



天气动力学中的 诊断分析方法

丁一汇 编著

科学出版社

天气动力学中的诊断分析方法

丁一汇 编著

科学出版社

1989

内 容 简 介

诊断分析方法是现代气象研究中不可缺少的工具,本书较全面地介绍了天气动力学中常用的诊断分析方法。首先介绍了气象场的各种客观分析方法和物理量的计算方法;详细讨论了中纬度环流和天气系统的诊断问题以及边界层通量、各种非绝热加热因子和积云垂直输送的计算问题,尤其是探讨了各种物理参数化的方案及其使用方法;最后论述了各种收支方程的计算问题,并且介绍了常用的滤波方法。全书注重理论与应用相结合,深入浅出,有助于提高读者的实际计算能力。

本书可供气象科研人员、气象台站预报人员和大专院校气象专业师生以及有关学科人员参考。

天气动力学中的诊断分析方法

丁一 汇 编 著

责任编辑 赵徐懿 廖琴仙

科 学 出 版 社 出 版

北京市东黄城根北街 16 号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1989 年 4 月第 一 版 开本:787×1092 1/16

1989 年 4 月第一次印刷 印张:19

印数:0001—8,120 字数:434,000

ISBN 7-03-000848-0/P·144

定 价: 17.20 元

前 言

诊断分析方法是现代天气动力学中常用的一种研究方法。它应用大尺度场资料,用适当的热力学和动力学方程对研究的现象进行分析和计算,以了解各种物理和动力过程的相对作用,在此基础上得到某一天气现象和系统的概念模式。它也是把理论研究结果与天气分析联系起来的一种基本手段。这是现代天气学中不可缺少的重要工具之一。所得到的结果的可靠程度一方面取决于基本资料的质量和分布状况,另一方面取决于分析方法的精确度。

在诊断分析中常常采用个例分析和综合法进行研究,尤其是个例分析方法。个例分析一般可以分为三步:(1)对实测的风、温度、水汽和气压场等进行直接的观测分析,以了解研究现象的基本演变事实和结构;(2)计算有关的热力学和运动学量,如垂直速度等;(3)进行收支计算或其它有关计算(如能量转换率的计算),以了解系统存在或演变的基本物理或动力过程。为了作出诊断分析的最佳设计,要利用所有可能得到的资料,并尽可能进行时空诊断,使这种诊断与动量、质量、热量和水汽方程的计算保持一致。要作到这一点有时并不容易,因为在计算其中的一些强迫项时(直接或作为余数)常常会遇到困难(如非绝热加热项),因而尽可能准确地估算出基本方程中的强迫项,是得到可靠的诊断结果的一个关键。

本书是在中国科学院研究生院讲义的基础上增添改写而成的,主要目的是培养学生的实际计算能力。对于每一个重要的诊断方程,读者应能编成程序,并在计算机上实现。书中所附的一些计算程序是作者在美国佛罗里达州立大学气象系与 T. N. Krishnamurti 教授合作研究时编写的。另外,作者在编写本书时也参考了 Krishnamurti 编写的热带数值天气预报工作手册(手稿),对此作者表示深切的谢意。作者对叶笃正先生和陶诗言先生的不断鼓励和张宝严、刘月贞、赵深铭、傅秀琴、张健等同志为本书编写大量程序并进行许多的实际计算表示衷心的感谢。

目 录

前言

第一章 有限差分法和平滑方法	1
§ 1.1 简单的有限差分公式	1
§ 1.2 拉普拉斯算子	3
§ 1.3 雅可比算子	4
§ 1.4 差分方程的精确性问题	7
§ 1.5 平滑方法	8
参考文献	10
第二章 客观分析和气象场的曲面拟合方法	11
§ 2.1 客观分析的一般原理	11
§ 2.2 逐步订正法	12
§ 2.3 最优插值法	15
§ 2.4 其它客观分析方法	17
§ 2.5 曲面拟合方法	20
§ 2.6 高原地区曲面拟合和收支计算的方法	30
§ 2.7 主观分析方法的作用	32
参考文献	33
第三章 观测和计算误差问题	34
§ 3.1 观测误差	34
§ 3.2 取样误差和分析模式误差	37
§ 3.3 探空资料随机误差对运动学量计算的影响	38
§ 3.4 观测和计算误差对收支计算的影响	42
参考文献	42
第四章 热力学量的计算	44
§ 4.1 求比湿和相对湿度	44
§ 4.2 求抬升凝结高度和凝结高度的温度	45
§ 4.3 相当位温的计算	46
§ 4.4 大气稳定度参数	47
参考文献	48
第五章 运动学量的计算	49
§ 5.1 涡度和散度	49
§ 5.2 用运动学方法求垂直运动速度	52
§ 5.3 准地转 ω 方程	55
§ 5.4 多层非线性平衡 ω 方程	61
参考文献	64
第六章 由风场计算流函数、速度势和高度场	66
§ 6.1 流函数和速度势的一般计算方法	66

§ 6.2 双傅氏变换方法	68
§ 6.3 由风场计算位势高度	70
参考文献	71
第七章 简单的尺度分离(滤波)方法	72
§ 7.1 空间滤波	72
§ 7.2 滤波方法的应用	78
§ 7.3 时间滤波	84
参考文献	86
第八章 中纬度环流与天气系统的结构和发展的诊断分析	87
§ 8.1 锋生函数的计算	87
§ 8.2 急流-锋的次级环流	88
§ 8.3 Q -向量	92
§ 8.4 位势倾向方程和诊断平衡模式	94
§ 8.5 $E-P$ 通量及其对平均基本流的影响	97
§ 8.6 常用的流体动力学不稳定判据	100
参考文献	105
第九章 大气边界层中热量、水汽和动量垂直输送的计算	106
§ 9.1 洋面上总体空气动力学公式和粗糙度	106
§ 9.2 由相似理论得到的地面通量	107
§ 9.3 地面能量平衡方程和相似理论中地面通量的耦合	110
§ 9.4 根据混合长理论计算垂直输送的方法	111
§ 9.5 行星边界层中地面通量的垂直分布	111
参考文献	113
第十章 非绝热加热的计算	114
§ 10.1 大尺度加热的计算	114
§ 10.2 对流加热和对流降水的计算	118
§ 10.3 感热加热的计算	137
§ 10.4 辐射加热的计算	137
参考文献	143
第十一章 积云对流对热量、水汽和涡度的垂直输送	145
§ 11.1 由大尺度观测资料计算视热源和视水汽汇	145
§ 11.2 由大尺度观测资料计算积云对动量和涡度的垂直输送	149
§ 11.3 根据云模式计算积云的热量和水汽垂直输送	152
§ 11.4 根据云模式计算积云的动量和涡度垂直输送	163
§ 11.5 积云对流对大气层结的作用	166
附录 积云质量通量分布的计算方法	167
参考文献	173
第十二章 大尺度水汽、热量、涡度和能量收支的计算	174
§ 12.1 水汽通量和水汽收支的计算	174
§ 12.2 大尺度涡度和散度收支	176
§ 12.3 位涡和位涡收支的计算	177
§ 12.4 动能收支计算	180

§ 12.5 有效位能的收支计算·····	186
§ 12.6 计算有限区中涡旋有效位能收支·····	190
§ 12.7 湿有效位能收支的计算·····	192
§ 12.8 能量循环·····	192
§ 12.9 准拉格朗日坐标系收支方程的表达式·····	199
参考文献·····	199
第十三章 辐散风和无辐散风的动能、水汽和涡度收支方程·····	201
§ 13.1 动能方程·····	201
§ 13.2 水汽收支方程·····	203
§ 13.3 涡度收支方程·····	204
§ 13.4 ψ 场和 χ 场的相互作用·····	204
§ 13.5 波谱域中辐散风和旋转风动能及其间的能量转换·····	215
参考文献·····	220
第十四章 大气环流的诊断分析·····	221
§ 14.1 大气环流的分解·····	221
§ 14.2 角动量输送和收支·····	222
§ 14.3 水汽输送和收支·····	228
§ 14.4 热量输送和收支·····	229
§ 14.5 涡度收支·····	231
§ 14.6 动能收支·····	234
§ 14.7 能量循环·····	236
§ 14.8 波谱域中能量方程的计算方法·····	241
§ 14.9 灵敏度分析·····	249
参考文献·····	249
附录 1 诊断分析中常用的常数·····	251
附录 2 标准等压面高度和 ω 与 w 的换算表·····	252
附录 3 与本书有关的一些常用程序·····	253

第一章 有限差分法和平滑方法

在诊断分析和数值天气预报中,经常需要计算空间导数和时间导数,例如需要计算 $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\nabla^2 \phi$, $J(\phi, \zeta_s)$, $\frac{\partial T}{\partial t}$ 和 $\frac{\partial \omega}{\partial p}$. 计算空间导数就是用不同的差分方法,计算出在 x 轴、 y 轴、垂直轴上任一固定点或网格点上的导数值。这就需要知道该点及附近诸点的要素值。不同的有限差分方法,所计算出的导数的精确度也不同。时间导数的计算在诊断分析和数值预报中是完全不同的。在数值预报中,将来的状态是未知的,也即要预报的,因而所设计的时间差分格式必须是计算稳定的,这样才能积分或随时间预报下去,一步步把将来的状态求解出来,这种与时间有关的问题需要专门的处理。在这里我们将不讨论这个问题。而在诊断分析中,时间差分的计算要简单得多,因为用来进行时间差分计算的前后两个(或三个)时刻的变量值都是已知的,一般不存在时间积分及计算不稳定问题。

在计算空间导数中可以利用二阶和四阶方案,为了构造这些方案,主要是利用在任一点的泰勒展开。由此我们可以得到不同精确度的空间差分公式。

§ 1.1 简单的有限差分公式

如果在一些离散的等距网格点 $x = 0, \Delta x, 2\Delta x, \dots, n\Delta x$ 上给出各点的观测值 $A(x)$, 则用有限差分可以代表函数 $A(x)$ 的空间导数, Δx 是格点距离。由该变量的泰勒展开可得

$$A(x + \Delta x) = A(x) + \left. \frac{dA}{dx} \right|_x \Delta x + \left. \frac{d^2 A}{dx^2} \right|_x \frac{\Delta x^2}{2} + \dots$$

$$A(x - \Delta x) = A(x) - \left. \frac{dA}{dx} \right|_x \Delta x + \left. \frac{d^2 A}{dx^2} \right|_x \frac{\Delta x^2}{2} - \dots$$

利用上述两式可以导出 $\left. \frac{dA}{dx} \right|_x$ 的三个表达式,即

$$\left. \frac{dA}{dx} \right|_x = \frac{A(x + \Delta x) - A(x)}{\Delta x} \quad \text{误差量级是 } \Delta x$$

$$\left. \frac{dA}{dx} \right|_x = \frac{A(x) - A(x - \Delta x)}{\Delta x} \quad \text{误差量级是 } \Delta x$$

$$\left. \frac{dA}{dx} \right|_x = \frac{A(x + \Delta x) - A(x - \Delta x)}{2\Delta x} \quad \text{误差量级是 } \Delta x^2$$

上面三个差分式分别叫内插、后插和中心差。误差的量级取决于泰勒展开式中被略去项的前一项的量级,也就是说这种误差是由截去了泰勒展开式中的高阶无限小项引起,所以也叫截断误差。用类似方法可以得到一阶导数的四阶差分方案,其表达式为

$$\left. \frac{dA}{dt} \right|_x = \frac{4}{3} \frac{[A(x + \Delta x) - A(x - \Delta x)]}{2\Delta x} - \frac{1}{3} \frac{[A(x + 2\Delta x) - A(x - 2\Delta x)]}{\Delta x}$$

由上面的表达式可知,四阶方案需要邻近四个点的观测值来决定在 x 点的导数值,而二阶方案只需要附近二个点的值。显然四阶方案是较精确的。

以类似的方法可以得到 $A(x)$ 的二阶导数,即

$$\frac{d^2 A}{dx^2} = \frac{A(x + \Delta x) - 2A(x) + A(x - \Delta x)}{\Delta x^2}$$

此差分式的误差量级是 Δx^4 。

对 $A(x + \Delta x)$, $A(x + 2\Delta x)$, $A(x - \Delta x)$ 和 $A(x - 2\Delta x)$ 进行泰勒展开并再进行线性组合,可以求得四阶精度的二阶导数,即

$$A(x \pm \Delta x) = A(x) \pm \frac{dA}{dx} \Delta x + \frac{d^2 A}{dx^2} \cdot \frac{\Delta x^2}{2} \pm \frac{d^3 A}{dx^3} \frac{\Delta x^3}{6} + \frac{d^4 A}{dx^4} \frac{\Delta x^4}{24} \pm \frac{d^5 A}{dx^5} \frac{\Delta x^5}{120} + O(\Delta x^6)$$

由上式可写成一般的组合形式,

$$\begin{aligned} & PA(x) + Q[A(x + \Delta x) + A(x - \Delta x)] + R[A(x + 2\Delta x) + A(x - 2\Delta x)] \\ &= PA(x) + Q \left[2A(x) + \frac{d^2 A}{dx^2} \Delta x^2 + \frac{d^4 A}{dx^4} \frac{\Delta x^4}{12} + O(\Delta x^6) \right] \\ &+ R \left[2A(x) + 4 \frac{d^2 A}{dx^2} \Delta x^2 + \frac{4}{3} \frac{d^4 A}{dx^4} \Delta x^4 + O(\Delta x^6) \right] \\ &= (P + 2Q + 2R)A(x) + (Q + 4R)\Delta x^2 \frac{d^2 A}{dx^2} \\ &+ \left(\frac{Q}{12} + \frac{4}{3} R \right) \Delta x^4 \frac{d^4 A}{dx^4} \end{aligned}$$

因而设

$$\begin{cases} P + 2Q + 2R = 0 \\ Q + 4R = 1 \\ Q/12 + 4/3 R = 0 \end{cases}$$

则上式为

$$PA(x) + Q[A(x + \Delta x) + A(x - \Delta x)] + R[A(x + 2\Delta x) + A(x - 2\Delta x)] = \frac{d^2 A}{dx^2} \Delta x^2 + O(\Delta x^6)$$

由联立方程可以解出 P , Q , R 的值,代入上式可得

$$\begin{aligned} \frac{d^2 A}{dx^2} &= \frac{1}{\Delta x^2} \left[-\frac{5}{2} A(x) + \frac{4}{3} [A(x + \Delta x) + A(x - \Delta x)] \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{12} [A(x + 2\Delta x) + A(x - 2\Delta x)] \right] \end{aligned}$$

上式也可以用来计算四阶精度的拉普拉斯算子。对于大多数诊断分析而言,用二阶精度的格式就可以了,四阶精度的格式主要用于中期预报中。

§ 1.2 拉普拉斯算子

下面我们求拉普拉斯算子的 5 点和 9 点差分格式, 并且给出二阶和四阶的差分方案. 由二维的泰勒展开式

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f(a, b) + \frac{\partial f(a, b)}{\partial x} (x-a) + \frac{\partial f(a, b)}{\partial y} (y-b) + \frac{\partial^2 f(a, b)}{\partial x^2} \\ &\quad \times \frac{(x-a)^2}{2!} + \frac{\partial^2 f(a, b)}{\partial y^2} \frac{(y-b)^2}{2!} + \frac{\partial^2 f(a, b)}{\partial x \partial y} (x-a)(y-b) + \dots \\ &= f(a, b) + \sum_{q=1}^p \frac{1}{q!} \left[\sum_{r=0}^q \frac{q!}{(q-r)!r!} \frac{\partial^q f(a, b)}{\partial x^{q-r} \partial y^r} (x-a)^{q-r} (y-b)^r \right] + R_p \end{aligned}$$

可以写出 $A(x \pm h, y \pm h)$ 的四个泰勒展开式 (其中 h 是 x 方向和 y 方向的格点距离)

$$\begin{aligned} A(x+h, y+h) &= A(x, y) + h \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \right) A(x, y) \\ &\quad + \frac{h^2}{2!} \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 A(x, y) + \dots \\ A(x-h, y-h) &= A(x, y) - h \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \right) A(x, y) \\ &\quad + \frac{h^2}{2!} \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 A(x, y) + \dots \\ A(x-h, y+h) &= A(x, y) - h \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y} \right) A(x, y) \\ &\quad + \frac{h^2}{2!} \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 A(x, y) + \dots \\ A(x+h, y-h) &= A(x, y) + h \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y} \right) A(x, y) \\ &\quad + \frac{h^2}{2!} \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 A(x, y) + \dots \end{aligned}$$

类似地也可以写出 $A(x, y+h)$, $A(x-h, y)$, $A(x, y-h)$ 和 $A(x+h, y)$ 在原点 $A(x, y)$ 的四个展开式. 由前四个关系式可以求得

$$\begin{aligned} &A(x+h, y+h) + A(x-h, y+h) + A(x-h, y-h) + A(x+h, y-h) \\ &= 4A(x, y) + 2h^2 \left[\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} \right] + \frac{h^4}{6} \left[\nabla^4 A + 4 \frac{\partial^4 A}{\partial x^2 \partial y^2} \right] \\ &\quad + \frac{h^6}{180} \left[\nabla^6 A + 12 \nabla^2 \frac{\partial^4 A}{\partial x^2 \partial y^2} \right] + O(h^8) \end{aligned}$$

由后四个关系式可以求得

$$\begin{aligned} &A(x, y+h) + A(x-h, y) + A(x, y-h) + A(x+h, y) \\ &= 4A(x, y) + h^2 \left[\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} \right] + \frac{h^4}{12} \left[\frac{\partial^4 A}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 A}{\partial y^4} \right] \\ &\quad + \frac{h^6}{360} \left[\frac{\partial^6 A}{\partial x^6} + \frac{\partial^6 A}{\partial y^6} \right] + O(h^8) \end{aligned}$$

我们可以分别求得两种 5 点差分格式

$$\nabla^2 A = \frac{1}{2h^2} [A(x+h, y+h) + A(x-h, y+h) + A(x-h, y-h) + A(x+h, y-h) - 4A(x, y)]$$

$$\nabla^2 A = \frac{1}{h^2} [A(x, y+h) + A(x-h, y) + A(x, y-h) + A(x+h, y) - 4A(x, y)]$$

图 1.1 给出了 5 点拉普拉斯差分的构造格式。由上两式可得

$$\begin{aligned} & A(x+h, y+h) + A(x-h, y+h) + A(x-h, y-h) + A(x+h, y-h) \\ & + 4[A(x, y+h) + A(x-h, y) + A(x, y-h) + A(x+h, y)] \\ & = 20A(x, y) + 6h^2\nabla^2 A + \frac{h^4}{24} \left[\nabla^2 A + 8 \frac{\partial^4 A}{\partial x^2 \partial y^2} \right] \\ & + \frac{h^6}{180} \left[3\nabla^4 A + 6\nabla^2 \frac{\partial^4 A}{\partial x^2 \partial y^2} \right] + O(h^8) \end{aligned}$$

因此可给出 9 点差分格式 (图 1.2) 和二阶的拉普拉斯差分格式

$$\begin{aligned} \nabla^2 A = & \{4[A(x+h, y) + A(x-h, y) + A(x, y-h) + A(x, y+h)] \\ & + [A(x+h, y+h) + A(x-h, y+h) + A(x+h, y-h) \\ & + A(x-h, y-h)] - 20A(x, y)\} / 6h^2 + O(h^4) \end{aligned}$$

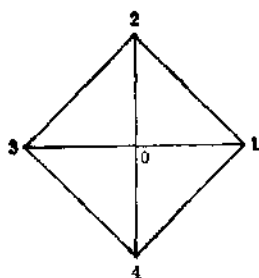


图 1.1

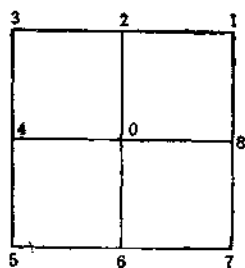


图 1.2

上述 9 点格式一般比 5 点格式要精确, 但两者的误差量级同为 h^2 , 也即都是二阶拉普拉斯差分。由二阶精度的 9 点格式出发, 用数值迭代法可以设计四阶精度的拉普拉斯差分格式。先由 $\nabla^4 A = \nabla^2 G$ 求出 G , 此时设 G 的初值为 $G = 0$, 用 9 点格式求出 G 后, 可由 $G = \nabla^2 A$ 求出 A 。有了 $\nabla^4 A$, 不难再求出四阶精度的拉普拉斯值。

通过比较, 结果表明四阶精度的拉普拉斯差分均方根误差最小, 其次是 9 点格式, 5 点格式较差, 但有时 5 点格式也会比 9 点格式好。一般来说, 对 Δx 的截断误差愈高, 则有限差分近似式愈精确。

§ 1.3 雅可比算子

这个算子最常出现在涡度方程的平流项。

• • •

$$\text{令 } A = -V_z \cdot \nabla \zeta, V_z \text{ 是地转风, } V_z = k \times \nabla \left(\frac{gz}{f_0} \right) = k \times \nabla \phi$$

$$\zeta = k \cdot \nabla \times V = \nabla^2 \phi$$

上两式中 ϕ 是地转流函数。因而

$$A = -k \times \nabla \phi \cdot \nabla \zeta = \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial \zeta}{\partial x} - \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \zeta}{\partial y} = -J(\phi, \zeta)$$

在这里可认为涡度 ζ 是沿地转流场平流的。在正压模式中, 上述涡度平流项出现在涡度守恒定律中, 即有

$$\frac{d\zeta_s}{dt} = 0$$

$$\frac{\partial \zeta_s}{\partial t} = -J(\phi, \zeta) - \beta \frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad \beta = \frac{\partial f}{\partial y}$$

ζ 和 ζ_s 分别是相对涡度和绝对涡度。当对一闭合区积分时, 这个方程有两个重要的区域守恒量, 一是总动能 $\left(\frac{\Delta \phi}{2}\right)^2$ 守恒, 一是涡度平方的平均值 $(\nabla^2 \phi + f)^2$ 守恒。在构造雅可比差分算子时, 应要求这两个守恒量不因截断误差而不守恒。可以根据下列三个雅可比基本公式来构造差分格式:

$$(a) \quad J(\phi, \zeta) = \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \zeta}{\partial y} - \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial \zeta}{\partial x}$$

$$(b) \quad J(\phi, \zeta) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\phi \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\phi \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right)$$

$$(c) \quad J(\phi, \zeta) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\zeta \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\zeta \frac{\partial \phi}{\partial y} \right)$$

(a) 为雅可比式的平流形式, (b) 和 (c) 为其通量形式。设 “—” 为一闭合区的区域平均。不难证明, 可用下式表示区域平均的动能守恒:

$$\overline{\phi J(\phi, \zeta)} = 0$$

而区域平均的涡度平方的平均同样可表示为

$$\overline{\zeta J(\phi, \zeta)} = 0$$

因而在构造雅可比式的有限差分式时, 应保证流函数和雅可比的协方差与涡度和雅可比的协方差在闭合区中不随时间变化。可以证明, 前述三个雅可比公式的简单线性组合事实上具有这两个重要特性。

对 9 点格式, 上面三个雅可比式可分别写作

$$(a) = -\frac{1}{4d^2} [(\zeta_{i+1,j} - \zeta_{i-1,j})(\phi_{i,j+1} - \phi_{i,j-1}) \\ - (\zeta_{i,j+1} - \zeta_{i,j-1})(\phi_{i+1,j} - \phi_{i-1,j})]$$

$$(b) = -\frac{1}{4d^2} [\zeta_{i+1,j}(\phi_{i+1,j+1} - \phi_{i+1,j-1}) - \zeta_{i-1,j}(\phi_{i-1,j+1} - \phi_{i-1,j-1})]$$

$$(c) = -\frac{1}{4d^2} [\zeta_{i+1,j+1}(\phi_{i,j+1} - \phi_{i+1,j}) - \zeta_{i-1,j-1}(\phi_{i-1,j} - \phi_{i,j-1}) \\ - \zeta_{i-1,j}(\phi_{i,j+1} - \phi_{i-1,j}) + \zeta_{i+1,j-1}(\phi_{i+1,j} - \phi_{i,j-1})]$$

可以证明以上三个雅可比和的 $\frac{1}{3}$ 满足总动能和平均涡度平方守恒的两个积分关系式。当把雅可比式 (a), (b) 和 (c) 乘 ϕ 或 ζ 后相加再乘 $\frac{1}{3}$, 并在 9 点相加时便会发现, 在中心点的所有项分别与其它 8 点上的同类项符号相反, 可以相互抵消。在区域上对各点都这样处理, 即可证明 $\overline{\phi J(\phi, \zeta)}$ 和 $\overline{\zeta J(\phi, \zeta)}$ 完全抵消, 从而证明了总动能和涡度平方的平均两个属性是守恒的^[4]。

上面是二阶精度的雅可比格式, 下面讨论四阶精度的雅可比格式。图 1.3 为构造此种差分格式的 13 点分布示意图。主要作法是先构造 6 个雅可比差分式, 使它们的线性组合对二阶和三阶项正好完全抵消, 以此得到的线性组合, 便成为四阶雅可比差分式。这 6 个雅可比式可写作如下形式:

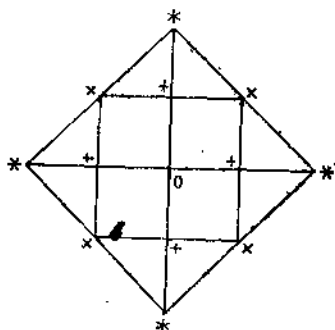


图 1.3

$$J^{++}(\zeta, \phi) = \frac{1}{4d^2} [(\zeta_{i+1,j} - \zeta_{i-1,j})(\phi_{i,j+1} - \phi_{i,j-1}) - (\zeta_{i,j+1} - \zeta_{i,j-1})(\phi_{i+1,i} - \phi_{i-1,i})]$$

$$J^{*+}(\zeta, \phi) = \frac{1}{4d^2} [\zeta_{i+1,j+1}(\phi_{i,j+1} - \phi_{i+1,j}) - \zeta_{i-1,j-1}(\phi_{i-1,j} - \phi_{i,j-1}) - \zeta_{i-1,j}(\phi_{i,j+1} - \phi_{i-1,j}) + \zeta_{i,j-1}(\phi_{i+1,j} - \phi_{i,j-1})]$$

$$J^{+*}(\zeta, \phi) = \frac{1}{4d^2} [\zeta_{i+1,j}(\phi_{i+1,j+1} - \phi_{i,j-1}) - \zeta_{i-1,j}(\phi_{i-1,j} - \phi_{i-1,j-1}) - \zeta_{i,j+1}(\phi_{i+1,j+1} - \phi_{i-1,j+1}) + \zeta_{i,j-1}(\phi_{i+1,j-1} - \phi_{i-1,j-1})]$$

$$J^{**}(\zeta, \phi) = \frac{1}{8d^2} [(\zeta_{i+1,j+1} - \zeta_{i-1,j-1})(\phi_{i-1,j+1} - \phi_{i+1,j-1}) - (\zeta_{i-1,j+1} - \zeta_{i+1,j-1})(\phi_{i+1,j+1} - \phi_{i-1,j-1})]$$

$$J^{*+}(\zeta, \phi) = \frac{1}{8d^2} [\zeta_{i+1,j+1}(\phi_{i,j+1} - \phi_{i+1,j}) - \zeta_{i-1,j-1}(\phi_{i-1,j} - \phi_{i,j-1}) - \zeta_{i-1,j+1}(\phi_{i,j+1} - \phi_{i-1,j}) + \zeta_{i+1,j-1}(\phi_{i+1,j} - \phi_{i,j-1})]$$

$$J^{+*}(\zeta, \phi) = \frac{1}{8d^2} [\zeta_{i+1,j}(\phi_{i+1,j+1} - \phi_{i+1,j-1}) - \zeta_{i-1,j}(\phi_{i-1,j} - \phi_{i-1,j-1}) - \zeta_{i,j+1}(\phi_{i+1,j+1} - \phi_{i-1,j}) + \zeta_{i,j-1}(\phi_{i+1,j-1} - \phi_{i-1,j-1})]$$

图 1.3 标出了用来构造各雅可比式的格点。具有四阶精度的线性组合为

$$J(\zeta, \phi) = 2 \left\{ \frac{1}{3} [J^{++}(\zeta, \phi) + J^{*-}(\zeta, \phi) + J^{+*}(\zeta, \phi)] \right\} \\ - \frac{1}{3} [J^{**}(\zeta, \phi) + J^{*+}(\zeta, \phi) + J^{*-}(\zeta, \phi)] + O(d^4)$$

在计算雅可比式时主要会遇到侧边界问题,不论是5点、9点还是13点格式都不可能计算边界上的雅可比值,因为这需要用到计算区以外的格点值。如果在边界上保证涡度平流等于零,或者在边界上给定一些虚假的雅可比值,使得它们与内点的 $\phi J(\phi, \zeta)$ 和 $\zeta J(\phi, \zeta)$ 恰恰相互抵消,则可以保证前述两个区域平均量守恒。在构造二阶和四阶精度的雅可比式时应注意到这一点。但经验表明,较简单的做法是沿经向边界 ($J=1$ 和 $J=M$) 选取不随时间变化的流函数和涡度,沿纬向方向取周期性边界条件。这种做法对于9点雅可比格式来说不会破坏它们的二次区域守恒量的守恒特性。在这种情况下对3或4天的积分都可保持总动能和平均涡度平方近于不变。这对数值模拟和数值预报尤其重要。

§ 1.4 差分方程的精确性问题

在求解数学物理方程时,构成差分格式的方法有好多种,如有限元方法、特征线法、差分方法等。上面讨论的是最一般的差分代替微商的差分方法。这种方法的精确度与许多因子有关,前面已经指出,首先与对 Δx 的截断误差的阶有关,同时差分近似的精确度还依赖于网格距 Δx 的大小及研究对象的尺度。下面的简单分析可以说明这一点。因为大气是以波状运动为主,所以可把上述差分近似式应用于一简单的谐波。

设
$$A(x) = \phi \sin \frac{2\pi}{L} x$$

则
$$\frac{dA(x)}{dx} = A'(x) = \phi \frac{2\pi}{L} \cos \frac{2\pi}{L} x$$

L 是波长, ϕ 是振幅,把上式代入前面的中心差分格式可得

$$A'(x) = \frac{dA(x)}{dx} = \phi \frac{\sin\left(\frac{2\pi}{L}\right)(x + \Delta x) - \sin\left(\frac{2\pi}{L}\right)(x - \Delta x)}{2\Delta x} \\ = \phi \frac{\cos\left(\frac{2\pi}{L}\right)x \sin\left(\frac{2\pi}{L}\right)\Delta x}{\Delta x} \\ = \left[\phi \frac{2\pi}{L} \cos \frac{2\pi x}{L} \right] \cdot \frac{\sin\left(\frac{2\pi}{L}\right)\Delta x}{\frac{2\pi\Delta x}{L}}$$

因而函数 $A(x) = \phi \sin \frac{2\pi}{L} x$ 一阶导数的中心差分近似式等于该函数导数的真值乘上一个因子

$$\frac{\sin\left(\frac{2\pi}{L}\right)\Delta x}{\left(\frac{2\pi}{L}\right)\Delta x}$$

因为当 a 趋于零时比例关系 $\frac{\sin a}{a}$ 趋于 1, 很明显, 中心差分近似式的精确度随 Δx 减小而增加。当比例 $\frac{\Delta x}{L}$ 很小时, 例如 $L \geq 10\Delta x$ 时, 则中心差分式十分近似于 $A'(x)$

的真值; 但如果 $\Delta x \geq \frac{L}{2}$, 则差分的结果很差, 例如当 $\Delta x = \frac{L}{2}$ 时, 不论 L 取什么值, $A'(x)$ 的有限差分近似总是为零。

与截断误差有关, 相容性也是构成差分的一个重要原则。例如方程

$$\frac{d^2y(x)}{dx^2} + Ay(x) = f(x)$$

的差分方程为

$$\frac{y(x+\Delta x) - 2y(x) + y(x-\Delta x))}{\Delta x^2} + Ay(x) + O(\Delta x) = f(x)$$

把上面的微分方程与相应的差分方程相减得

$$\frac{d^2y(x)}{dx^2} + Ay(x) - \left(\frac{y(x+\Delta x) - 2y(x) + y(x-\Delta x))}{\Delta x^2} \right) + Ay(x) = O(\Delta x)$$

它们的差与 Δx 同量级, 因此当 $\Delta x \rightarrow 0$ 时, 有

$$\left| \frac{d^2y(x)}{dx^2} + Ay(x) - \left\{ \frac{y(x+\Delta x) - 2y(x) + y(x-\Delta x))}{\Delta x^2} + Ay(x) \right\} \right| \rightarrow 0$$

这时在差分方程中舍去截断误差后, 所得到的差分方程与微分方程是相容的。在这种情况下, 格式的差分解才可能收敛到定解问题的解。

另外, 在进行差分计算时, 每步都免不了出现误差, 例如四舍五入造成的误差等。步数越多, 出现这种误差的机会也就越多。此外如果计算是逐点递推的, 则每一步的误差都会往后积累。这种积累的结果会对以后的值造成更大的误差。因而存在差分格式的稳定性问题。如果最后产生的误差与步数无关, 且有界, 则可认为差分格式对初值稳定; 否则称格式不稳定。这种不稳定格式是不能应用的, 并且这种格式一定也不收敛。

§ 1.5 平滑方法

所谓平滑就是用某点周围若干点的值进行加权平均来代替该点的值。平滑后的场可以减弱或滤掉短波扰动。

(1) 一维平滑^[2]

令 $z = z(x)$, $-\infty < x < \infty$, 其离散值 $z_i = z(x_i)$, $x_i = i\Delta x$, $i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ 。

简单的平滑算子为

$$\bar{z}_i = (1-s)z_i + s(z_{i-1} + z_{i+1})/2 \quad (1.1)$$

或者

$$\bar{z}_i = z_i + s(z_{i-1} + z_{i+1} - 2z_i)/2 \quad (1.2)$$

上式中 s 是平滑系数,它是中心对称的,且只与 $i-1, i$ 和 $i+1$ 三个点的 x 值有关,其它点的权重为零。

为了解 (1.1) 式对 z_i 场的平滑作用,将 z_i 展成谐波形式

$$z_i = C + A \cos k(x_i - \varphi) \quad (1.3)$$

C 是常数, A 是波的振幅, φ 是位相。则有下列三角公式:

$$z_{i+1} = C + A \cos k(x_{i+1} - \varphi) = C + A \cos k(x_i - \varphi + \Delta x)$$

或

$$z_{i+1} = C + A \cos k \Delta x \cos k(x_i - \varphi) - A \sin k \Delta x \sin k(x_i - \varphi) \quad (1.4)$$

$$z_{i-1} = C + A \cos k \Delta x \cos k(x_i - \varphi) + A \sin k \Delta x \sin k(x_i - \varphi) \quad (1.5)$$

将 (1.3), (1.4) 和 (1.5) 式代入 (1.1) 式,可得

$$\bar{z}_i = C + A[1 - s(1 - \cos k \Delta x)] \cos k(x_i - \varphi) \quad (1.6)$$

比较 (1.6) 和 (1.3) 式可见,平滑算子 (1.1) 既不改变谐波的位相,也不改变波数,而只改变谐波的振幅。平滑后的振幅为

$$\bar{A} = A[1 - s(1 - \cos k \Delta x)] \quad (1.7)$$

平滑后的振幅和未平滑的振幅之比称作某一波数的响应函数。其值为

$$R(k) = \bar{A}/A = 1 - s(1 - \cos k \Delta x) \quad (1.8)$$

或

$$R(L) = 1 - 2s \sin^2 \pi \Delta x / L \quad (1.9)$$

选取适当的 s 值,可以设计不同特点的响应函数。如使波振幅减小, $|R|$ 必须 < 1 , 因而 s 必须 ≥ 0 。但对任何波长不希望有 $R < 0$, 因为这意味着有半波长的位相移动。因而有

$$0 \leq s \leq 1/2$$

如取 $s = \frac{1}{2}$, 由 (1.8) 或 (1.9) 式可得

$$R = 1 - \sin^2 \frac{\pi \Delta x}{L} = \cos^2 \pi \Delta x / L$$

对于 $L = 2\Delta x$ 波长的波完全可以消去 ($R = 0$), 也即平滑掉两倍格距的波。当 $L > 2\Delta x$ 时, 振幅有不同程度的衰减, 波长越大, R 越接近 1。波长比 $2\Delta x$ 短的波不能为网格系统所分辨出来, 但这种波可以在大气中观测到。另外, 在非线性系统中, 即使初始时不包含这种短波, 但由于存在波与波之间非线性相互作用的结果, 一般也可产生这种波。只要这种波存在, 它们的能量就有可能传给较长波长的波, 因而应控制这种短波的增长。取 $0 \leq s \leq \frac{1}{2}$, 则对于所有 $L < 2\Delta x$ 的波, R 在 0 与 1 之间。

对于时间序列可有类似的平滑公式。例如

$$\bar{z}(t) = 0.25[z(t - \Delta t) + z(t + \Delta t)] + 0.5z(t)$$

(2) 二维平滑

把一维平滑算子(式 (1.1)) 用于二维情况, 可以得出两种二维平滑算子。第一种是沿某一方向平滑之后, 将结果再沿另一方向平滑。对变量 $z_{i,j}$, $i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, $j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ 有

$$\bar{z}_{i,j}' = (\bar{z}_{i,j}')^2 = \left[z_{i,j} + \frac{s}{2} (z_{i-1,j} + z_{i+1,j} - 2z_{i,j}) \right]^2 \quad (1.10)$$

对 (1.10) 式进行展开, 可得

$$\begin{aligned} \bar{z}_{i,j}' &= z_{i,j} + \frac{s}{2} (1-s)(z_{i-1,j} + z_{i+1,j} + z_{i,j+1} + z_{i,j-1} - 4z_{i,j}) \\ &\quad + \frac{s^2}{4} (z_{i-1,j+1} + z_{i+1,j+1} + z_{i+1,j-1} + z_{i-1,j-1} - 4z_{i,j}) \end{aligned} \quad (1.11)$$

由 (1.11) 式可见, 这种平滑包括 9 个点的 $z_{i,j}$ 值, 故又称 9 点平滑公式。设函数 $z(x, y)$ 可展开为二维傅氏级数

$$z_{i,j} = C + A \cos k(x_i - \varphi) \cos h(y_j - \theta)$$

则 9 点平滑算子的响应函数为

$$R(k, h) = [1 - s(1 - \cos k\Delta x)][1 - s(1 - \cos h\Delta y)]$$

或

$$R(k, h) = [1 - 2s \sin^2 k\Delta x/2][1 - 2s \sin^2 h\Delta y/2] \quad (1.12)$$

比较 (1.12) 和 (1.9) 式可以看到, 两方程右边具有相同的形式, 因而可用于一维平滑中的所有的方法都可独立地用于 (1.12) 式平滑算子的每一部分。

第二种二维平滑算子是分别沿 x 方向和 y 方向平滑, 再取其平均值。对于变量 $z_{i,j}$, 有

$$\bar{z}_{i,j}' = \frac{1}{2} (\bar{z}_{i,j}' + \bar{z}_{i,j}'') \quad (1.13)$$

上式中

$$\bar{z}_{i,j}' = z_{i,j} + \frac{1}{2} s (z_{i+1,j} + z_{i-1,j} - 2z_{i,j})$$

$$\bar{z}_{i,j}'' = z_{i,j} + \frac{1}{2} s (z_{i,j+1} + z_{i,j-1} - 2z_{i,j})$$

将上面 $\bar{z}_{i,j}'$ 和 $\bar{z}_{i,j}''$ 的表达式代到 (1.13) 式中, 可得

$$\bar{z}_{i,j}' = z_{i,j} + \frac{s}{4} (z_{i-1,j} + z_{i+1,j} + z_{i,j-1} + z_{i,j+1} - 4z_{i,j}) \quad (1.14)$$

这种平滑用了 5 点的 $z_{i,j}$ 值, 故可称作 5 点平滑公式。其响应函数为

$$R^*(k, h) = 1 - s \left[1 - \frac{1}{2} (\cos k\Delta x + \cos h\Delta y) \right]$$

或

$$R^*(k, h) = 1 - s(\sin^2 k\Delta x/2 + \sin^2 h\Delta y/2) \quad (1.15)$$

当 $s = \frac{1}{2}$ 时, 可滤去 $L_x = 2\Delta x$, $L_y = 2\Delta y$ 的短波。由 (1.12) 和 (1.15) 式可见, 对于 $L > 2\Delta x$ 的波, 5 点格式要比 9 点格式衰减得慢。

参 考 文 献

- [1] 哈廷纳, G. J., 1971, 数值天气预报, 北京大学地球物理系气象专业译, 1975, 科学出版社。
- [2] Shapiro, R., Smoothing, filtering and boundary effects, *Rev. Geoph. and Space Phys.*, 8 (1970), 359—387.