大学数学的内容、方法与技巧丛书

高等数学

内容、方法与技巧（上）

孙清华 郑小姣

华中科技大学出版社

大学数学的内容、方法与技巧丛书

高等数学
内容、方法与技巧

（上）

孙清华　郑小姣

华中科技大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学 内容、方法与技巧(上)/孙清华 郑小姣
武汉:华中科技大学出版社,2004年10月
ISBN 7-5609-3285-1

Ⅰ.高…
Ⅱ.①孙… ②郑…
Ⅲ.高等数学-高等学校-教学参考资料
Ⅳ.O13

高等数学 内容、方法与技巧(上) 孙清华 郑小姣

责任编辑:徐正达 封面设计:刘 卉
责任校对:朱 霞 责任监印:张正林

出版发行:华中科技大学出版社
武昌喻家山 邮编:430074 电话:(027)87557437

录 排:华中科技大学惠友文印中心
印 刷:华中科技大学印刷厂

开本:850×1168 1/32 印张:14 字数:335 000
版次:2004年10月第1版 印次:2004年10月第1次印刷 定价:16.80元
ISBN 7-5609-3285-1/O·335

内 容 简 介

本书是大学生学习高等数学课程非常适用的辅导书，分上、下两册，主要内容与同济大学编的《高等数学》第五版同步. 上册内容包括函数与极限、导数与微分、微分中值定理与导数的应用、不定积分、定积分、定积分的应用、空间解析几何与向量代数等，并增添了关于经济数学方面的部分内容，编写顺序与教材同步，按章节编排，每节分为主要内容，疑难解析，方法、技巧与典型例题分析和考研试题典型分析四个部分，对高等数学的理论与概念作了凝炼与归纳，对学习中可能出现的问题作了分析与解答，对习题与例题作了演示与剖析，对解题方法与技巧作了评点与指导，并对考研数学试题进行了演练与解答，在高等数学方面力图为读者自学、提高、考研指明方向和途径、提供方法与技巧.

欢迎选择本系列丛书，希望它成为您的良师益友.

前　　言

高等数学是高等学校一门重要的数学基础课程，它不仅是其它数学后续课程的基础，而且是一切专业课程的基础.学习高等数学，不只是学习它的数学知识和解题方法，更重要的是掌握理解问题的数学思想与分析问题的数学方法，这是使我们终生受益的.为此我们编写了本书，希望它成为读者的良师益友.

本书的特色是主要内容与同济大学编《高等数学》第五版同步，以章节为序，便于读者自学、提高与研究.本书每节分为主要内容，疑难解析，方法、技巧与典型例题分析和考研试题典型分析四个部分，对高等数学的理论与概念作了凝炼与归纳，对教材与学习中可能出现的问题作了分析与解答，对习题与例题作了演示与剖析，对解题方法与技巧作了评点与指导，并对考研数学试题进行了演练与解答，对读者提高综合运用能力与把握考研方向非常有益.本书汇解了教材中的大部分习题，适量增添了部分例题，还补充了有关经济数学方面的部分内容与例题，力图使本书更臻完美，更适合各方面的读者的需要.

本书的出版得到了华中科技大学出版社领导和编辑的大力支持，感谢他们为本书作了许多精细的工作.

对本书存在的不足与问题，欢迎同行与读者批评指正.

孙清华　郑小姣

2004 年 9 月

于武汉

目　　录

第一章　函数与极限

第一节　映射与函数

主 要 内 容

一、集合

1. 具有某种特定性质的事物的总体称为集合，组成集合的事物称为该集合的元素.

集合可以用列举法或描述法表示.

集合可按所含元素的多少分为有限集与无限集，字母 **Z**，**N**，**Q**，**R** 分别表示整数集、自然数集、有理数集、实数集.

2. 对 A,B 两个集合，要求了解子集、真子集、并集、交集、差集与两集合相等的概念，了解空集的概念，并掌握集合运算的交换律、结合律、分配律与对偶律.

3. 区间是一类数集，分为有限区间与无限区间. 有限区间又分为开区间、半开区间和闭区间. 有限区间的两端点 a 与 b 之差 $b-a$ 称为区间的长度.

4. 以点 a 为中心的开区间称为 a 的邻域，记作 $U(a)$；开区间 $(a-\delta,a+\delta)$（δ 为正数）称为点 a 的 δ 邻域，记作 $U(a,\delta)$；点 a 的 δ 邻域去掉中心 a 后称为点 a 的去心邻域，记作 $\mathring{U}(a,\delta)$.

二、映射

1. 设 X,Y 是两个非空集合，如果存在一个法则 f，使得对 X

中每个元素x，在Y中有惟一确定的元素y与之对应，则称f为从X到Y的映射，记作$f:X\to Y$.

y称为x的像，记作$y=f(x)$，x称为y的一个原像. 集合X称为映射f的定义域，记作D_f. X中所有元素的像组成的集合称为f的值域，记作R_f，$R_f=\{f(x)\mid x\in X\}$.

2. 设f是X到Y的单射，定义一个从R_f到X的新映射$g:R_f\to X$，使对每个$y\in R_f$，有$g(y)=x$，则g称为f的逆映射，记作f^{-1}.

3. 设有两个映射$g:X\to Y_1$，$f:Y_2\to Z$，其中$Y_1\subset Y_2$，则由映射g与f确定的一个从X到Z的对应法则称为映射g和f构成的复合映射，它将每个$x\in X$映成$f[g(x)]\in Z$，记作$f\circ g$.

三、函数

1. 设数集$D\subset\mathbf{R}$，则称映射$f:D\to\mathbf{R}$为定义在D上的函数，记作$y=f(x)$.

函数可以用表格法、图形法和解析法表示. 对用抽象算式表达（解析法）的函数的定义域称为自然定义域.

2. 要求了解绝对值函数、符号函数，取整函数和分段函数.

3. 要求了解函数的有界性、单调性、奇偶性和周期性等概念.

4. 设函数$f:D\to f(D)$是单射，则存在逆映射$f^{-1}:f(D)\to D$，称逆映射f^{-1}为函数f的反函数. 按习惯记法，函数$y=f(x)$，$x\in D$的反函数记作$y=f^{-1}(x)$，$x\in f(D)$.

5. 设函数$y=f(u)$的定义域为D_1，函数$u=g(x)$在D上有定义，且$g(D)\subset D_1$，则由$y=f[g(x)]$，$x\in D$确定的函数称为函数$u=g(x)$与$y=f(u)$构成的复合函数，u称为中间变量.

6. 要求熟知函数和、差、积、商的运算.

7. 要求熟知基本初等函数及其性质和运算.

8. 由常数和基本初等函数经过有限次四则运算和有限次复合步骤所构成的、并可用一个式子表示的函数，称为初等函数.

9. 要求知道双曲函数和反双曲函数.

疑难解析

1. 差集与余集有何联系与区别?

答 对两个集合 A,B,由属于 A 而不属 B 的元素组成的集合称为 A 与 B 的差集,记作 $A\backslash B$. $A\backslash B=\{x\mid x\in A,x\notin B\}$.

余集是特殊的差集. 通常,当 B 是 A 的子集时,$A\backslash B$ 称为集合 B 相对于集合 A 的余集(或补集). 当所讨论的集合总是某个"大"集合 I 的子集时,称 I 为全集,集合 B 相对于全集 I 的补集简称为 B 的余集(或补集),记作 $\complement^{B}$ 或 B^{C},本书用 B^{C},$B^{C}=I\backslash B$.

2. 直积集有什么意义?

答 对两个集合 X,Y,称一切有序"元素对"(x,y)($x\in X$,$y\in Y$)构成的集合为 X 与 Y 的直积,记作 $X\times Y$. $X\times Y=\{(x,y)\mid x\in X,y\in Y\}$. 直积也称为笛卡儿乘积.

笛卡儿乘积一般表示平面点集. 如 $[0,1]\times[0,1]$ 表示平面上的单位正方形,$\mathbf{Q}\times\mathbf{Q}=\mathbf{Q}^2$ 是平面上的有理点集.

3. 怎样理解映射? 映射有哪些类型? 映射、变换、函数有什么不同?

答 映射反映了两个集合之间的对应关系. 两个集合能够构成映射必须具备三个基本要素:(1)集合 X,即映射 f 的定义域 D_f;(2)集合 Y,即限制值域的范围 $R_f\subset Y$;(3)对应法则 f,使对每个 $x\in X$,有惟一确定的 $y=f(x)$ 与之对应.

注意 对每一 $x\in X$,对应的 $y\in R_f$ 是惟一的,但不同的 x 可以对应 R_f 中的同一 y,因此 y 的原像不一定惟一,且 R_f 可以是 Y 的一个子集,不一定有 $R_f=Y$.

若对 X 中任意两个不同元素 x_1 与 x_2,它们的像 $f(x_1)$ 与 $f(x_2)$ 也不同,则映射称为单射;若 $R_f=Y$,即 Y 中每一元素都是 X 中某元素的像,则映射称为满射;若 f 既是单射,又是满射,则映射称为一一映射(或双射).

通常又称映射为算子.将从非空集 X 到数集 Y 的映射称为泛函,将从非空集 X 到自身的映射称为变换(多用于代数理论),将从实数集(或其子集)X 到实数集 Y 的映射称为函数(多用于实、复分析,包括高等数学).

4. 逆映射与复合映射存在的条件是什么?复合与次序有无关系?

答 由逆映射定义知,仅当 f 为单射时才存在逆映射,因为仅当此时,对每一个 $y\in R_f$,才有惟一的 $x\in X$,使得 $f(x)=y$.

而由复合映射定义知,仅当 g 的值域 R_g 包含在 f 的定义域内,即 $R_g\subset D_f$ 时,映射 g 与 f 才能构成复合映射 $f\circ g$,否则 $f\circ g$ 的定义域为空集,不满足映射的基本要素.由此可知,复合是有顺序的,即 $R_g\subset D_f$ 时,$R_f\subset D_g$ 不一定成立,更不一定相等.即使 $f\circ g$ 与 $g\circ f$ 都有意义,对应法则也不一定相同.

5. 怎样理解函数的概念?

答 本书是借助两个实数集合之间的映射来定义函数的,称映射 $f:D\to\mathbf{R}$ 为定义在 D 上的函数,记作 $y=f(x)$,$x\in D$. $y=f(x)$ 反映了 y 与 x 之间的依赖关系,称为函数关系.因为函数的值域总在实数域内,即 $R_f\subset\mathbf{R}$,所以通常称构成函数的两大要素是定义域 D 与对应法则 f,两个函数当且仅当 D 与 f 都相同时才相同.当对应法则 f 不变时,自变量用什么字母表示都可以.

6. 函数的有界性、单调性、奇偶性与周期性有什么意义?

答 函数的有界性反映函数的自变量在定义域内变化时,函数值总在某一范围内变化,即存在正数 M,使得 $|f(x)|\leqslant M$.

函数的单调性反映函数的自变量在定义域的某区间内增大时,函数值的大小总是向一个方向变化的性质.

函数的奇偶性反映函数的定义域关于原点对称时函数值的特殊性质:如果 $f(x)=f(-x)$,称 $f(x)$ 为偶函数;如果 $f(-x)=-f(x)$,称 $f(x)$ 为奇函数.偶函数的图形关于 y 轴对称,奇函数的图形关于原点对称.

函数的周期性反映在函数自变量的变化过程中函数值发生周

期性变化的事实.

所以说，函数的特性实际上是函数值的变化性质，研究函数的特性可以帮助我们了解函数、掌握函数值的变化规律.

7. 反函数与直接函数有何关系？反函数的图形有什么特点？

答 本书是借助逆映射来定义反函数的. 当函数 $f: D\to f(D)$ 是单射时，其逆映射 $f^{-1}: f(D)\to D$ 称为 f 的反函数，记作 f^{-1}. 对每个 $y\in f(D)$，有惟一的 x，使得 $f(x)=y$，从而 $f^{-1}(y)=x$. 故知反函数 f^{-1} 的对应法则由直接函数法则确定.

当 $f(x)=y$ 而反函数记作 $x=f^{-1}(y)$ 时，两个函数有同一个图形；当反函数用习惯记法记作 $y=f^{-1}(x)$ 时，反函数的图形与直接函数 $y=f(x)$ 的图形关于直线 $y=x$ 对称.

8. 函数 f 与 g 能够复合的条件是什么？怎样求复合函数的定义域？

答 因为复合函数是复合映射的一种特例，所以同构成复合映射的条件一样：若函数 $y=f(u)$ 的定义域为 D_f，仅当 $u=g(x)$ 在 D 上有定义且 $g(D)\subset D_f$ 时，才能确定复合函数 $(f\circ g)(x)=f[g(x)]$，即函数 g 在 D 上的值域 $g(D)$ 全部或至少有部分含于 f 的定义域 D_f 内时，复合关系才成立.

求复合函数的定义域，也就是要找出 D 中使 $g(D)$ 含于 D_f 的那部分值.

9. 分段函数是否一定不是初等函数？

答 否. 分段函数也可以是初等函数，只要能将其化为一个式子表示的函数. 例如

$$f(x)=\begin{cases}2-x, & x\leqslant 1,\\ x, & x>1\end{cases} \text{可化为 } y=\sqrt{(x-1)^2}+1;$$

$$f(x)=\begin{cases}x, & x\geqslant 0,\\ -x, & x<0\end{cases} \text{可化为 } y=|x|.$$

10. 为什么 $\sinh x$, $\cosh x$ 称为双曲函数？

答 对用 e^x 和 e^{-x} 定义的函数 $\sinh x$, $\cosh x$，因为存在关系式