A \subseteq B$ 即 A 不是 B 的子集, 由概念易得④为真命题.

解法二: 用韦恩图表示出 $A \subseteq B$ 的各种情况, 从中分析易得.

【特别提示】 本题围绕对于子集概念的不同认识设计出了四个可供选择的结论, 由于没有注明正确结论的个数, 可以认为是一种多重选择填空题. 它为我们提供了考查数学概念的一种新模式, 带给我们的启示是, 要重视数学概念和数学知识的形成过程.

3. 集合的运算

(1) 进行集合运算时, 首先要明确元素是什么, 全集是什么, 并保证所有的元素都是全集中的元素. 这里可能出现的错误之一是混淆一元数集与平面点集的概念, 错将一元数集当作二元点集, 如将实数集 $\{y | y=x+2, x \in \mathbf{R}\}$ 理解为直线 $y=x+2$ 上的点的集合等.

(2) 常提的集合运算指的是求集合的子集、集合的交集、集合的并集、集合的补集等运算. 进行运算时, 首先要明确进行的是“子、交、并、补”中的哪一种运算, 然后再合理地运用相应的概念解题.

$$\text{(3) 求集合的补集常用结论: } \complement_U(A \cap B) = \complement_U A \cup \complement_U B, \complement_U(A \cup B) = \complement_U A \cap \complement_U B.$$

【例 3】 (2004 年北京市高考试题) 设全集是实数集 $\mathbf{R}$, $M = \{x | -2 \leq x \leq 2\}$, $N = \{x | x < 1\}$, 则 $(\complement_{\mathbf{R}} M) \cap N$ 等于_____.

- A. $\{x | x < -2\}$ B. $\{x | -2 < x < 1\}$
C. $\{x | x < 1\}$ D. $\{x | -2 \leq x < 1\}$

【分析】 本题是以不等式的解集为实数集的子集, 考查集合的运算, 这是集合类命题的常见题型, 进行相

关运算时要注意逐步进行.如本题可以先求 M 在集合 R 中的补集,再求它与 N 的交集.

【解答】 $\because \complement_R M = \{x | x < -2, \text{ 或 } x > 2\}$,
 $\therefore (\complement_R M) \cap N = \{x | x < -2\}$,

故正确的选项是 A.

【特别提示】 进行不等式解集的集合运算时,当遇有较为复杂情况时要注意利用数轴来表示各个不等式的解集,以便于能直观地分析出各个集合之间的关系.

【同类变式】 已知 $A = \{x | x^2 + ax + b = 0\}$, $B = \{x | x^2 + cx + 15 = 0\}$, 且 $A \cap B = \{3\}$, $A \cup B = \{3, 5\}$, 求 a, b, c 的值.

【分析】 与例 3 不同,本题要求在已知集合的关系下,求待定系数 a, b, c ,注意到已知的两个集合都是某个方程的解集,所以可以利用元素与方程的关系求解.

【解答】 $\because A \cap B = \{3\}, \therefore 3 \in B$, 即 $9 + 3c + 15 = 0, \therefore c = -8$.

$\therefore B = \{3, 5\} = A \cup B, \therefore A \subseteq B$, 又 $\because A \cap B = \{3\}, \therefore A \neq B, \therefore A = \{3\}$.

此时必有 $a^2 - 4b = 0$, 且 $-\frac{a}{2} = 3, \therefore a = -6, b = 9$,

即 $a = -6, b = 9, c = -8$.



二、能力提升技巧

考试技巧在哪里

1. 处理集合问题的常用技巧

(1) 集合中元素的三个属性既能成为集合类型题的命题点,又是解决这类问题的切入点.

(2) 进行集合运算的一般步骤是先化简再运算;当给出的集合形式较为复杂时,注意先化简,化简时要保证化简前后集合的等价性.

(3) 有限集合或抽象集合的运算常借助韦恩图帮助进行.

【例 4】 已知全集 $U = \{x \in \mathbb{N}^* | x < 10\}$, 且 $\complement_U A \cap B = \{1, 9\}$, $\complement_U A \cap \complement_U B = \{6, 8\}$, $A \cap B = \{2, 4\}$, 求集合 A 和 B .

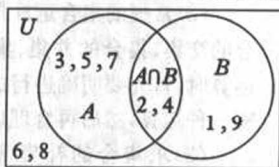


图 1-1-1

【分析】 全集 U 中的两个子集 A, B , 可以将全集分成 $\complement_U A \cap B, A \cap \complement_U B, A \cap B$ 和 $\complement_U A \cap \complement_U B$ 四大块, 本题在化简集合 U , 明确全集 U 中的元素后, 就能利用韦恩图反映出对全集 U 的四块划分, 从而直接写出集合 A 和 B 来.

【解答】 依题意, 全集 $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, 作出韦恩图如图 1-1-1 所示, 容易知道 $A = \{2, 3, 4, 5, 7\}, B = \{1, 2, 4, 9\}$.

【延伸技巧】 对于全集中的任意集合 A, B, C , 用韦恩图可以验证它们之间满足下列性质: (1) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$; (2) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

若考虑运用上述性质解例 4, 则有 $(\complement_U A \cap B) \cup (A \cap B) = (\complement_U A \cup A) \cap B = U \cap B = B$, 从而迅速得出结论.

2. 如何进行二元点集的集合运算

二元点集一般都具有某种几何意义, 在认真运算所涉及的各个集合中元素的几何意义后, 可以运用数形结合的思想, 利用图形分析的方法解有关问题.

【例 5】 (2000 年上海春季招生试题) 集合 $A = \{(x, y) | x^2 + y^2 = 4\}$, $B = \{(x, y) | (x-3)^2 + (y-4)^2 = r^2\}$, 其中 $r > 0$, 若 $A \cap B$ 中有且只有一个元素, 则 r 的值是 _____.

【分析】 集合 A 中的元素是以原点为圆心、2 为半径的一个圆上的点, 集合 B 中的元素则是以 $(3, 4)$ 为圆心、 r 为半径的一个圆上的点, 两个集合的交集只有一个元素也即两个圆有且只有一个公共点, 利用圆与圆的相切条件可以得出结论.

【解答】 由分析可知, 圆 $x^2 + y^2 = 4$ 与圆 $(x-3)^2 + (y-4)^2 = r^2$ 应该相切,

$\therefore \sqrt{3^2 + 4^2} = 2 + r$, 或 $\sqrt{3^2 + 4^2} = r - 2$, 解得 $r = 3$, 或 $r = 7$.

【延伸技巧】 利用几何意义求解集合问题时, 要注意避免由于对某种图形认识方面的先入为主所导致的解题失误. 如本题, 若先入为主, 认为两个圆只能是外切 (或内切), 则会漏掉内切 (或外切) 的情况. 另外值得指出的是, 数形结合的解题思想不仅在集合内容中会被用到, 在后续学习中, 与图形有联系的内容都可以用到.



三、基础能力测试

基础分你拿全了吗

1. 已知集合 $A \subseteq \{2, 3, 7\}$, 且 A 中至多有一个奇数, 则这样的集合共有 ()

A. 2 个 B. 4 个 C. 5 个 D. 6 个

2. 设集合 $A = \{x | x = 2k, k \in \mathbb{Z}\}$, $B = \{x = 2k + 1, k \in \mathbb{Z}\}$, $C = \{x | x = 4k + 1, k \in \mathbb{Z}\}$, 若 $a \in A, b \in B$, 则下列结论正确的是 ()

A. $a + b \in A$ B. $a + b \in B$
 C. $a + b \in C$ D. $a - b \in C$

3. 设集合 $M = \{y | y = x^2 - 2x + 2\}$, $P = \{(x, y) | y = x^2 - 2x + 2\}$, 则 ()

A. $M = P$ B. $M \subseteq P$
 C. $P \subseteq M$ D. $M \cap P = \emptyset$

4. (2002 年全国高考试题) 设集合 $M = \{x | x = \frac{k}{2} +$



$\frac{1}{4}, k \in \mathbb{Z}\}, N = \{x | x = \frac{k}{4} + \frac{1}{2}, k \in \mathbb{Z}\}$, 则 ()

- A. $M=N$ B. $M \subsetneq N$
C. $N \subsetneq M$ D. $M \cap N = \emptyset$

5. 已知 U 为全集, M, P, S 都是它的子集, 则图 1-1-2 中阴影部分表示的集合是 ()

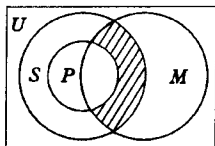


图 1-1-2

- A. $M \cap (P \cup S)$
B. $M \cap (\complement_U P \cap S)$
C. $(\complement_U M \cap \complement_U P) \cap S$
D. $(M \cap P) \cup (M \cap S)$

6. 非空集合 $M \subseteq \{m \in \mathbb{N}^* | m \leq 10\}$, 且当 $m \in M$ 时 $8-m \in M$, 则这样的集合 M 共有 _____ 个.

7. 已知集合 $A = \{x | ax^2 + 2x + 1 = 0\}$, 其中 a, x 均为实数,

- (1) 若 A 中有且只有一个元素, 求 a 的值;
(2) 若 A 中至多有一个元素, 求 a 的取值范围.



四、潜能挑战测试



8. 设集合 $M = \{x | ax - 1 = 0\}$, 集合 $P = \{1, 2\}$, $S = \{a | a \text{ 使得 } M \subseteq P\}$, 则 $S \cup P =$ ()

- A. $\{1, 2\}$ B. $\{0, 1, 2\}$
C. $\{\frac{1}{2}, 1, 2\}$ D. $\{0, \frac{1}{2}, 1, 2\}$

9. (2003 年北京市宣武区高三测试题) 设全集 $U = \{(x, y) | x, y \in \mathbb{R}\}$, 集合 $M = \{(x, y) | \frac{y-3}{x-2} = 1\}$, $P = \{(x, y) | y \neq x+1\}$, 则 $\complement_U(M \cup P) =$ _____.

10. 已知集合 $A = \{-4, 2a-1, a^2\}$, $B = \{a-5, 1-a, 9\}$.

- (1) 若 $A \cap B = \{9\}$, 求 $A \cup B$;
(2) 是否存在实数 a 使得 $\text{card}(A \cup B) = 4$? 若存在, 求出所有的实数 a ; 若不存在, 请说明理由.

11. 已知集合 $A = \{x | f(x) = x\}$, $B = \{x | f[f(x)] = x\}$, 其中 $f(x) = x^2 + ax + b$ ($a, b, x \in \mathbb{R}$), 证明:

- (1) $A \subseteq B$;
(2) 若 A 中仅含一个元素, 则必有 $A = B$.



五、标答与提示



1. D 点拨: A 可以是空集、单元素集和两个元素的集合, 但不能同时含有 3 和 7

2. B 点拨: $a+b=2k+2l+1=2(k+l)+1$

3. D 点拨: M 是一元实数集的子集, 而 P 是二元点集的子集, 两个集合没有公共元素

4. B 点拨: M 中 $x = \frac{2k+1}{4}$, N 中 $x = \frac{k+2}{4} =$

$\frac{(k+1)+1}{4}$, 由 $k \in \mathbb{Z}$ 可知

5. B 点拨: 阴影部分的元素必在 M, S 中, 但不在 P 中

6. 15 点拨: 考虑以集合 $\{1, 7\}, \{2, 6\}, \{3, 5\}, \{4\}$ 为基础来产生 M

7. (1) 即方程 $ax^2 + 2x + 1 = 0$ 有且只有一个实数根, 当 $a=0$ 时, $A = \{-\frac{1}{2}\}$, 当 $a \neq 0$ 时, 必有 $\Delta=0$, 即 $a=1$, 此时 $A = \{-1\}$;

(2) 即方程 $ax^2 + 2x + 1 = 0$ 无解或有唯一解, $\therefore 4-4a \leq 0$, 或 $a=0$; 即 $a=0$, 或 $a \geq 1$

8. D 点拨: 由已知 $M = \emptyset$, 或 $M = \{1\}$, 或 $M = \{2\}$

9. $\{(2, 3)\}$ 点拨: $M \cup P$ 是平面中除去点 $(2, 3)$ 的所有点的集合

10. (1) 由 $A \cap B = \{9\}$, 得 $2a-1=9$, 或 $a^2=9$, $\therefore a=5$, 或 $a=\pm 3$,

当 $a=5$ 时, $A \cap B = \{-4, 9\}$, 与已知矛盾;

当 $a=3$ 时, 则与集合中元素的互异性矛盾;

当 $a=-3$ 时, $A = \{-4, -7, 9\}$, $B = \{-8, 4, 9\}$, 此时 $A \cup B = \{-4, -7, -8, 4, 9\}$.

(2) 若 $\text{card}(A \cup B) = 4$, 则 A 与 B 中有且仅有两个相同元素,

令 $\begin{cases} -4=1-a, \\ 2a-1=9; \end{cases}$ 则 $a=5$, 此时 $A = \{-4, 9, 25\}$, $B = \{0, -4, 9\}$, $\therefore A \cup B = \{-4, 0, 25, 9\}$;

令 $\begin{cases} a^2=a-5, \\ 2a-1=1-a, \end{cases}$ 这不可能; 令 $\begin{cases} a^2=1-a, \\ 2a-1=a-5, \end{cases}$ 这也不可能.

综合(1)知, 当且仅当 $a=5$ 时, $\text{card}(A \cup B) = 4$

11. (1) 若 $A = \emptyset$, 显然 $A \subseteq B$ 成立; 若 $A \neq \emptyset$, 设 $x \in A$, 则 $f(x) = x$,

$\therefore f[f(x)] = f(x) = x$, 即 $x \in B$, 此即证得总有 $A \subseteq B$ 成立;

(2) 若 A 中有且只有一个元素, 可设 $A = \{c\}$,

即二次方程 $f(x) = x$ 有唯一的实数根, $\therefore f(x) - x = (x-c)^2$,

$\therefore f(x) = (x-c)^2 + x$, $f[f(x)] = [f(x) - c]^2 + f(x)$,

$\therefore f[f(x)] - x = [f(x) - c]^2 + f(x) - x = [(x-c)^2 + x - c]^2 + (x-c)^2 = (x-c)^2(x-c+1)^2 + (x-c)^2 = (x-c)^2[(x-c+1)^2 + 1]$.

由于 $x, c \in \mathbb{R}$, $\therefore$ 当且仅当 $x=c$ 时 $f[f(x)] - x = 0$, 此即证得方程 $f[f(x)] - x = 0$ 有二重实数根 $x=c$,

由集合中元素的互异性可得 $A=B$



第2讲 两类不等式的解法



一、考点内容全解

本讲考什么？

1. 含绝对值不等式的解法

(1) 基本解集公式

注意牢固掌握两种基本的绝对值不等式 $|x| < c$, $|x| > c$ ($c > 0$) 的解集公式, 这是解决有关绝对值不等式问题的基础.

(2) 换元法的应用

求解形如 $|ax+b| < c$, 或 $|ax+b| > c$ ($c > 0$) 的不等式时, 常用换元法: 设 $t = ax+b$, 转化为基本的绝对值不等式 $|t| < c$, 或 $|t| > c$ 后, 再用解集公式.

(3) 根点讨论法

对于多项含有绝对值关系的不等式, 可以通过讨论去掉绝对值符号, 将其化归为一般不等式求解, 这种讨论方法一般称为根点讨论法.

【例1】 设不等式 $|x-1| - |2x+1| < -3$ 的解集为 P , 全集 $U = \mathbf{R}$, 则 $\complement_{\mathbf{R}} P =$ ()

- A. $(-5, 1)$ B. $(-5, 1]$
C. $[-5, 1)$ D. $[-5, 1]$

【分析】 解题的关键是求不等式的解集 P . 将不等式两端平方可以去掉绝对值符号, 但有两项含有绝对值符号时, 这种方法一般不可取, 较好的方法还是根点讨论法.

【解答】 分别令 $x-1=0$, $2x+1=0$, 得 $x=1$, $x=-\frac{1}{2}$,

当 $x < -\frac{1}{2}$ 时, 不等式化为 $1-x - [-(2x+1)] < -3$, 即 $x+2 < -3$, 此时不等式的解为 $x < -5$; 当 $-\frac{1}{2} \leq x < 1$ 时, 不等式化为 $1-x - (2x+1) < -3$, 即 $-3x < -3$,

$\therefore x > 1$, 矛盾, 此时不等式无解;

当 $x \geq 1$ 时, 不等式化为 $x-1 - (2x+1) < -3$, 即 $x > 1$, $\therefore$ 此时不等式解为 $x > 1$;

综合知原不等式的解集 $P = \{x | x < -5, \text{ 或 } x > 1\}$,

$\therefore$ 正确选项为 D.

【特别提示】 若注意到各选项唯有端点值不同, 则用特殊值方法可迅速得解: 1 不适合不等式, $\therefore 1$ 在 P 的补集中, -5 不适合不等式, $\therefore -5$ 在 P 的补集中, 故选 D.

【同类变式】 已知不等式 $|x+1| - \sqrt{x^2-4x+4} - k > 0$ 的解集为 $\mathbf{R}$, 则实数 k 的取值范围是 ()

- A. $k < -3$ B. $k < 3$ C. $k \leq -3$ D. $k \leq 3$

【分析】 与例1相比, 区别在于将 $|x-2|$ 以 $\sqrt{x^2-4x+4}$ 的形式给出, 要求运用绝对值的概念将不等式变形为 $|x+1| - |x-2| > k$ 后进行思考, 通过找到 $f(x) = |x+1| - |x-2|$ 的取值范围, 来得出 k 的取值范围.

【解答】 已知条件即“不等式 $|x+1| - |x-2| > k$ 的解集为 $\mathbf{R}$ ”, 这一条件成立的充要条件即是“ k 小于 y 的最小值”成立,

用“根点讨论法”可得 $y = |x+1| - |x-2|$ 的最小值为 -3 ,

由此正确选项为 A.

2. 一元二次不等式的解法

(1) 基本解集公式

以不等式 $ax^2+bx+c > 0$ ($a > 0$) 和 $ax^2+bx+c < 0$ ($a > 0$) 为例, 我们可以归纳出一元二次不等式的解集公式, 对于解集不是全集或空集时, 一般地, 我们把对应的解集称为“大两边, 小中间”, 这时一定要记住对 $a > 0$ 的限制, 而当 $a < 0$ 时, 应该先化为二次项系数大于零的情况再用公式.

(2) 三个“二次”的关系

常说的三个“二次”即指二次函数、一元二次方程和一元二次不等式, 这三者之间有着密切的联系, 这种联系点可以成为高考中的命题点. 处理其中某类问题时, 要善于产生对于另外两个“二次”的联想, 或进行转化, 或帮助分析. 具体到解一元二次不等式时, 就是要善于利用相应的二次函数的图象进行解题分析, 要能抓住一元二次方程的根与一元二次不等式的解集区间的端点值的联系.

(3) 简单有理不等式的解法

某些简单的有理不等式可以通过同解变形转化为绝对值不等式或一元二次不等式求解. 在转化的过程中要注意保证同解, 特别是要处理好由分式向整式转化的过程中, 分母不能为零的问题. 如解不等式 $\frac{x-1}{x+3} \leq 0$, 即是要解不等式 $(x-1)(x+3) \leq 0$, 且 $x+3 \neq 0$.

【例2】 已知全集为 $\mathbf{R}$, 集合 $P = \{x | x^2-5x-6 > 0\}$, $M = \{x | a^2-x^2+10x-25 > 0\}$, 若 a 为正常数, 且 $11 \in M$, 则 ()

- A. $\complement_{\mathbf{R}} U M = \mathbf{R}$ B. $P \cup \complement_{\mathbf{R}} M = \mathbf{R}$



C. $\complement_{\mathbb{R}} P \cup \complement_{\mathbb{R}} R = \mathbb{R}$ D. $P \cup M = \mathbb{R}$

【分析】 采用先化简再判断的方法, 注意利用条件 $11 \in M$ 来确定 a 的大致范围, 以帮助确定出两个集合的关系.

【解答】 集合 $P = \{x | x < -1, \text{ 或 } x > 6\}$,

由 $a^2 - x^2 + 10x - 25 > 0$, 得 $(x-5)^2 < a^2$, $\therefore a > 0$,
 $\therefore |x-5| < a$,

$\therefore$ 集合 $M = \{x | 5-a < x < 5+a\}$, 由于 $11 \in M$,

$\therefore a > 6$,

$\therefore -a < -6, 5-a < 5-6 = -1$, 故知正确选项是 D.

【同类变式】 (2004 年重庆市高考试题) 不等式 $x + \frac{2}{x+1} > 2$ 的解集是 ()

A. $(-1, 0) \cup (1, +\infty)$ B. $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$

C. $(-1, 0) \cup (0, 1)$ D. $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

【分析】 应该采用移项、通分的方法化不等式为 $\frac{f(x)}{g(x)} > 0$ (或 $\frac{f(x)}{g(x)} < 0$) 的形式后, 再运用“根轴法”求解.

【解答】 原不等式即 $\frac{x^2-x}{x+1} > 0$, 也即 $\frac{x(x-1)}{x+1} > 0$,

由“根轴法”可得正确选项为 A.

【特别提示】 本题易发生的一个错误是不加讨论地在原不等式的两端同时乘以 $x+1$, 将原不等式化为 $x^2 - x > 0$, 从而无法找到对应的解集, 以致忙中出错.

3. 简单含参不等式的解法

(1) 求解含有参数的绝对值不等式和一元二次不等式时, 一般要注意进行分类讨论, 讨论时既要保证对参数取值的覆盖, 又要避免不必要的重复.

(2) 通过因式分解后, 一元二次含参不等式可以化归为一元一次含参不等式来求解, 所以首先要掌握一元一次含参不等式的解法, 以解不等式 $ax < b$ 为例: 若 $a > 0$, 则这一不等式的解集为 $\{x | x < \frac{b}{a}\}$; 若 $a < 0$, 则不等式的解集为 $\{x | x > \frac{b}{a}\}$; 若 $a = 0$, 则当 $b \leq 0$ 时, 不等式的解集为 $\emptyset$, 而当 $b > 0$ 时, 不等式的解集为实数集 $\mathbb{R}$.

【例 3】 解关于 x 的不等式: $ax^2 - 2x + 1 > 0$.

【分析】 从不等式的形式结构看, 可以是一元一次不等式, 也可以是一元二次不等式, 其中为二次不等式时, 又要考虑“开口方向”和“判别式的正负”问题, 注意到 $\Delta = 4 - 4a$, 可以从中找到讨论点是“ $a = 0$ ”和“ $a = 1$ ”.

【解答】 ① 当 $a = 0$ 时, 不等式即 $-2x + 1 > 0$, $\therefore$ 解集为 $\{x | x < \frac{1}{2}\}$;

② 当 $a < 0$ 时, $\Delta = 4 - 4a > 0$, 此时不等式为 $x^2 - \frac{2}{a}x$

$+\frac{1}{a} < 0$, 由于方程 $x^2 - \frac{2}{a}x + \frac{1}{a} = 0$ 的两根分别为

$$\frac{1-\sqrt{1-a}}{a}, \frac{1+\sqrt{1-a}}{a}, \text{ 且 } \frac{1-\sqrt{1-a}}{a} > \frac{1+\sqrt{1-a}}{a},$$

$\therefore$ 不等式的解集为 $\{x | \frac{1+\sqrt{1-a}}{a} < x < \frac{1-\sqrt{1-a}}{a}\}$;

③ 当 $a > 0$ 时, 若 $0 < a < 1$, 此时不等式即 $x^2 - \frac{2}{a}x + \frac{1}{a} > 0$,

$\frac{1}{a} > 0$, $\therefore \frac{1-\sqrt{1-a}}{a} < \frac{1+\sqrt{1-a}}{a}$, $\therefore$ 不等式解集为

$\{x | x < \frac{1-\sqrt{1-a}}{a}, \text{ 或 } x > \frac{1+\sqrt{1-a}}{a}\}$, 若 $a = 1$, 则不等

式为 $(x-1)^2 > 0$, $\therefore$ 不等式解集为 $\{x \in \mathbb{R} | x \neq 1\}$; 若 $a > 1$, 则 $\Delta < 0$, 不等式解集为 $\mathbb{R}$.

【特别提示】 当含有参数的一元二次不等式对应的二次方程有两个不同的根时, 判断谁大谁小, 要考虑参数的作用.

【同类变式】 解关于 x 的不等式 $|ax-1| < b$ ($a \neq 0$).

【分析】 讨论点有两个: a 和 b , 可以采用分级讨论的方法, 先对 b 展开讨论, 在去掉绝对值符号后, 再根据需要对非零实数 a 展开二级讨论.

【解答】 (1) 若 $b \leq 0$, 则不等式恒不成立, 此时解集为 $\emptyset$;

(2) 若 $b > 0$, 则不等式同解于 $(ax-1)^2 < b^2$, $\therefore (ax-1+b)(ax-1-b) < 0$,

$\therefore a \neq 0, a^2 > 0$, $\therefore (x - \frac{1-b}{a})(x - \frac{1+b}{a}) < 0$, 且 $1-b < 1+b$,

$\therefore$ ① 若 $a < 0$, 则 $\frac{1-b}{a} > \frac{1+b}{a}$, 此时不等式的解集为 $\{x | \frac{1+b}{a} < x < \frac{1-b}{a}\}$;

② 若 $a > 0$, 则 $\frac{1-b}{a} < \frac{1+b}{a}$, 此时不等式的解集为 $\{x | \frac{1-b}{a} < x < \frac{1+b}{a}\}$.



二、能力提升技巧

考试技巧在哪里?

1. 如何进行不等式解集的集合运算

以不等式的解集为载体考查集合的运算是一类重要的题型, 高考试题中常会出现. 求解此类问题的基本步骤是: (1) 正确求得所给解集的最简形式; (2) 准确理解问题中给出的集合运算符号的意义, 分辨将要进行的集合运算究竟是哪一种类型的运算; (3) 利用数轴分析或韦恩图分析方法与技巧进行运算.

【例4】 已知全集为 $\mathbf{R}$, 集合 $A = \{x | x^2 \geq 9\}$, $B = \{x | \frac{x-7}{x+1} \leq 0\}$, $C = \{x | |x-2| < 4\}$.

(1) 求 $A \cap B$, $A \cup C$, $A \cap B \cap C$, $A \cup B \cup C$;

(2) 求 $A \cap \complement_{\mathbf{R}}(B \cap C)$.

【分析】 可以按以上给出的基本步骤进行集合运算, 重在用好数轴.

【解答】 由已知 $A = \{x | x \leq -3, \text{ 或 } x \geq 3\}$, $B = \{x | -1 < x \leq 7\}$, $C = \{x | -2 < x < 6\}$,

在数轴上作出这三个集合, 如图 1-2-1 所示.

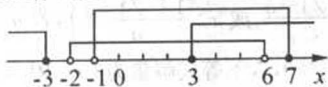


图 1-2-1

(1) $\therefore A \cap B = \{x | 3 \leq x \leq 7\}$, $A \cup C = \{x | x \leq -3, \text{ 或 } x > -2\}$,

$A \cap B \cap C = \{x | 3 \leq x < 6\}$,

$A \cup B \cup C = \{x | x \leq -3, \text{ 或 } x > -2\}$;

(2) $\because B \cap C = \{x | -1 < x < 6\}$, $\therefore \complement_{\mathbf{R}}(B \cap C) = \{x | x \leq -1, \text{ 或 } x \geq 6\}$,

$\therefore A \cap \complement_{\mathbf{R}}(B \cap C) = \{x | x \leq -3, \text{ 或 } x \geq 6\}$.

【延伸技巧】 一般地, 当各个不等式的解集求出后, 要及时地在数轴上将它们一一表示出来. 表示完毕后, 可以根据覆盖情况去求得各种集合. 求集合的并集时, 即求所有覆盖下的部分, 求几个集合的交集时, 则要在几重覆盖下考虑.

2. 综合性问题预测

利用本节复习到的两类不等式的解集为载体, 考查集合的运算, 既能考查不等式解法的掌握情况, 又能考查掌握集合的概念和运算的熟练程度, 还能考查分类讨论思想, 可谓一举数得. 此处最有可能出现的综合性问题是: 给定两个到三个不同集合, 并给出已知集合的某些关系, 要求在相应条件下, 求题设中的待定系数或参数的取值范围.

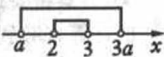
【例5】 已知全集为 $\mathbf{R}$, 集合 $A = \{x | x^2 - x - 6 < 0\}$, 集合 $B = \{x | x^2 + 2x - 8 > 0\}$, 集合 $C = \{x | x^2 - 4ax + 3a^2 < 0\}$, 若 $C \supseteq A \cap B$, 求实数 a 的取值范围.

【分析】 先求 $A \cap B$, 再对 C 进行适当的化简, 然后考虑利用“ $\supseteq$ ”的意义求解. 由于问题涉及区间表示的数集间的运算, 且含有参数 a , 所以一要注意展开必要的讨论, 二要注意利用数轴分析法.

【解答】 易知 $A = \{x | -2 < x < 3\}$, $B = \{x | x < -4, \text{ 或 } x > 2\}$, $\therefore A \cap B = \{x | 2 < x < 3\}$, 又 $C = \{x | (x-a) \cdot (x-3a) < 0\}$,

若 $a > 0$, 则 $C = \{x | a < x < 3a\}$,

若 $a = 0$, 则 $C = \emptyset$, 若 $a < 0$, 则 $C =$



$\{x | 3a < x < a\}$, 其中当 $a \leq 0$ 时, 不可

图 1-2-2

能有 $C \supseteq A \cap B$ 成立, 而当 $a > 0$ 时, 如图 1-2-2 所示,

可知 $C \supseteq A \cap B \Leftrightarrow \begin{cases} a \leq 2, \\ 3a \geq 3; \end{cases}$

解得 $1 \leq a \leq 2$ 即为所求的取值范围.

【延伸技巧】 讨论数轴上的区间覆盖时, 要处理好端点值的取舍. 如本例, 若由已知条件“ $C \supseteq A \cap B$ ”判断为等价关系 $\begin{cases} a < 2, \\ 3a > 3, \end{cases}$ 则会缩小 a 的取值范围, 从而导致错误. 同学们可以作如下练习“若 $A = \{x | x^2 - x - 6 \leq 0\}$, 而其余条件不变, 试求 a 的取值范围”.

三、基础能力测试

基础分你拿全了吗?

1. 已知全集 $U = \mathbf{R}$, 不等式 $3 - |2x+1| > 0$ 的解集 A 在 U 中的补集是 ()

A. $\{x | x < -2, \text{ 或 } x > 1\}$

B. $\{x | -1 < x < 2\}$

C. $\{x | -1 \leq x \leq 2\}$

D. $\{x | x \leq -2, \text{ 或 } x \geq 1\}$

2. 知 $\{x | m-2x > n, n > 0\} = \{x | x < -5, \text{ 或 } x > 4\}$, 则 m^2+n 的值为 ()

A. -8 B. 10 C. 8 D. 80

3. 若一元二次不等式 $ax^2+bx+c > 0$ 的解集为 $\mathbf{R}$, 则 ()

A. $a > 0, \Delta < 0$

B. $a < 0, \Delta > 0$

C. $a > 0, \Delta > 0$

D. $a < 0, \Delta < 0$

4. 已知集合 $M = \{x | x^2 - x - 2 < 0\}$, $P = \{x | x \leq a\}$, 若 $M \cap P = \emptyset$, 则实数 a 的取值范围是 ()

A. $\{a | a < -1\}$

B. $\{a | a \geq 2\}$

C. $\{a | -1 < a < 2\}$

D. $\{a | a \leq -1\}$

5. 已知不等式 $|2x-3| < 1$ 和 $\frac{1}{|x-2|} > 1$ 的解集分别是 P 和 Q , 则 P 与 Q 的关系是 ()

A. $P \subsetneq Q$

B. $Q \subsetneq P$

C. $P = Q$

D. $P \cap Q = \emptyset$

6. 不等式组 $\begin{cases} |x-1| < 2, \\ 1 < |x-1| \end{cases}$ 的解集是_____.

7. (1999 年高考上海卷试题) 设集合 $A = \{x | |x-a| < 2\}$, $B = \{x | \frac{2x-1}{x+2} < 1\}$, 若 $A \subseteq B$, 求实数 a 的取值范围.