

杨裕前



平面几何 入门教学

江苏教育出版社

平面几何入门教学

杨 裕 前

江苏教育出版社

平面几何入门教学

杨 裕 前

出版：江苏教育出版社

发行：江苏省新华书店

印刷：南京人民印刷厂

开本787×1092毫米 1/32 印张5.625 字数120,000

1989年3月第1版 1989年3月第1次印刷

印数 1—10,830册

ISBN 7—5343—0654—x

G·577

定价：1.80元

责任编辑 喻 纬

序

为了大面积提高初中数学教学质量，为国家培养各级各类的合格人才，1982年，常州市教研室的杨裕前同志，与教师中有志于改革的积极分子，针对当时几何教学造成大批学生数学成绩严重下降的情况，首先成立了“平面几何教学研究小组”，并以它为核心，团结起全市数学教师，开展了全市性的改革几何教学的研究试验活动。

他们从分析学生学习几何的困难入手，发现学生的困难虽然是在学习“三角形”一章的证明时才开始表现出来的，但它是从学习几何开始起就逐渐积累下来的。因为在证题时，尽管是刚开始做证明题，至少要具备以下知识和技能。

1. 对题目中各个概念有清晰而正确的理解，能想象出概念所反映的图形；以及它具有的性质（特别是本质属性）；
2. 能够看懂图形，能把复杂图形分解成各种简单图形，能找出图形中的各个元素，以及各个元素之间的关系；
3. 能够口头叙述、尤其是书面表述概念、性质和定理；
4. 掌握推理的基本规律和书面表述的规范格式。

在开始做“三角形”一章的证明题时，虽然用到的知识是少量的，技能的要求也只是初步的、浅显的，但毕竟都是必需的，而且表现为一种综合运用的能力，缺少哪一方面或在哪一方面稍有缺陷，都将影响证明的完成。他们发现，学生对所需的知识和技能掌握得并不好，包括几何开始时的一些基本概念。于是他们又进一步从学习的内容和方法的转变，即从数到形、从运算到论证的转变，以及心理的准备等方

面，分析了学生的情况。

基于对学习内容和学生状况的分析，他们提出了研究几何入门教学的任务，研究从几何的第一课开始怎样引起学生喜爱学几何的欲望，怎样使学生逐步掌握知识，特别是怎样训练这些技能。比如，怎样引起学生学习几何的兴趣，怎样培养学生学好几何的信心，怎样进行几何概念的教学，怎样训练学生看图、画图以及几何语言的表述的技能，怎样使学生掌握推理论证的规律，以及怎样进行证明、作图的书写格式规范的训练，等等。

由于他们是紧密结合教学实际来进行研究的，更由于这种研究是有广大教师直接参加的，因而不仅能够集中群众的智慧，使问题抓得准，分析得透，更为重要的是调动了广大教师为提高教学质量、进行教学改革实践的主动性和积极性，把研究的结果用之于教学实践并进行检验、改进，从而在当年就取得了大面积提高平面几何教学质量的可喜结果。1983年春，中国教育学会数学教学研究会烟台召开了“大面积提高初中数学教学质量座谈会”。在这个座谈会上，杨裕前同志介绍了他们的经验，受到了与会代表的重视。代表们不仅认识到大面积提高初中数学教学质量的重大意义，而且树立了一种信心：学生数学成绩不好不是必然的，通过改进教学，绝大多数学生是可以学好的。

常州的同志并没有满足于已取得的经验和成绩。他们结合教改实践学习教育学、心理学，把已有的经验提高到理论上认识，并在理论的指导下进一步改进平面几何入门教学的实践。这样，常州市近几年来几何教学成绩持续达到大面积的高质量，并且写出了这本理论与实践相结合的《平面几何入门教学》。

本书的出版，对大面积提高我国数学教学质量无疑会起到促进作用。由于本书讲的是教学实际，内容生动具体，对从事初中几何教学的教师来说，可以直接作为进行教学的参考；对其他从事数学教学和研究的人员来说，本书提供了可资借鉴和研究的真实材料。所以本书对数学教育的实践和理论的研究都是有价值的。

几何难学、难教，难在什么地方？归根结底，主要不是在几何事实的认识和应用，而是在于它的严密的科学体系。长期以来，人们之重视几何，说是为了学习几何的实际知识，毋宁说是为了学习它的这个科学体系，也就是说，学习几何主要在于使学生的思维受到严格的逻辑推理的训练，并从中掌握科学的思想方法和科学的体系。因为这种方法和体系，以及推理论证的能力，对于从事脑力劳动，尤其是从事科学研究的人来说是必不可少的。这种教育观点，至少在实科教育兴起之前是这样。其实，在实科教育兴起之后，这种观点仍然强烈地影响着数学教育。

几何的科学体系，通常是指欧几里得几何的公理体系。它是人们经过了漫长的岁月，积累了丰富的关于几何事实的知识及其相互间的关系的认识之后，到了两千多年之前，才由欧几里得完成的。欧氏几何是人类完成科学体系的第一门学科，是人类认识史上的一次伟大飞跃。我以为，人的认识能力的发展过程与人类认识能力的发展过程存在着一致性。所以，第一，学生学习和掌握这个尽管还不是严密的欧氏几何体系，确实不是一件轻而易举的事；第二，它又毕竟是人类完成的第一个科学体系，比起晚近出现的其他更为抽象的体系——比如抽象代数的公理体系来，又是较易于为学生所理解和掌握的一个体系，因为它可以借助于图形的直观。因

此,欧氏几何有对学生早期进行系统的推理论证训练、学习科学思想方法和体系的优点,不过,在初中学习几何仍有“化难为易”的必要。20世纪初期,就有人主张在“理论几何”之前增加一门“实验几何”,即先学习一些几何事实的知识,再学习公理体系的论证几何。我国自1933年公布《初级中学算学课程标准》起到解放前,采用的就是这种主张。不过当时更多学校采用“三S”几何课本进行教学,是一本把实验几何与论证几何结合起来的课本,受到了当时教者的欢迎。1978年的中学数学教学大纲,对初中几何除了精简只起训练思维作用的烦琐内容、强调知识的实用性外,在安排上采用扩大的公理体系,也就是把实验几何与论证几何结合起来的体系。现在,常州市以及其他一些地区和学校的经验证明,采用扩大公理体系的方案是可行的,同时,他们的经验更说明,在入门阶段的几何教学,确实需要有一个小步训练、逐级渐进的过程。所以,《平面几何入门教学》一书,不仅对研究教学方法有积极的意义,而且对改进教材的编写也提供了经验。

现在,教育改革已进入了一个新的阶段,初中教育已属于义务教育。无论是几何教材的内容,还是教学方法,都要从教育改革的新阶段和义务教育的要求来加以重新考虑;另外,有不少学校在初中一年级进行几何教学的试验也取得了有益的经验。所以,我们也要从这个要求和经验来看待《平面几何入门教学》。实践、认识,再实践、再认识,这是认识的规律。因此,我们广大数学教师要在不断的实践中,不断地创造新经验,为大面积提高数学教学质量,为建立数学教育学作出贡献。

张孝达

1988年10月

目 录

序	张孝达
一 “入门教学”的特点	1
二 重视非智力因素的作用,培养学生的学习 兴趣	10
三 几何概念的教学	26
四 识图技能的训练	39
五 图形变换思想的渗透	51
六 几何语言的训练	66
七 推理论证教学的设计	80
八 平面几何中的思维训练	106
附录 课堂教学实录与评注	131
后记	171

一 “入门教学”的特点

平面几何教学普遍存在着“入门难”的问题。为解决这个问题，首先有必要研究平面几何的入门教学，即起始阶段的教学具有的一些特点。

1. 每一门新的教学科目，它研究的对象往往与以前的有所不同。《几何》主要研究图形及其性质。在初中《几何》教学以前的小学数学和初一代数，主要是研究数量关系。也就是说，平面几何这门学科使中学数学进入了一个新的领域，“新”在研究对象发生了根本的变化，这是平面几何教学带根本性的一个特点。

2. 研究对象的变化，必然使研究方法也随之发生变化，平面几何不再用学生较为熟悉的运算的方法，而是用学生还很陌生的说理、推理、论证的研究方法。这种新的方法，学生在以往的学习中没有得到系统的训练。因此，研究方法是新的，也是平面几何教学中一个重要的特点。

3. 从教学内容看，平面几何入门教学又有“基础知识多而集中，难度虽不大，但对整个几何教学具有本源性的”这样的特点。在平面几何的起始阶段教学中，作为这门学科的最基础的知识，如基本概念、名词术语、符号等都将集中出现。这些知识从表面上看似似乎不难，实际上并非如此，它们是这门学科知识的本源，以它们为基础才能逐步形成整个平面几何的知识结构。

在实际教学中，这个特点往往不被教与学的两方面充分认识。从“学”的方面看：学生常常对集中出现又无明显联系

的一大堆知识感到枯燥乏味，加之知识难度不大，因而往往表现在学习中掉以轻心；再从“教”的方面看：教师也常常感到起始阶段教学内容零碎难教，远不如进入推理阶段的教学那样得心应手，因而也可能产生尽量压缩教时，尽早进入平面几何教学的“华采乐章”的想法。教与学两方面可能存在的这种“轻视”心理，对搞好平面几何的教学是十分不利的。

4.从技能和能力的要求看，平面几何教学需要学生逐步具备识图、画图、作图，正确地理解和表述几何语言、运用三段论证的方法进行演绎推理的技能和能力，以及逐步了解并掌握图形变换的思想、分析的方法、反证法的思想方法等等。这些技能、能力和思想方法，学生在学习平面几何以前没有得到过系统的训练和培养。因此，平面几何教学在技能、能力和思想方法的要求上，具有“突变性”的特点。

把第3，4两个特点结合起来考虑，我们清楚地看到：应该利用平面几何入门教学阶段知识难度不大的时机有计划有重点地逐步训练学生掌握学好几何所必须具备的技能、能力和思想方法，而不应急于进入推理论证教学。同时，不宜把这些训练安排在平面几何教学进入核心阶段——推理论证后去进行。因为推理论证阶段已是诸种技能和能力的综合运用阶段。到那时再开始进行上述训练，就为时太晚了。

5.在入门教学阶段，由于研究对象、方法的变化，以及技能、能力和思想方法上的突变性，学生在起始阶段的学习中，一般需要有一个调整学习方法，改变学习习惯的过程。比如，由于种种原因，不少学生在代数学习中仍常用背诵的方法学习基础知识，解题时又习惯于套用程式。这种不好的学习方法和习惯在几何学习中尤需改变，因为学习几何更加要求重理解、会思考。又如，他们在由运算转变为论证时，

对解题的书写格式也会不习惯等等。因此，入门教学中必须考虑学生这样一个调整的过程。

6. 学生的学习动机、兴趣、意志、情感、注意，乃至态度、理想等非智力因素，在入门教学中具有重大的作用。学生刚开始学习一门新学科时，往往有新奇感，并表现出一定的兴趣。但是，如果起始阶段教学趣味性不强，或由于各种原因使学生在学习中遇到了较大的困难，学生又不能以坚强的意志和毅力克服这些困难，那么他们便可能丧失学习的兴趣和信心。

因此，入门阶段的教学关系到能否帮助学生形成“乐学—学懂—更乐学”的良性循环，还是相反地出现学习上的恶性循环。1983年5月，人民教育出版社的有关同志在常州一所学生基础差的学校召开了一次座谈会，问参加座谈会的九名留级生：“为什么你们去年没有学好几何，今年都学得很好（当时，初二下学期期中考试成绩，一人80分以上，余均在90分以上）？”这几位学生说：“现在学几何有趣，学得懂，上课就认真听讲，所以就学好了。”这正是非智力因素发挥了积极作用，从而使智力因素得到较好发展的一个例证。可以这样说：能否在入门阶段调动学生的非智力因素，促进教学的良性循环的形成，对每一门新学科的整体教学具有决定性的影响。

7. 新学科的教学与以前学科教学之间必然存在着迁移，这也是入门教学中必须认真研究的一个特点。在初中平面几何教学前，学生在小学“简单的形体知识”教学中，已经了解了诸如直线、射线、线段、垂线、平行线、两点间距离、等腰三角形、等边三角形等名称，学会了某些特殊四边形、圆和简单几何体的有关计算等。这些对初中平面几何教学都有

着可利用的正迁移作用。但是，由于小学生的年龄特征和知识面的限制，小学数学没有也不可能用说理的方法去导出这些形体知识，而是大量地借助直观。这种以“直观”代替“论证”的获取知识的过程，常常会使学生对平面几何教学中论证的必要性认识不足，甚至产生排斥的心理，这就将给初中平面几何的教学带来很多困难。

比如，一位小学生在作业本上计算图1的面积时，列出式子 $(3 + 6) \times 4 \div 2$ ，显然，他把图1看作为直角梯形（注：原题意中没有说明这一点）。

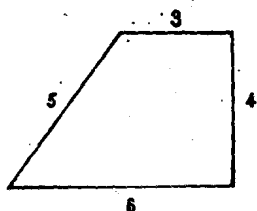


图1

下面是家长与该生的一段对话：

问：“你怎么知道长度为4的那条线段是梯形的高呢？”

答：“如果它不是梯形的高，我怎么能做这道题呢？”

学生的回答令人啼笑皆非，但似乎又是合乎情理的。因为他们只能借助图形直观，看看图形象什么，就认为它是什么。这使我们想到，初中学生在几何论证中不也常常杜撰条件（比如，角的内部有一条过角的射线，就把它当成角的平分线）导致错误吗？

我们再来看这位学生在初二年级学习了“直线的基本性质”以后，家长与他的另一段对话：

问：“今天《几何》课上，你们学习了‘两条直线相交，只有一个交点’吗？”

答：“学习了。”

问：“这个‘直线的基本性质’是怎样说理的？”（注：课本在这个性质的说理中用了反证法的思想方法，家长问话的

本意是想了解学生能否粗浅地了解这种方法。)

答：“我觉得老师用一大段话去说明这个性质，是多余的。”

问：“怎么会是多余的呢？”

答：“老师讲这个性质之前，讲‘经过两点有一条直线并且只有一条直线’时，先在黑板上过两点画出一条直线，再过这两点画直线，画不出第二条直线，所以把那个结论作为‘公理’。那么，两条直线相交，无论怎样画也总只有一个交点，为什么却要说明呢？”

是啊！初学几何的学生尚不清楚，平面几何要有若干条公理，然后在公理和定义的基础上，用说理的方法去论证一系列的几何命题和定理。由此可见，用直观代替乃至取消论证这种获取知识的方法和习惯，对初中几何教学造成了很大的障碍。不注意到这一点，便会使平面几何起始阶段的教学，教师与学生总也想不到一块儿去！教师想的是如何讲才能使学生听懂道理，学生想的却是不需要讲道理。不解决这一问题，怎么能取得好的教学效果呢？

针对入门教学的以上特点，平面几何起始阶段的教学应注意以下几点。

第一，要明确本学科教学的根本目的。

近几十年来，平面几何这门学科一直是教学内容改革的对象。国内外对这门古老的学科在中学数学中的地位 and 作用，有着很多的争论。但是，至今它仍在中学数学中占有一席之地。这些现象说明了什么呢？毫无疑问，随着当代科学技术的发展，在两千多年前开始形成的几何这门学科，它的某些内容确实已经失去了实用的价值，有的也过于繁难，因此平面几何教学内容要改革是合理的。那么经历了多次改革

和冲击，平面几何作为中学数学的一门学科仍被保留下来，这又说明它必然有着独特的作用，即它对培养初中学生的逻辑思维能力有效，目前尚未有更好的办法去替代它的这种作用。因此，平面几何的教学必须在教给学生有用的知识的同时，把培养学生分析、综合、演绎、归纳等逻辑思维能力作为其根本的目的。

为此，平面几何教学要注重知识的应用价值，要着眼于使学生学会思考、会学习，而不应以证题术为中心。逻辑思维能力的培养也不一定需要搞大量的难题，用大量的一般难度题(课本中的习题)和少量的难题同样可以达到这个目的。关键在于如何在解题过程中教会学生思考问题的方法。

第二，教学要求必须恰当。

教学要求恰当，是平面几何教学中始终应当注意的，在入门阶段的教学中显得尤为重要。

我们认为，每门学科的教学要求应考虑以下几个不同的层次：

大纲规定的要求；

本学科教学的要求；

章节或单元的教学要求，或某个知识系统、某种数学思想方法在整个学科教学中的要求；

每堂课教学的具体要求。

它们的关系是前者决定后者，局部服从于整体并为整体服务；它们既有区别，不能等同，又是相互紧密相连的。

既搞清了不同层次的教学要求，又承认学生之间实际存在的差异，才能做到面向多数，克服教学要求任意拔高，教学内容任意膨胀的做法，把握好教学的分寸。

第三，在起始阶段的教学，要注重经常的、细致的调

查研究。

应当承认，许多有经验的教师对学生学习中的困难和问题有比较正确的估计和了解。但是，教学不可能是一成不变的，它要受时空、对象变化的影响。同时，应考虑到初中学生身心发展的特点，他们的性格表现出越来越强的独立性，部分学生性格趋于内向，不轻易地表露个人的想法（包括几何学习中的困难）。因此，在平面几何入门教学中教师应通过课堂教学、批改作业、个别谈话、书面调查等多种形式，深入了解并力求真正摸清学生学习中的具体困难和问题，从而确立好教学的基点，使入门教学更具针对性。

第四，要十分注意培养学生的学习兴趣，激发他们的学习积极性（本书第二部分将详细论述）。

第五，要用辩证法的思想观点处理好入门阶段教学内容多而集中的矛盾。突出重点，有轻有重，有主有从，不要求全。

“在有利于继续学习的前提下，信息量愈少，需要记住的事实愈少，就愈经济”，这是提高教学效率的重要原则。根据这个原则，入门教学中大量的知识不应该也不可能都作为重点，只有切实抓好对平面几何教学有重大影响的那些知识的教学，才能使整个教学较为顺利，取得好的效果。

第六，要在学生调整、改变学习方法和习惯的同时，改进教学方法，以帮助学生尽快适应几何教学的要求。

要根据几何学科的特点，按照学生的认识规律进行教学。比如，几何概念的形成往往要经过直观形象、形象（图形）抽象、本质抽象这样几个阶段。这与代数概念的教学是不尽相同的。因此，不能简单地搬用代数概念教学方法教几何概念。

在入门教学阶段要注重使用“渗透的教学方法”。所谓“渗透”，就是采用教者有意、学者无心的办法，经过多次反复，日积月累，逐步使学生形成某种技能，粗浅地了解某种数学思想方法，以求得“水到渠成”的效果。

此外，还可选择适当的教学内容，采用教师引导、学生探索并获取知识的方法进行教学。这种教法不是由教师在课堂上抛出一个又一个结论，使学生应接不暇，来不及思考，而是把教学作为一个过程，使学生在主动获取知识的过程中，既学会了数学的思想方法，训练了技能，发展了能力，又养成了思维的习惯，因为“数学知识，不仅是那个高度抽象的结论，得出那个结论的过程同样是十分重要的”，“在这个过程中，往往具体体现了数学的基本方法和重要思路”（《积极开展教学研究，进一步提高数学教学质量》，中国教育学会数学教学研究会常务理事会议，张孝达执笔，1982.12.14）。

第七，要在注重基础知识的同时，十分注重技能的训练。

如前所述，入门教学具有“知识的本源性和技能、能力的突变性”这样的特点。数学技能是发展数学能力的基础。我们不能脱离知识来发展学生的能力，也不能脱离技能的训练来谈发展学生的能力。

因此，在平面几何入门教学中，应加强对学生的识图、画图、作图、几何语言的理解、表述和翻译，以及推理等技能的渗透性训练，应在通盘考虑平面几何教学中技能训练序列的基础上，有计划、有层次地把技能训练渗透在各个阶段的教学之中。

必须指出：这里的“训练”，不能片面地理解为解题。一般地说，课堂教学中的训练应包括以下几个方面：

基础知识(概念、定理)的简单应用;
各种基本技能的训练;
数学思想方法的渗透;
非智力的心理素质的训练;
为后续教学可能做好的各种准备等。

同时,这里的“训练”这个词语,还包含了根据教学对象的差异,在要求、方法和数量等方面都可以有所不同的意思。