初等数学难点专题分析

戴明源　李松文　编著

中国计量出版社

新登（京）字024号

初等数学难点专题分析
戴明源　李松文　编著
责任编辑　王　平
•
中国计量出版社出版
北京和平里西街甲2号
冶金胶印厂印刷
新华书店北京发行所发行
•
开本787×1092/32　印张11.125　字数260千字
1991年10月第1版　1991年10月第1次印刷
印数：1—5000
ISBN 7—5026—0436—7/G·40
定价：4.90元

前　言

在学习初高中数学的过程中，如果遇到的各种问题很多，而且又难于解决，就会逐渐失去学好数学的信心。提高思维能力，是学好数学的关键。在本书中，根据我们长期的教学经验，把初等数学那些难以理解的内容，分成21个专题，进行了较详尽的阐述，以帮助学生理解初等数学的基本概念，掌握解题的基本方法，达到灵活运用基本技巧，提高分析和解决初等数学中难题的能力。我们希望本书能成为读者学习初等数学的良师益友。若读者朋友发现书中的缺点和错误并能给予指正，我们将不胜感激！

本书得到李振纯高级教师的热忱帮助，谨在此致谢！

编者

1991年4月

目　录

一　集合及其运算

集合是现代数学中最基本的概念之一，它渗透到数学的一切领域．在高中阶段学点集合知识，不仅为学习映射，函数做一定的准备，而且对于提高分析思考问题的能力很有益处，但由于集合的概念较多，比较抽象，学习时有一定的困难．本文就集合及其运算做进一步的分析和阐述，以帮助学生加深对集合概念的理解，深入掌握教材中的有关内容．

（一）　集合的概念

1．集合的涵义是什么？

集合是数学中不定义的概念，但它有着一定的涵义，看下面的例子：

（1）从90到100的全体偶数；

（2）方程$x^2+5x+6=0$的所有实数根；

（3）所有的等腰三角形；

（4）现在世界上的所有国家；

（5）北京一中的所有学生；

（6）与一个定点距离相等的所有点．

以上这些都可以作为集合的例子．它们是分别由不同的对象组成的一个整体，它们的特点是，都有确定的对象和具有一定的属性．所以对于集合这个概念，通常用以下的语言描述：

把具有某种属性的一些对象看作一个整体，便形成一个集合；也就是说，集合是具有一定范围的、确定的对象的全体．

集合具有如下的特征：

(1) 确定性：对于给定的一个集合，任何一个对象我们都能确定它是否属于给定的集合，即集合中的元素是确定的.

(2) 互异性：在同一集合中，它的各个对象是互不相同的，即不能重复出现同一个元素。例如，由1、2、3、4、5这五个数组成一个集合，而不能由1、1、2、3、5这五个数组成一个集合. 后面这个集合里的元素是1、2、3、5四个数，即把相同的对象归入一个集合时，只能算作这个集合的一个元素.

(3) 无序性：集合只与它的成员有关，而与它的成员的顺序无关，故在表示一个集合时，不考虑元素之间的顺序。

2. 集合的表示法

集合一般用大写字母 A、B、C、…表示，集合中元素一般用小写字母 a、b、c…来表示.

对于一个确定的元素 a 和一个确定的集合 A，元素 a 和集合 A 的关系有且仅有以下两种情况之一成立：

a 是集合 A 的元素，即元素 a 属于集合 A，用符号 $a \in A$ 表示；a 不是集合 A 的元素，即元素 a 不属于集合 A，用符号 $a \notin A$（或 $a \bar{\in} A$）表示.

表示集合的方法有列举法和描述法：

(1) 列举法（又叫枚举法），即把集合中的元素一一列举出来，写在大括号内表示集合

【例1】 由90到100的偶数组成的集合 A，可记为

$$A = \{90, 92, 94, 96, 98, 100\}$$

【例2】 由整式 $x^2, 5x+y, 3x^2-y^2, 5y^2$ 组成的集合 A，可记为 $A = \{x^2, 5x+y, 3x^2-y^2, 5y^2\}$.

(2) 描述法。把集合中的元素的公共属性描述出来，写在大括号内表示集合，通常用于对集合中的元素无法一一列举出来的情况.

【例1】 全体有理数组成的集合 Q，可记为

$$Q=\{x \mid x=\frac{m}{n}, m、n \in Z, n \neq 0\}$$（Z 是整数集）。

【例 2】 由抛物线 $y=x^2+4$ 上的所有的点的坐标组成的集合 E，可记为 $E=\{(x、y) \mid x、y \in R，y=x^2+4\}$（$R$ 是实数集）.

【例 3】 由等腰三角形组成的集合 M，可记为

$M=\{$等腰三角形$\}$

有些集合可分别用列举法和描述法进行表示．如：方程 $x^2-5x+6=0$ 的根组成的集合 M 可写成

$M=\{x \mid x^2-5x+6=0\}$ （描述法）

或 $M=\{2, 3\}$ （列举法）

又如：满足 $0 \leqslant x \leqslant 2$ 的整数 x 所表示的集合 E 可写成

$E=\{x \mid 0 \leqslant x \leqslant 2, x \in z\}$ （描述法）

或 $E=\{0, 1, 2\}$ （列举法）

3．有限集和无限集

如果一个集合中的元素是有限个，这个集合叫做有限集；如果一个集合中的元素是无限个，这个集合叫做无限集．

这里有些特殊的集合是需要注意的：

（1）单元素集

如果一个集合里只含有一个元素，这个集合叫做单元素集．

【例 1】 设 $A=\{x \mid 2x-1=0, x \in R\}$

集 A 是单元素集，它只含有一个元素 $\frac{1}{2}$，也可记为

$$A=\left\{\frac{1}{2}\right\}$$

【例 2】 设 $S=\{x \mid -1<x<1, x \in Z\}$

集合 S 是单元素集，它只含有一个元素 0，也可记为

$S=\{0\}$

(2) 空集和非空集合

一个元素也没有的集合，叫做空集，记作字母ϕ或符号$\{\ \}$. 与此相区别，至少含有一个元素的集合，叫做非空集合.

空集也是一个集合，而且是一个很重要的集合. 在研究数时，0是一个数，它在数的运算中，有很重要的作用. 空集在集合的运算中也起着很重要的作用

(3) ϕ和$\{0\}$是不是一个集合

ϕ和$\{0\}$不是一个集合，$\{0\}$是有一个元素的单元素集，0是它的元素，而空集ϕ是没有元素. 故ϕ和$\{0\}$是不同的两个集合.

例如，指出下列集合是不是同一个集合:

$A=\{x \mid x^2+1=0, x\in \boldsymbol{R}\}$

$B=\{x \mid x>5$ 且 $x<3\}$

$C=\{x \mid |x|=0\}$

$D=\{(x,y) \mid x^2+y^2=0, x、y\in \boldsymbol{R}\}$

上述四个集合，$A=\phi$，$B=\phi$，A和B是同一个集合；$C=\{0\}$，是单元素集；$D=\{(0,0)\}$，是把$(0,0)$看成一个元素，也是单元素集，但C和D不是同一个集合.

（二）集合的包含和相等

对于两个集合，一般有以下几种情况:

(1) 两个集合的元素完全相同;

(2) 两个集合中,一个集合的元素都是另一个集合的元素;

(3) 两个集合的元素中，有部分元素相同;

(4) 两个集合中，没有相同的元素.

由于两个集合之间存在以上几种情况，才使得我们要研究子集、真子集以及相等的概念.

1. 子集与真子集

定义1：对于两个集合A和B，如果集合A的每一个元素都属于集合B，那么，集合A就叫做集合B的子集，集合B叫做集合A的扩集。

记作：　　$A \subseteq B$或$B \supseteq A$

读作：　　A包含于B或B包含A

定义2：对于两个集合A和B，如果集合A的每一个元素都属于集合B，但集合B中至少有一个元素不属于集合A，那么集合A叫做集合B的真子集，集合B叫做集合A的真扩集。

记作：　　$A \subset B$或$B \supset A$

根据上述定义，可以得出如下性质：

（1）任何一个集合是它本身的子集，即

$$A \subseteq A$$

（2）空集是任何集合的子集，即

$$\phi \subseteq A$$

（3）空集是非空集合的真子集，若A是非空集合，即

$$\phi \subset A$$

2. 两个集合相等

设给定集合$A=\{a,b,c,d\}$，$B=\{b,a,d,c\}$，显然有$A \subseteq B$，同时$B \subseteq A$。也就是说，凡属于A的元素也属于B，凡属于B的元素也属于A，即两个集合由完全相同的元素组成。

定义3：对于两个集合A和B，如果集合A包含集合B，且集合B包含集合A，即

$A \subseteq B$，同时$B \subseteq A$

我们称两个集合A和B相等。

记作：　　$A=B$　　　读作：A等于B

应当注意，两个集合相等与否，由下面两条决定：（1）元

素的个数相同；(2) 元素本身完全相同。

由定义1和定义3，可以得出：

若$A\subseteq B$且$B\subseteq A$，则$A=B$

反之，若$A=B$，则必有$A\subseteq B$且$B\subseteq A$

集合的相等与包含关系，有以下性质：

(1) 如果$A=B$，$B=C$，则$A=C$

(2) 如果$A\subset B$，$B\subset C$，则$A\subset C$

(3) 如果$A\subset B$，$B=C$，则$A\subset C$

上述性质说明，集合之间的相等与包含关系，具有传递性。

上述性质如何证明呢？

下面来证明(1)

①设x是集合A的任一元素，即$x\in A$，因为$A=B$，所以$x\in B$。

又因为$B=C$，所以$x\in C$。

故由$x\in A\Rightarrow x\in C$，所以$A\subseteq C$。

②设x是集合C的任一元素，即$x\in C$。

$\because B=C$，$\therefore x\in B$。

又$\because A=B$，$\therefore x\in A$。

故由$x\in C\Rightarrow x\in A$，$\therefore C\subseteq A$。

由①，②$A\subseteq C$且$C\subseteq A$，可得$A=C$。

上面的性质(2)，(3)作为练习请读者自己证明。

(三) 集合的运算

1. 并集与交集

给定集合　$A=\{1,2,3,4\}$，　$B=\{2,3,4,5\}$，

$C=\{1,2,3,4,5\}$，　$D=\{2,3,4\}$。

容易看出，集合C是由属于集合A或者属于集合B的一切元素所组成，就说集合C是集合A和B的并集。

集合D是由同时属于A和B的一切元素所组成，就说集合D是集合A和B的交集。

定义1：设给定集合A与B，由所有属于A或属于B的元素所组成的集合，叫做集合A和B的并集，记作$A\cup B$，即

$$A\cup B=\{x|x\in A,\text{或}x\in B\}$$

定义2：设给定集合A和B，由所有属于A且属于B的一切元素所组成的集合，叫做A和B的交集，记作$A\cap B$，即

$$A\cap B=\{x|x\in A,\text{且}x\in B\}$$

对上述两个定义关键是要分清楚“或”与“且”两个字的含意，并区别出两个集合的并集和交集。

“或”字的意义：$x\in A$或$x\in B$包含下列三种情况：$x\in A$，但$x\notin B$；$x\in B$，但$x\notin A$；$x\in A$，且$x\in B$，同时，在集合$A\cup B$中，A与B的公共元素在$A\cup B$中只出现一次。因此$A\cup B$是由至少属于A、B两者之一的元素组成的集合。

“且”字的意义：$x\in A$，且$x\in B$就是说，集合$A\cap B$中的任一元素x都是A与B的公共元素。

2．补集

在研究集合之间的关系时，这些集合都是某一个给定集合的子集，这个给定的集合称为全集。全集用字母I表示，全集是根据我们所研究的问题来确定的。

定义3：设I是全集，集合$A\subseteq I$，由I中所有不属于A的元素组成的集合，叫做集合A在集合I中的补集，记作$\overline{A}$。即

$$\overline{A}=\{x|x\in I,\text{且}x\notin A\}.$$

【例1】 设$I=$｛不大于5的非负整数｝，$A=\{0,1,2,3\}$，$B=\{1,2,3\}$，$C=\{0\}$。

指出下列关系是否正确，并改正其错误。

(1) $O\subset A$　(2) $\{0\}\subset A$　(3) $O\in C$

(4) $B\subset A$　(5) $\phi\in A$；(6) $\phi\subset B$；

（7）$C=\phi$　　（8）$\overline{A}\in\overline{B}$　　（9）$A\cap B=C$

（10）$A\cap\overline{C}=B$.

【解】(1) 不正确，应是$O\in A$　(2) 正确 (3) 正确 (4) 正确　(5) 不正确，应是$\phi\subset A$　(6) 正确；(7) 不正确应是$C\supset\phi$ (8) 不正确，应是$\overline{A}\subset\overline{B}$ (9) 不正确 (10) 正确

说明：“$\in$”是元素与集合之间的关系符号；“$\subset$”是集合之间的关系符号，要正确使用符号.

【例2】　已知$A=\{x|x^2\geqslant 4\}$, $B=\{x|\frac{6-x}{1+x}\geqslant 0\}$,

$C=\{x||x-3|<3\}$

求：(1) $A\cap B$及$A\cup C$　(2) $A\cap(\overline{B\cap C})$；

(3) 用列举法表示：$\overline{A}$中的整数集合D；B中能被3整除的整数集合E；C中的质数集合F.

【解】$\because A=\{x|x\leqslant -2$或$x\geqslant 2\}$

$B=\{x|-1\leqslant x\leqslant 6\}$

$C=\{x|0<x<6\}$

(1) $A\cap B=\{x|2\leqslant x\leqslant 6\}$

$A\cup C=\{x|x\leqslant -2$或$x>0\}$

(2) $\because B\cap C=\{x|0<x<6\}=C$

$\overline{B\cap C}=\overline{C}=\{x|x\leqslant 0$或$x\geqslant 6\}$

$\therefore A\cap(\overline{B\cap C})=A\cap\overline{C}=\{x|x\leqslant -2$或$x\geqslant 6\}$

(3) $\because\overline{A}=\{x|-2<x<2\}$

$\therefore\overline{A}$中的全体整数集合$D=\{-1,0,1\}$

又　$B=\{x|-1\leqslant x\leqslant 6\}$，故$E=\{0,3,6\}$

又　$C=\{x|0<x<6\}$，故$F=\{2,3,5\}$.

【例3】　已知A，B是以某些实数为元素的两个集合，其中$A=\{-4,a+3,a^2-2a+2,a^3+a^2+3a+7\}$，$B=\{2,4,a^3-2a^2-a+7\}$，且$A\cap B=\{2,5\}$，

求实数a，并求$A\cup B$

【解】 $\because A\cap B=\{2,5\}$

$\therefore a^3-2a^2-a+7=5$

$a^3-2a^2-a+2=0$，$(a-2)(a^2-1)=0$

$\therefore a=2, a=1$，或$a=-1$，　$B=\{2,4,5\}$

当$a=2$时，$A=\{-4,5,2,25\}$，$A\cap B=\{2,5\}$

当$a=1$时，$A=\{-4,4,1,12\}$，$A\cap B=\{4\}$

当$a=-1$时，$A=\{-4,2,5,4,\}$，$A\cap B=\{2,4,5\}$

$\therefore$实数$a=2$，$A=\{-4,5,2,25\}$才符合题意．

$A\cup B=\{-4,2,4,5,25\}$

【例4】 设二次方程$x^2-px+15=0$，$x^2-5x+q=0$的解集分别为A，B，且$A\cup B=\{2,3,5\}$；$A\cap B=\{3\}$求A，B及p、q的值．

【解】 $\because A\cap B=\{3\}$ $\therefore 3$是两方程的公根，分别代入两个方程，得

$3^2-3p+15=0$；$3^2-5\times3+q=0$

故有$p=8$，$q=6$

原方程分别为

$x^2-8x+15=0$，$x^2-5x+6=0$

分别求其二根，故$A=\{3,5\}$，$B=\{2,3\}$

【例5】 设A、B、C是非空集合，求证：

$$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$$

【证明】 根据集合相等的定义证明如下：

(1) 先证 $A\cup(B\cup C)\subseteq(A\cup B)\cup C$

设$x\in A\cup(B\cup C)$

$\therefore x\in A$或$x\in B\cup C$　（并集定义）

$\therefore x\in A$或$x\in B$或$x\in C$

$\therefore x\in A\cup B$或$x\in C$

$\therefore x \in (A \cup B) \cup C$　　　（并集定义）

$\therefore A \cup (B \cup C) \subseteq (A \cup B) \cup C$　（子集定义）

(2) 再证 $(A \cup B) \cup C \subseteq A \cup (B \cup C)$

设 $x \in (A \cup B) \cup C$

$\therefore x \in (A \cup B)$ 或 $x \in C$　（并集定义）

$\therefore x \in A$ 或 $x \in B$ 或 $x \in C$

$\therefore x \in A$ 或 $x \in (B \cup C)$

$\therefore x \in A \cup (B \cup C)$

$\therefore (A \cup B) \cup C \subseteq A \cup (B \cup C)$　（子集定义）

综合(1)、(2) 可得 $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$.

另外，在研究集合中的应用题时，需涉及到集合中元素的个数问题，分别用 $n(A)$, $n(B)$, $n(C)$ 表示集合 A、B、C 中的元素的个数.

利用韦恩图，如图 1－1, 图 1－2, 可得出如下性质:

(1) $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

(2) $n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$

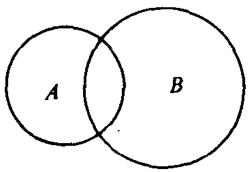

图 1－1

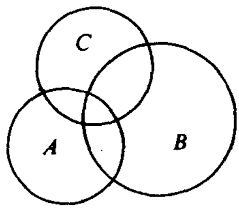

图 1－2

【例 6】 某校学生参加高考，数学成绩在60分以上的有175人，物理成绩在60分以上的有140人，这两科成绩都在60分以上的有115人，都在60分以下的有20人，问该校参加高考的学生有多少人?

【解】 设数学、物理分别60分以上者组成集合A、B，参加高考学生组成全集I，依题意有

$n(A)=175$，$n(B)=140$，$n(A\cap B)=115$

于是 $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$

$=175+140-115=200$

$n(A\cup B)$代表数学、物理至少有一科在60分以上的学生数.

$\therefore n(I)=n(A\cup B)+20=200+20=220$

故参加高考的学生总数为220人.

【例7】 在某次考试中，35名数理化成绩优秀者作一统计，其中数学优秀的有20名，物理优秀的有19名，化学优秀的有17名，数学、化学均优的有7名，数学、物理均优的有9名，物理、化学均优的有8名. 问三科全优的学生有多少人?

【解】 设数学、物理、化学优秀者的集合分别为A、B、C，则 $n(A)=20$，$n(B)=19$，$n(C)=17$，$n(A\cap B)=9$，$n(A\cap C)=7$，$n(B\cap C)=8$，

又知 $n(A\cup B\cup C)=35$

由$n(A\cup B\cup C)=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)$

$-n(A\cap C)-n(B\cap C)+n(A\cap B\cap C)$

即 $35=20+19+17-9-7-8+n(A\cap B\cap C)$

$\therefore\ n(A\cap B\cap C)=3$

即三科全优的学生有3名..

练 习 一

1 填空:

(1) 选择$\in$，$\notin$，$\subset$，$\supset$，$\subseteq$，$\supseteq$，$=$中的适当记号填空:

ϕ—$\{0\}$； 0__$\{0\}$； 0__ϕ；$A\cap B$__A；

$A\cup B$__A； A__I；$\overline{I}$__ϕ

(2) $A\cap I=$__；$A\cap\phi=$__；$A\cap\overline{A}=$__；

$A\cup I=$__；$A\cup\phi=$____；$A\cup\overline{A}=$____.

(3) 对集合A与B，如果$A\subset B$，则$A\cap B=$__；

$A\cup B=$__；$A\cup(A\cap B)=$__；$A\cap(A\cup B)=$__.

(4) $A=\{x\mid 0<x<5\}$，$B=\{y\mid 4<y<7\}$

$A\cap B=$____；$A\cup B=$____.

2　设全集$I=\{x\mid x^2-22x+40<0,\ x\in R\}$，

$A=\{x\mid x=4k-1,\ k\in z\}$，

$B=\{x\mid x=3k,\ k\in z\}$，

$C=\{x\text{ 是质数}\}$，$D=\{x\mid x=2k,k\in z\}$，

试用列举法表示下列集合.

(1) $A\cap B$；　(2) $A\cup B$；　(3) $B\cap C$；

(4) $C\cap\overline{D}$；　(5) $A\cap D$；　(6) $C\cap D$.

3　已知$A=\{x\mid x^2-2x-8<0\}$，$B=\{x\mid x-a<0\}$，

(1) 若$A\cap B=\phi$，求a的取值范围；

(2) 若$A\subset B$，求a的取值范围.

4　设$I=\{x\mid x\text{ 为小于20的正偶数}\}$，若$A\cap\overline{B}=\{12,14\}$，$\overline{A}\cap B=\{2,4,16,18\}$，$\overline{A}\cap\overline{B}=\phi$，求$A$和$B$.

5　证明下列两组集合相等：

(1) $A=\{x\mid x=2k+1,\ k\in z\}$ 和

$B=\{y\mid y=4m\pm 1,\ m\in z\}$；

(2) $A=\{x\mid x\text{ 为整系数方程的根}\}$ 和

$B=\{x\mid x\text{ 为有理数}\}$.

6　设A、B为非空集合，$n(A)=35$，$n(B)=28$，

若 $n(A\cap B)=x$，试求：

(1) 在集合A中，但不在集合B中的元素数.

(2) 在集合B中，但不在A中的元素数.

又若 $n(A\cup B)=51$时，求x.

练习一答案

1 (1) $\subset$; $\in$; $\notin$; $\subseteq$; $\supseteq$; $\subseteq$; $=$.

(2) A; ϕ; ϕ; I; A; I.

(3) A; B; A; A.

(4) $\{4\}$; $\{1,2,3,4,5,6,7\}$.

2 (1) $\{3,15\}$; (2) $\{3,6,7,9,11,12,15,18,19\}$;

(3) $\{3\}$; (4) $\{3,5,7,11,13,17,19\}$;

(5) ϕ; (6) $\{2\}$.

3 (1) $a<-2$; (2) $a>4$.

4 $A=\{6,8,10,12,14\}$, $B=\{2,4,6,8,10,16,18\}$.

5 证明略

6 (1) $35-x$; (2) $28-x$; $x=12$.