概率論及數理統計

（下册）

习题解答

许刘俊　杨维权

中　山　大　学

目 录

第四章　特征函数

〔本章要点〕

一、一维随机变数的特征函数

设随机变数ξ的分布函数为$F(x)$。称

$$\varphi(t)=E[e^{jt\xi}]$$

为ξ的特征函数。任何随机变数都有特征函数。一般，$\varphi(t)$是t的复值函数。

当ξ为连续型随机变数时，

$$\varphi(t)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{jtx}f(x)dx, \tag{1}$$

其中$f(x)$为ξ的密度函数。由(1)式可见，$\varphi(t)$为密度函数$f(x)$的富利叶变换。

当ξ为离散型随机变数时，

$$\varphi(t)=\sum_k e^{jtx_k}P(\xi=x_k)。$$

特征函数有如下性质：

1. $\varphi(0)=1$；$\varphi(-t)=\overline{\varphi(t)}$，

$$|\varphi(t)|\leqslant\varphi(0)=1。$$

其中$\overline{\varphi(t)}$是$\varphi(t)$的共轭。

2. $\varphi(t)$对$t\in(-\infty,\ \infty)$一致连续。

3. 若$\eta=a\xi+b$，a，b为常数，则η的特征函数为

$$\varphi_\eta(t)=e^{jbt}\varphi_\xi(at)。$$

4. 特征函数$\varphi(t)$是非负定的，即对任意正整数n，任意n个实数t_1，t_2，…，t_n及复数z_1，z_2，…，z_n，都有

$$\sum_{r,s=1}^{n}\varphi(t_r-t_s)z_r\bar{z}_s\geqslant 0。$$

反之，若复值函数$\varphi(t)$在$t\in(-\infty,\ \infty)$连续、$\varphi(0)=1$、非负定，则$\varphi(t)$必为某随机变数的特征函数。

5. (反演公式)设随机变数ξ的分布函数和特征函数分别为$F(x)$和$\varphi(t)$，则对$F(x)$的任意连续点x_1，x_2，$(-\infty<x_1<x_2<\infty)$有

$$F(x_2)-F(x_1)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T}\frac{e^{-jtx_1}-e^{-jtx_2}}{jt}\varphi(t)dt。$$

6. (唯一性定理)设分布函数$F_1(x)$及$F_2(x)$的特征函数分别为$\varphi_1(t)$及$\varphi_2(t)$，则$F_1(x)=F_2(x)$的充分必要条件为$\varphi_1(t)=\varphi_2(t)$。

7. 若随机变数ξ的特征函数$\varphi(t)$于$(-\infty,\ \infty)$绝对可积，则ξ为具有密度函数$f(x)$的连续型随机变数，且

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-jtx}\varphi(t)dt。$$

即是说，对于连续型随机变数，特征函数与密度函数为一对富利叶变换。

8. 设ξ为取非负整数值的随机变数，其概率函数为$p_k=P(\xi=k)$，特征函数为$\varphi(t)=\sum_k p_k e^{jkt}$，则

$$p_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-jkt}\varphi(t)dt。$$

即当ξ为取非负整数值的随机变数时，$\varphi(t)$ 是 $\{p_k\}$ 的离散富氏变换，$\{p_k\}$ 为$\varphi(t)$的离散富氏反变换。

9．两个相互独立随机变数之和的特征函数等于各个特征函数之积，但反之不真。

10．(连续性定理)分布函数序列 $\{F_n(x)\}$ 弱收敛于分布函数$F(x)$的充分必要条件是其对应的特征函数序列 $\{\varphi_n(t)\}$ 点点收敛于一个在点$t=0$连续的函数$\varphi(t)$。此时$\varphi(t)$必为$F(x)$的特征函数。

11．若随机变数ξ有n阶矩，则其特征函数 $\varphi(t)$ 可微分n次，且对$k\leqslant n$。

$$\varphi^{(k)}(0) = j^k E(\xi^k)。$$

二、一维随机变数的函数的特征函数

设 $g(x)$是 R_1上的连续函数，$\varphi(t)$是ξ的特征函数，则$g(\xi)$的特征函数是

$$\varphi_{g(\xi)}(t) = E[e^{jtg(\xi)}] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{jtg(x)}dF(x)。$$

三、多维随机变数的特征函数

着重研究二维的情形。任意 $n(n\geqslant 3)$ 维的讨论与二维类似。

设(ξ_1, ξ_2)是二维随机变数，其分布函数为 $F(x_1, x_2)$。t_1，t_2是任意实数。记

$$\varphi(t_1, t_2)=E[e^{j(t_1\xi_1+t_2\xi_2)}]$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}e^{j(t_1x_1+t_2x_2)}\,dF(x_1,x_2)。$$

称$\varphi(t_1,t_2)$为二维随机变数(ξ_1, ξ_2)的特征函数。

当(ξ_1, ξ_2)为离散型随机变数时，

$$\varphi(t_1,t_2)=\sum_{r,s}e^{j(t_1x_{1r}+t_2x_{2s})}。$$

当(ξ_1, ξ_2)为连续型随机变数时，

$$\varphi(t_1, t_2)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}e^{j(t_1x_1+t_2x_2)}f(x_1, x_2)dx_1dx_2,$$

其中$f(x_1,x_2)$为(ξ_1,ξ_2)的密度函数。

二维特征函数有如下性质：

1) $\varphi(0, 0)=1$。且对任意t_1, t_2,
$|\varphi(t_1, t_2)|\leqslant\varphi(0, 0)=1$。

2) $\varphi(-t_1, -t_2)=\overline{\varphi(t_1, t_2)}$。

3) $\varphi(t_1, t_2)$在实平面上一致连续。

4) $\varphi(t_1, 0)=\varphi_{\xi_1}(t_1)$, $\varphi(0, t_2)=\varphi_{\xi_2}(t_2)$。

5) 若a_1, a_2, b_1,b_2 均为常数,(ξ_1,ξ_2)为二维随机变数，则随机变数$(a_1\xi_1+b_1, a_2\xi_2+b_2)$的特征函数为

$$e^{j(t_1b_1+t_2b_2)}\varphi(a_1t_1, a_2t_2),$$

其中$\varphi(t_1, t_2)$为(ξ_1, ξ_2)的特征函数。

6) 随机变数ξ_1与ξ_2相互独立的充分必要条件 是(ξ_1, ξ_2)的特征函数$\varphi(t_1,t_2)$满足

$$\varphi(t_1, t_2)=\varphi_{\xi_1}(t_1)\varphi_{\xi_2}(t_2)。$$

7）设(ξ_1, ξ_2)的特征函数为$\varphi(t_1, t_2)$，则$\xi_1+\xi_2$的特征函数为$\varphi(t, t)$。

8）设(ξ_1, ξ_2)的特征函数为$\varphi(t_1, t_2)$，a_1 a_2，b为任意常数，则$\eta=a_1\xi_1+a_2\xi_2+b$的特征函数为

$$\varphi_\eta(t)=e^{jbt}\varphi(a_1t, a_2t)。$$

特别，当ξ_1与ξ_2相互独立时

$$\varphi_\eta(t)=e^{jbt}\varphi_{\xi_1}(a_1t)\varphi_{\xi_2}(a_2t)。$$

9）二元分布函数$F_1(x_1, x_2)$与$F_2(x_1, x_2)$恒等的充分必要条件是它们的特征函数$\varphi_1(t_1, t_2)$与$\varphi_2(t_1, t_2)$恒等。

10）设(ξ_1, ξ_2)为二维随机变数，$E(\xi_1^{k_1}\ \xi_2^{k_2})$存在，则其特征函数$\varphi(t_1, t_2)$的偏导数

$$\frac{\partial^{k_1+k_2}\varphi(t_1,t_2)}{\partial t_1^{k_1}\ \partial t_2^{k_2}}$$

存在且

$$E[\xi_1^{k_1}\ \xi_2^{k_2}]=(j)^{-(k_1+k_2)}\left[\frac{\partial^{k_1+k_2}\varphi(t_1,t_2)}{\partial t_1^{k_1}\ \partial t_2^{k_2}}\right]_{t_1=t_2=0}。$$

四、母函数

设a_0，a_1，a_2，…是实数序列，如果

$$A(S)=a_0+a_1S+a_2S^2+\cdots,$$

在某一区间$-S_0<S<S_0$内收敛，称$A(S)$为序列$\{a_j\}$的母函数。特别，当随机变数ξ只取非负整数值$k=0，1，\cdots$。其分布列为

$$p_k=P(\xi=k),\ k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots。$$

称

$$\phi_\xi(s)=E(S^\xi)=\sum_k p_k S^k, \quad (-1\leqslant S\leqslant 1)$$

为ξ的母函数。如不产生混乱，将$\phi_\xi(S)$简单记为$\phi(S)$。

$\phi(S)$有如下性质：

1) $\phi(S)$在$|S|\leqslant 1$上一致连续；

2) $\phi(1)=1$，且$|\phi(S)|\leqslant\phi(1)=1$；

3) 设ξ的母函数为$\phi_\xi(S)$，则$\eta=a\xi+b$的母函数为

$$\phi_\eta(S)=S^b\,\phi_\xi(S^a)。$$

其中a，b为非负整数。

4) 有限多个相互独立随机变数之和的母函数等于各个随机变数的母函数之乘积。

5) 若随机变数ξ的n阶矩存在，则其母函数$\phi(S)$的$k(k\leqslant n)$阶导数$\phi^{(k)}(S)$ $(|S|\leqslant 1)$存在，且ξ的$k(k\leqslant n)$阶矩可由母函数在$S=1$的各阶导数表示。如

$$E(\xi)=\phi'(1), \quad E(\xi^2)=\phi''(1)+\phi'(1)。$$

6) (反演公式)设随机变数ξ的分布列为$p_k(k=0,1,2,\cdots)$，母函数为

$$\phi(S)=\sum_k p_k S^k, \quad (|S|\leqslant 1)$$

则有

$$p_k=\frac{1}{k!}\cdot\phi^{(k)}(0)。$$

〔本章习题〕

1．若随机变数ξ服从几何分布：

$$P(\xi=k)=pq^k,\ (k=0,1,\cdots)$$

其中 $0<p<1$，$q=1-p$。求ξ的特征函数$\varphi(t)$及数学期望$E(\xi)$、方差$D(\xi)$。

〔解〕由特征函数的定义及随机变数的函数的数学期望的公式，得

$$\varphi(t)=E(e^{jt\xi})=\sum_{k=0}^{\infty}e^{jtk}P(\xi=k)$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}e^{jtk}\,p\,q^k=\frac{p}{1-q\,e^{jt}}。$$

由特征函数与矩的关系：$\varphi^{(k)}(0)=j^k E(\xi^k)$，得

$$E(\xi)=\frac{\varphi'(0)}{j},\ D(\xi)=\frac{\varphi''(0)}{j^2}-\left(\frac{\varphi'(0)}{j}\right)^2。$$

因为

$$\varphi'(0)=\varphi'(t)\Big|_{t=0}=\frac{pqj\ e^{jt}}{(1-qe^{jt})^2}\Big|_{t=0}=\frac{q\,j}{p},$$

$$\varphi''(0)=\varphi''(t)|_{t=0}$$

$$=pqj\left[\frac{(1-qe^{jt})^2je^{jt}-e^{jt}2(1-qe^{jt})(-qje^{jt})}{(1-q\,e^{jt})^4}\right]_{t=0}$$

$$=-\frac{q(1+q)}{p^2},$$

因此得到

$$E(\xi)=\frac{q}{p},\qquad D(\xi)=\frac{q}{p^2}。$$

注：若ξ服从

$$P(\xi=k)=pq^{k-1},\ (k=1,2,\cdots)$$

的几何分布。则ξ的特征函数为

$$\varphi(t)=\sum_{k=1}^{\infty} pq^{k-1}e^{jtk}=pe^{jt}\sum_{k=1}^{\infty}(qe^{jt})^{k-1}$$

$$=\frac{1}{1-qe^{jt}}pe^{jt}。$$

由此可见，两种几何分布的特征函数是不同的。可以验证，这两种几何分布的数学期望不同，但方差一样。

习题。设随机变数ξ服从巴斯卡分布，即

$$P(\xi=k)=\frac{a^k}{(1+a)^{k+1}},\ (a>0),\ k=0,1,2,\cdots$$

求ξ的特征函数。

2．设随机变数ξ的密度函数为

$$f(x)=\tfrac{1}{2}e^{-|x|},$$

求它的特征函数。

〔解〕由特征函数的定义，ξ的特征函数为

$$\varphi(t)=E(e^{jt\xi})=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}e^{jtx}e^{-|x|}dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\cos tx\,e^{-|x|}dx+j\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\sin tx\,e^{-|x|}dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\cos tx\,e^{-|x|}dx=\int_{0}^{\infty}(\cos tx)e^{-x}dx,$$

进行分部积分，得

$$\int_{0}^{\infty}e^{-x}\cos tx\,dx=\left[e^{-x}\frac{t\sin tx-\cos tx}{1+t^2}\right]_0^{\infty}=\frac{1}{1+t^2}。$$

即

$$\varphi(t)=\frac{1}{1+t^2}。$$

习题．设随机变数ξ的密度函数为

$$f(x)=\frac{a}{2}e^{-a|x|},\ a>0\ 。$$

求ξ的特征函数及原点矩。

3．设随机变数ξ的密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{b^p}{\Gamma(p)}x^{p-1}e^{-bx}, & 当x>0, b>0, p>0,\\ 0, & 其它。\end{cases}$$

求ξ的特征函数及原点矩。

〔解〕 由特征函数的定义，得

$$\varphi(t)=\int_0^\infty\frac{b^p}{\Gamma(p)}x^{p-1}e^{-bx}e^{jtx}dx$$

$$=\frac{b^p}{\Gamma(p)}\int_0^\infty x^{p-1}e^{-(b-jt)x}dx,$$

令$(b-jt)x=z$，则

$$\varphi(t)=\frac{b^p}{\Gamma(p)}\ \frac{1}{(b-jt)^p}\int_0^\infty z^{p-1}e^{-z}dz$$

$$=\frac{b^p}{\Gamma(p)}\cdot\frac{1}{(b-jt)^p}\ \Gamma(p)=\frac{b^p}{(b-jt)^p}。$$

4．设随机变数ξ的密度函数为

$$f(x)=2h^2xe^{-h^2x^2},\qquad(x>0)$$

求ξ的特征函数。

〔解〕 由定义，ξ的特征函数为

$$\varphi(t)=\int_0^{\infty} e^{jtx}\,2h^2 xe^{-h^2x^2}dx=$$

$$=\int_0^{\infty}2h^2xe^{-h^2x^2}\cos tx dx+j\int_0^{\infty}2h^2xe^{-h^2x^2}\sin tx\,dx$$

$$=-\cos tx\cdot e^{-h^2x^2}\Big|_0^{\infty}-t\int_0^{\infty}e^{-h^2x^2}\sin tx\,dx$$

$$+j\Big[-\sin tx\cdot e^{-h^2x^2}\Big|_0^{\infty}+t\int_0^{\infty}e^{-h^2x^2}\cos tx\,dx\Big]$$

$$=1-t\int_0^{\infty}e^{-h^2x^2}\sin tx\,dx+jt\int_0^{\infty}\cos tx\cdot e^{-h^2x^2}dx。$$

在上式第一个积分中令$u=hx$，并将第二个积分的积分变量也改为u，则

$$\varphi(t)=1-\frac{t}{h}\int_0^{\infty}e^{-u^2}\cdot\sin\frac{tu}{h}du+jt\int_0^{\infty}e^{-h^2u^2}\cdot\cos tudu$$

由于

$$\int_0^{\infty}e^{-x^2}\sin 2px\,dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-p^2}\Phi(p)\,,$$

$$\int_0^{\infty}e^{-px^2}\cos qx\,dx=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{p}}\,e^{-\frac{q^2}{4p}},$$

故

$$\int_0^{\infty}e^{-u^2}\sin\frac{tu}{h}du=\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-\left(\frac{t}{2h}\right)^2}\Phi\left(\frac{t}{2h}\right)。$$

$$\int_0^{\infty}e^{-h^2u^2}\cos tu\,du=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{h^2}}\,e^{-\frac{t^2}{4h^2}}。$$

从而

$$\varphi(t)=1-\frac{t}{2h}\sqrt{\pi}\ \ e^{-\left(\frac{t}{2h}\right)^2}\left[\ j-\Phi\left(\frac{t}{2h}\right)\right]。$$

其 中$\Phi(v)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^v e^{-z^2}dz$。

5．设ξ服从负二项分布，即

$$P(\xi=k)=C_{-r}^{k}(-p)^k q^r\text{，}(k=0,1,\cdots)$$

其中$0<p<1, q=1-p$。求ξ的特征函数。

〔解〕 由定义，ξ的特征函数为

$$\varphi(t)=\sum_{k=0}^{\infty}P(\xi=k)e^{jkt}=\sum_{k=0}^{\infty}C_{-r}^{k}(-p)^k q^r e^{jkt},$$

由于

$$(1-p)^{-r}=\sum_{k=0}^{\infty}C_{-r}^{k}(-p)^k,\qquad |p|<1$$

故

$$\varphi(t)=q^r(1-pe^{jt})^{-r}。$$

6．求下列各随机变数的概率分布，如果相应的 特 征函数分别为：

$$\varphi_1(t)=cost\text{；}\qquad \varphi_2(t)=cos^2t。$$

〔解 i)〕 因为$cost=\frac{1}{2}(e^{jt}+e^{-jt})$。故由特征函数的 定义可见，$P(\xi=1)=P(\xi=-1)=\frac{1}{2}$。

〔解 ii)〕 因为

$$cos^2t=\frac{1}{4}\left[e^{jt}+e^{-jt}\right]^2=\frac{1}{4}\left[e^{2jt}+e^{-2jt}+2\right]\text{，故 由}$$

特征函数的定义，可见

$$P(\xi=0)=\tfrac{1}{2},$$
$$P(\xi=2)=P(\xi=-2)=\tfrac{1}{4}。$$

7．若随机变数ξ的特征函数为

$$\varphi(t)=\frac{1}{16}(1+2e^{it}+e^{i2t})^2,$$

求$P(1<\xi<4)$及$P(\xi>2)$。

〔解〕 因为

$$\varphi(t)=\frac{1}{16}(1+2e^{it}+e^{i2t})^2=\frac{1}{16}(1+e^{it})^4$$
$$=(\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}e^{it})^4,$$

注意到$n=4$，$p=q=\frac{1}{2}$的二项分布的特征函数与$\varphi(t)$相同，由唯一性定理知，ξ服从n为4，p为$\frac{1}{2}$的二项分布。于是ξ可取值0，1，2，3，4。从而

$$P(1<\xi<4)=P(\xi=2)+P(\xi=3)$$
$$=C_4^2(\tfrac{1}{2})^2(\tfrac{1}{2})^2+C_4^3(\tfrac{1}{2})^3(\tfrac{1}{2})=5/8,$$
$$P(\xi>2)=P(\xi=3)+P(\xi=4)$$
$$=C_4^3(\tfrac{1}{2})^3(\tfrac{1}{2})+(\tfrac{1}{2})^4=5/16。$$

8．求证：若随机变数ξ的特征函数是

$$\varphi(t)=\frac{e^{it}(1-e^{int})}{n(1-e^{it})},$$

则ξ以概率$\frac{1}{n}$取值1，2，…，n。

〔证〕设随机变数ξ_1以概率$\frac{1}{n}$取值1，2，…，n。则ξ_1的特征函数为

$$\varphi_1(t)=E(e^{jt\xi_1})=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}e^{jkt}=\frac{e^{jt}}{n}\sum_{k=1}^{n}e^{jt(k-1)}$$

$$=\frac{e^{jt}}{n}\ \frac{1-e^{jnt}}{1-e^{jt}}=\varphi(t),$$

由唯一性定理知，ξ的分布列与ξ_1的分布列相同。即命题得证。

注：也可以直接证明ξ以$\frac{1}{n}$的概率取值1，2，…，n。事实上，因为

$$\varphi(t)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}e^{jkt},$$

设$\varphi(t)$相应的概率布分为$P(\xi=k)=p_k$，其中k为整数。令l为任一整数，则有

$$\int_{-\pi}^{\pi}e^{-jtl}\varphi(t)dt=\int_{-\pi}^{\pi}e^{-jtl}\sum_{k=-\infty}^{\infty}p_k e^{jtk}\,dt$$

$$=\int_{-\pi}^{\pi}p_l\,dt+\sum_{k\neq l}\int_{-\pi}^{\pi}p_k e^{j(k-l)t}\,dt,$$

因为当$k\neq l$时

$$\int_{-\pi}^{\pi}e^{it(k-l)}\,dt=0,$$

所以

$$\int_{-\pi}^{\pi}e^{-itl}\varphi(t)dt=2\pi\,p_l。$$

另一方面，对$l=1, 2, \cdots, n$，

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{-jtl}\varphi(t)dt = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-jtl}e^{jtk}dt = \frac{2\pi}{n}。$$

对不等于1，2，…，n的l值，上式为零。因此

$$2\pi p_l = \begin{cases} \frac{2\pi}{n}, & l=1, 2, \cdots, n, \\ 0, & 其它。\end{cases}$$

即

$$P(\xi=l) = \frac{1}{n}。l=1, 2, \cdots, n。$$

9．对下列特征函数求相应的分布函数或密度函数：

i) $\frac{1}{1-jt}$；　　ii) $\frac{1}{(1-jt)^n}$；

iii) $\frac{1}{2e^{-jt}-1}$。

〔解 i)〕因为以

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & 当x>0, \\ 0, & 其它。\end{cases}$$

为密度函数的随机变数所对应的特征函数为

$$\varphi(t) = \int_0^{\infty} e^{jtx}e^{-x}dx = \int_0^{\infty} e^{-(1-jt)x}dx = \frac{1}{1-jt}。$$

由唯一性定理知，所要求的密度函数就是$f(x)$，相应的分布函数为

$$F(x) = \begin{cases} \int_0^x e^{-t}dt = 1-e^{-x}, & 当x>0, \\ 0, & 当x\leqslant 0。\end{cases}$$

〔解ii)〕 由i)

$$\frac{1}{1-jt}=\int_0^{\infty} e^{-(1-jt)x}\,dx,$$

在上式两边对t求$(n-1)$次导数，得

$$\frac{(-j)^{n-1}(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1-jt)^n}=j^{n-1}\int_0^{\infty} x^{n-1}e^{-(1-jt)x}\,dx。$$

因此

$$\frac{1}{(1-jt)^n}=\int_0^{\infty}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}e^{-(1-jt)x}\,dx。$$

由特征函数的定义可见，所求的密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^{n-1}e^{-x}}{(n-1)!}, & 当x>0,\\ 0, & 其它。\end{cases}$$

〔解iii)〕 因为

$$\frac{1}{2e^{-it}-1}=\frac{1}{2e^{-it}(1-\frac{1}{2}e^{it})}=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\tfrac{1}{2}\right)^k e^{ikt},$$

由特征函数的定义知，所求的分布列为

$$P(\xi=k)=\frac{1}{2^k}。\quad (k=1,2,\cdots\cdots。)$$

10.设随机变数ξ的特征函数为

$$\varphi(t)=e^{-a|t|},$$

其中$a>0$为常数，求ξ的密度函数$f(x)$。

〔解〕 由定义