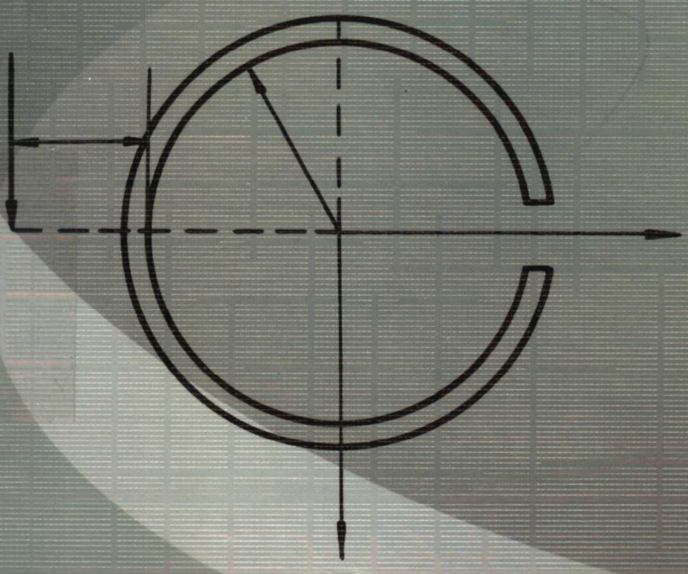
Cailiao Lixue
Xuexi ji Kaoyan Zhidaoshu

材料力学
学习及考研指导书

西南交通大学材料力学教研室 编



西南交通大学出版社
http://press.swjtu.edu.cn

材料力学学习及考研指导书

西南交通大学材料力学教研室 编

西南交通大学出版社
·成 都·

内 容 提 要

本书为普通高等学校本科生学习材料力学课程及报考相关专业研究生的教学辅导书，是西南交通大学材料力学教师根据教学上多年使用孙训方和李庆华等老一辈教师编写的教材的经验，经提炼总结，编写完成的。本书在内容上强调学习中的重点和难点，注重学习过程中的基本解题方法和思路。书中列举了大量具有代表性的例题及习题，在主要的习题部分还配有分析思路，为学生自学提供了重要指导。

本书适于土木工程、机械工程、材料等工科相关专业的师生使用，也可供其他专业及工程技术人员参考。

图书在版编目（CIP）数据

材料力学学习及考研指导书 / 西南交大材料力学教研室编. —成都：西南交通大学出版社，2004.12
ISBN 7-81104-004-2

Ⅰ. 材…　Ⅱ. 西…　Ⅲ. 材料力学 – 高等学校 – 教学参考资料　Ⅳ. TB301

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2004）第 117941 号

材料力学学习及考研指导书

西南交通大学材料力学教研室　编

*

责任编辑　陈渝生
封面设计　何东琳设计工作室
西南交通大学出版社出版发行
新华书店　经销
(成都二环路北一段 111 号　邮政编码：610031　发行部电话：87600564)
http: //press.swjtu.edu.cn
E-mail: cbsxx@swjtu.edu.cn
四川森林印务有限责任公司印刷

*

开本：787 mm × 1 092 mm　1/16　　印张：14.125
字数：349 千字　　印数：1—3 000 册
2004 年 12 月第 1 版　　2004 年 12 月第 1 次印刷
ISBN 7-81104-004-2/TB・002
定价：18.50 元

序　言

本书是由西南交通大学材料力学课程的教师集教学上多年的经验，经提炼总结，编写完成的一本材料力学的学习辅导书。本书在内容上强调了学习中的重点和难点，注重学习过程中的基本解题方法和思路。书中列举了大量具有代表性的例题及习题，在主要的习题部分还配有分析思路，为学生自学提供了重要指导。

本书第二章“轴向拉伸和压缩”和第三章“扭转”由陆宏轮编写；第四章“弯曲应力”和附录“截面的几何性质”由唐达培编写；第五章“梁的位移”和第六章“简单超静定问题”由康国政编写；第七章“应力状态和强度理论”、第八章“胡克定律、电测法及应变分析”和第一章“绪论”由江晓禹编写；第九章“组合变形及连接部分的计算”和第十章“能量法”由史智编写；第十一章“压杆稳定”和第十二章“动应力”由龚晖编写。全书由江晓禹统编。

在本书编写过程中，尽量编写了一些具有代表性的例题及习题。但由于学时数的不同，学习者可根据相关教学内容要求进行选读。书中难免会有一些疏漏，敬请读者指出并提出宝贵意见。

编　者

2004 年 12 月

目　　录

第一章　绪　论 ………………………………………………………… 1
一、主要内容 ………………………………………………………… 1
二、例　题 ………………………………………………………… 1
三、习　题 ………………………………………………………… 1
第二章　轴向拉伸和压缩 ………………………………………………… 2
一、主要内容 ………………………………………………………… 2
二、重点与难点 ………………………………………………………… 7
三、例题解析 ………………………………………………………… 8
四、习　题 ………………………………………………………… 21
第三章　扭　转 ………………………………………………………… 24
一、主要内容 ………………………………………………………… 24
二、重点与难点 ………………………………………………………… 29
三、例题解析 ………………………………………………………… 30
四、习　题 ………………………………………………………… 40
第四章　弯曲应力 ………………………………………………………… 43
一、主要内容 ………………………………………………………… 43
二、重点与难点 ………………………………………………………… 43
三、例题解析 ………………………………………………………… 46
四、习　题 ………………………………………………………… 57
第五章　梁的位移 ………………………………………………………… 62
一、主要内容 ………………………………………………………… 62
二、重点与难点 ………………………………………………………… 64
三、例题解析 ………………………………………………………… 65
四、习　题 ………………………………………………………… 85
第六章　简单超静定问题 ………………………………………………… 91
一、主要内容 ………………………………………………………… 91
二、重点与难点 ………………………………………………………… 91
三、例题解析 ………………………………………………………… 92
四、习　题 ………………………………………………………… 106

第七章　应力状态和强度理论 …… 111
一、主要内容 …… 111
二、重点与难点 …… 116
三、例题解析 …… 117
第八章　胡克定律、电测法及应变分析 …… 132
一、主要内容 …… 132
二、重点与难点 …… 137
三、例题解析 …… 137
第九章　组合变形及连接部分的计算 …… 150
一、主要内容 …… 150
二、重点与难点 …… 152
三、例题解析 …… 154
四、习　题 …… 162
第十章　能量法 …… 167
一、主要内容 …… 167
二、重点与难点 …… 169
三、例题解析 …… 170
四、习　题 …… 178
第十一章　压杆稳定 …… 183
一、主要内容 …… 183
二、重点与难点 …… 183
三、例题解析 …… 184
四、习　题 …… 194
第十二章　动应力 …… 198
一、主要内容 …… 198
二、重点与难点 …… 198
三、例题解析 …… 199
四、习　题 …… 207
附录　截面的几何性质 …… 211
一、主要内容 …… 211
二、例题解析 …… 212
参考文献 …… 220

第一章 绪 论

一、主要内容

研究对象：变形固体。主要是指构件，而构件大致分为杆、板、壳、块体，其中杆件是最重要的研究对象。

研究内容：强度、刚度与稳定性。

基本假设：

（1）均匀连续性假设——材料是均匀连续分布的。

（2）各向同性假设——材料在各个方向的力学性能相同。

（3）小变形假设——变形与构件的原始尺寸相比很小，因此，受力分析按照构件的原始尺寸计算。

杆件变形的基本形式：轴向拉伸或轴向压缩、剪切、扭转与弯曲。

二、例 题

（1）理论力学与材料力学的主要关系是什么？

答：理论力学研究刚体的外部效应（构件受到的外力及相应的运动或平衡状态），材料力学研究变形固体的内部效应（构件的内力及变形）。

（2）下列材料中，不属于各向同性材料的是哪些？

钢材，木材，岩石，铝合金，铸铁，玻璃钢

答：木材、玻璃钢。

三、习 题

（1）手拿一张普通 A4 复印纸一端，在自重作用下纸会变弯，这主要是强度问题还是刚度问题？

（2）接上一题，将这张普通 A4 复印纸卷成一个圆筒，手拿一端，在自重作用下纸筒不会变弯。是什么原因？

第二章　轴向拉伸和压缩

一、主要内容

1. 拉（压）杆的几何特点、受力特点及变形特点

拉（压）杆是等截面直杆；

拉（压）杆的两端各受一集中力 F 作用，这两个 F 力大小相等，方向相反，且作用线与杆轴线重合；

拉（压）杆的主要变形是纵向伸长（缩短）。

2. 轴力与轴力图

轴力 F_N 是横截面上法向分布内力系的合力，是由轴向外力（包括轴向载荷与轴向反力）作用所引起的，是同一横截面两侧分离体的相互作用力。横截面上的轴力与分离体上的轴向外力构成一平衡力系，因此，F_N 可用截面法求得：根据分离体的平衡条件，F_N 的大小与分离体上轴向外力合力的大小相等，但方向与其相反，作用线与轴线重合。轴向拉伸时，F_N 的指向离开截面，是拉力，拉力为正；轴向压缩时，F_N 的指向对着截面，是压力，压力为负。因此，在用截面法计算 F_N 时，为了使 F_N 计算结果的正负号与规定的正负号一致，可预设 F_N 为正。

以平行于杆轴线的坐标表示横截面位置，垂直于杆轴线的坐标表示轴力数值，在这样的坐标系里作出的轴力随横截面位置变化的函数图形称为轴力图。

3. 应力的概念

应力是过构件内一点任意截面上的分布内力集度，在数值上等于该截面上围绕该点的单位微面积上分布内力的合力。

设 ΔF、ΔF_N、ΔF_S 分别为 m-m 截面上围绕 B 点的面元 ΔA 上分布内力的合力、合力的法向分量或法向分布内力的合力、合力的切向分量或切向分布内力的合力，定义：ΔA 上的平均应力为

$$p=\frac{\Delta F}{\Delta A}$$

B 点的总应力为

$$p=\lim_{\Delta A\to 0}\frac{\Delta F}{\Delta A}=\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}A}$$

B 点的正应力为

$$\sigma = p\cos\alpha = \lim_{\Delta A\to 0}\frac{\Delta F\cos\alpha}{\Delta A} = \lim_{\Delta A\to 0}\frac{\Delta F_{\mathrm{N}}}{\Delta A} = \frac{\mathrm{d}F_{\mathrm{N}}}{\mathrm{d}A}$$

B 点的切应力为

$$\tau = p\sin\alpha = \lim_{\Delta A\to 0}\frac{\Delta F\sin\alpha}{\Delta A} = \lim_{\Delta A\to 0}\frac{\Delta F_{\mathrm{S}}}{\Delta A} = \frac{\mathrm{d}F_{\mathrm{S}}}{\mathrm{d}A}$$

应力的量纲是：[力] [长度]$^{-2}$；单位是：帕斯卡，简称帕，用 Pa 表示，1 Pa = 1 N/m^2；常用单位是兆帕，用 MPa 表示，1 MPa = 10^6 Pa。

σ的指向离开截面，是拉应力，拉应力为正；σ的指向对着截面，是压应力，压应力为负。τ使分离体有顺时针转动趋势者为正；τ使分离体有逆时针转动趋势者为负。

根据应力的定义式可得

$$F = \int_A p\mathrm{d}A$$

$$F_{\mathrm{N}} = \int_A \sigma\mathrm{d}A$$

$$F_{\mathrm{S}} = \int_A \tau\mathrm{d}A$$

4. 线应变的概念

线应变是构件内一点沿任意方向的伸缩变形程度，在数值上等于该点沿该方向单位微线段长度的改变量。

设$\Delta\delta_{\mathrm{S}}$为 B 点沿 S 方向的线元 ΔS 长度的改变量，定义：ΔS 的平均线应变为

$$\bar{\varepsilon} = \frac{\Delta\delta_{\mathrm{S}}}{\Delta S}$$

B 点沿 S 方向的线应变为

$$\varepsilon = \lim_{\Delta S\to 0}\frac{\Delta\delta_{\mathrm{S}}}{\Delta S} = \frac{\mathrm{d}\delta_{\mathrm{S}}}{\mathrm{d}S}$$

线应变 ε 是无量纲、无单位的量；伸长者为正，缩短者为负。

5. 拉（压）杆的变形几何关系

拉（压）杆的纵向变形 Δl 是长度的改变量，是纵向线应变 ε 的积累，在数值上等于两端沿轴向的相对线位移，即

$$\Delta l = l_1 - l = \int_l \varepsilon\,\mathrm{d}x = \varDelta_B - \varDelta_A$$

式中，l、l_1、$\varDelta_A$、$\varDelta_B$ 分别为拉（压）杆的原长，变形后长度，A、B 端沿轴向的线位移。对于拉（压）杆，除了非均匀加载方式的荷载影响区域、截面形状和尺寸急剧变化的孔洞、切槽、螺纹等部位之外，横截面的平面假设成立，不仅同一横截面的 ε = 常量，而且各横截面的 ε 均相同，即纵向变形程度是均匀的，从而

$$\Delta l = \varepsilon l \quad 或 \quad \varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$$

拉（压）杆的横向变形Δb 是横向尺寸的改变量，是横向线应变ε'的积累，即

$$\Delta b = b_1 - b = \int_b \varepsilon' \mathrm{d}S$$

式中，b、b_1 分别为拉（压）杆变形前、后的横向尺寸，$\mathrm{d}S$ 为横向线元。对于拉（压）杆，通常情况下，ε' = 常量，即横向变形是均匀的，从而

$$\Delta b = \varepsilon' b \quad 或 \quad \varepsilon' = \frac{\Delta b}{b}$$

Δl 和 Δb，伸长者为正，缩短者为负。

泊松比 ν 是横向线应变与纵向线应变的负比率，即

$$\nu = -\frac{\varepsilon'}{\varepsilon}$$

对于各向同性线弹性材料，ν = 常数，其取值范围是

$$-1 \leqslant \nu \leqslant 0.5$$

6. 拉（压）杆的应力

根据横截面的平面假设，设想：长度为 $\mathrm{d}x$ 的微段是由截面 $\mathrm{d}A$ 相同的许多纵向纤维所组成，每根纵向纤维的纵向变形即长度的改变量均为 $\varepsilon\,\mathrm{d}x$，根据变形固体的均匀性假设，每根纵向纤维所受的纵向力 $\sigma\,\mathrm{d}A$ 均相同，再根据变形固体的连续性假设，横截面上的正应力是连续均匀分布的，即

$$F_\mathrm{N} = \int_A \sigma\,\mathrm{d}A = \sigma A \quad 或 \quad \sigma = \frac{F_\mathrm{N}}{A}$$

当横截面的平面假设不成立时，上述横截面的正应力计算公式不再适用。例如，非均匀加载方式时的荷载影响区域；截面形状和尺寸急剧变化的孔洞、切槽、螺纹等部位；横截面沿杆长变化较大的锥形杆（$\alpha \geqslant 20°$）、Z 形截面杆等。

与横截面上的正应力一样，任意斜截面上的应力也是连续均匀分布的。α 截面上的总应力为

$$p_\alpha = \sigma_0 \cos\alpha$$

正应力为

$$\sigma_\alpha = \sigma_0 \cos^2\alpha$$

切应力为

$$\tau_\alpha = \frac{\sigma_0}{2}\sin 2\alpha$$

式中，σ_0 为横截面上的正应力；α 角，逆时针者为正，顺时针者为负。

7. 拉（压）胡克定律

材料的拉（压）实验表明：当横截面上的正应力不超过材料的比例极限时，正应力与纵向线应变成正比，即

$$\sigma = E\varepsilon \qquad (\sigma \leqslant \sigma_\mathrm{p})$$

这一关系称为材料在单向应力状态下的胡克定律。比例常数 E 称为材料的弹性模量，其值随材料而异，由实验测定，常用单位为 Gpa（1 GPa = 10^9 Pa）。由此可得拉（压）杆在线弹性范围内工作时的胡克定律

$$\Delta l = \frac{F_{\mathrm{N}} l}{EA}$$

式中，EA 称为拉（压）杆的拉（压）刚度。

8. 拉（压）杆的应变能

应变能 V_ε是弹性体在静力荷载作用的变形过程中积蓄在体内的能量，在数值上等于外力所做的功 W，即

$$V_\varepsilon = W$$

上式称为弹性体的功能原理。对于在线弹性范围内工作的拉（压）杆，外力功为

$$W = \frac{1}{2} F\Delta l$$

于是，拉（压）杆的应变能可写成

$$V_\varepsilon = \frac{1}{2} F\Delta l = \frac{1}{2} F_{\mathrm{N}} \Delta l = \frac{F_{\mathrm{N}}^2 l}{2EA} = \frac{EA(\Delta l)^2}{2l}$$

应变能的量纲是：[力][长度]；单位是：焦耳，用 J 表示。

应变能密度 v_ε是单位体积内积蓄的应变能，若弹性体的体积为 V，则

$$v_\varepsilon = \frac{V_\varepsilon}{V}$$

对于在线弹性范围内工作的拉（压）杆，应变能密度可写成

$$v_\varepsilon = \frac{F\Delta l}{2Al} = \frac{1}{2}\sigma\varepsilon = \frac{\sigma^2}{2E} = \frac{E\varepsilon^2}{2}$$

应变能密度的量纲是：[力][长度]$^{-2}$；单位是：J/m^3。

9. 材料在拉伸和压缩时的力学性能

材料的力学性能是材料在强度、变形等方面表现出来的性能，应通过实验测定，通常由应力—应变曲线反映材料的力学性能。

（1）低碳钢在拉伸时的力学性能

应力—应变曲线的四个阶段：① 弹性阶段。卸载后应变完全消失，包括应力与应变成正比的线性弹性、应力与应变不成正比的非线性弹性两个部分。② 屈服阶段。应力波动不大、应变明显增加，增加的应变是卸载后不能消失的塑性应变。③ 强化阶段。应变的增加要求应力的增加，增加的应变主要是塑性应变。④ 局部变形阶段。应变的增加要求应力的降低，直至试件断裂。

力学性能的三类指标：① 强度指标。比例极限σ_{p}：应力与应变成正比的应力最高限值；弹性极限σ_{e}：弹性阶段的应力最高限值；屈服极限σ_{S}：屈服阶段波动应力的最小值；强度极

限σ_b：应力—应变曲线上名义应力的最大值。② 弹性指标。弹性模量：$E=\dfrac{\sigma}{\varepsilon}$。③ 塑性指标。伸长率：$\delta=\dfrac{l_1-l}{l}\times 100\%$；断面收缩率：$\psi=\dfrac{A-A_1}{A}\times 100\%$。

卸载规律：不论试件的变形处在哪一阶段，卸载时的应力与应变均呈线性关系，且卸载曲线与弹性阶段的直线平行。

冷作硬化：试件加载至强化阶段后卸载，再次加载时，材料的比例极限提高、塑性降低。

塑性材料是伸长率$\delta>5\%$的材料，低碳钢是典型的塑性材料。

（2）低碳钢在压缩时的力学性能

应力—应变曲线：前三个阶段与拉伸时基本相同，但没有局部变形阶段。

力学性能指标：E、σ_p、σ_e、σ_S与拉伸时基本相同，但没有σ_b。

（3）铸铁在拉伸和压缩时的力学性能

应力—应变曲线：没有线性阶段和屈服阶段，均呈微弯的曲线。

力学性能指标：只有σ_b，且拉伸强度σ_{bt}<<压缩强度σ_{bc}。

脆性材料是伸长率$\delta<5\%$的材料，铸铁是典型的脆性材料。

10. 拉（压）杆的强度条件

许用应力是保证材料正常工作所容许承受的工作应力的最高限值。对于塑性材料

$$[\sigma]=\frac{\sigma_S}{n_S}$$

对于脆性材料

$$[\sigma]=\frac{\sigma_b}{n_b}$$

式中，n_S、n_b分别为大于 1 的安全因数。

强度条件要求：拉（压）杆内的最大工作正应力不得超过材料的许用应力，即

$$\sigma_{max}=\left(\frac{F_N}{A}\right)_{max}\leqslant[\sigma]$$

根据强度条件，可做以下三类计算：

（1）强度校核

$$\frac{F_N}{A}\leqslant[\sigma]$$

（2）截面设计

$$A\geqslant\frac{F_N}{[\sigma]}$$

（3）许可荷载计算

$$F_N\leqslant[\sigma]A$$

由 F_N 计算$[F]$。

二、重点与难点

1. 静力学平衡条件

（1）在材料力学中，力的可传性原理不再适用；分力不能无条件地用合力代替。

（2）在求轴力、作轴力图之前，通常应先求出反力。

（3）在分离体的受力图中，拉力背离分离体，压力指向分离体。

（4）为了使轴力计算结果的正负号与规定的正负号相同，应预先假设轴力为拉力。

（5）在轴向集中外力作用处，左、右侧截面的轴力数值有突变；在轴向均布外力作用区段，轴力图为斜直线。

（6）α截面与（$\alpha \pm 180°$）截面是同一个截面的两侧，分属截得的两个分离体，其外法线方向相反。

2. 变形几何协调条件

（1）泊松比ν是弹性常数，其取值范围是：$-1 \leqslant \nu \leqslant 0.5$。若$\nu > 0$，则拉（压）杆纵向伸长（缩短）时，横向缩短（伸长）；若$\nu < 0$，则拉（压）杆纵向伸长（缩短）时，横向也伸长（缩短）。当且仅当$\nu = -1$时，拉（压）杆变形前后的体积改变量最大；当且仅当$\nu = 0.5$时，拉（压）杆变形前后无体积改变（即等容变形或不可压缩）。对于大多数工程材料，$0 < \nu < 0.5$。

（2）若纵向线应变ε沿杆长是不均匀的（如轴向分布外力作用的情况），则纵向变形$\Delta l = \int_l \varepsilon \, dx$；当且仅当纵向线应变$\varepsilon$沿杆长是均匀的，才有$\Delta l = \varepsilon l$。

（3）横向变形Δb与横向尺寸b的选取有关（如圆截面的直径d、周长πd的变形分别是Δd、$\pi \Delta d$），而横向线应变ε'与横向尺寸b的选取无关（如圆截面的直径d、周长πd的线应变均为$\Delta d / d$）。

（4）变形是拉（压）杆形状和尺寸的变化，是代数量；位移是点、线、面在变形前后位置的变化或相对位置的变化，是矢量。位移不仅与杆件的变形有关，而且与杆件的刚体移、转有关，而杆件的刚体移、转则与杆件受到的约束（支座与节点）有关。变形与位移之间的关系应满足变形几何的协调条件，正如内力与外力的关系应满足静力学平衡条件一样。

3. 物理条件

（1）拉（压）杆横截面上正应力公式的适用条件是：平截面假设成立，且材料是均匀连续的。

（2）胡克定律的适用条件是：$\sigma = F_N / A \leqslant \sigma_p$，且在$l$范围内，$F_N$和$EA$均为常量（通常$E$=常量，这要求$A$=常量）。若在$l$范围内，$F_N$或$EA$为变量（如轴向分布力作用或变截面杆件），则应把杆件分成有限个有限长的杆段或无限个无限短的杆段，使每一段都满足胡克定律的适用条件，分段计算后再做代数累加或积分运算。

（3）对于在线弹性范围工作的拉（压）杆或杆系，外力F与其作用方位的位移Δ成正比，

外力功 $W=F\Delta/2$；应变能 V_ε与外力 F 的关系是非线性的，因此，不能用叠加法求应变能。

4. 强度条件

（1）在一般的强度问题中，不存在满应力杆，即不可能使每一杆件的每一横截面的正应力都达到材料的许用应力。

（2）只有在特殊几何构形的强度问题、形状优化问题及可变荷载的许可值问题中，才存在满应力杆，即可使每一杆件的每一横截面的正应力都达到材料的许用应力。

三、例题解析

1.（轴向脱离问题，见图 2.1）左端固定的等直杆，长度和拉（压）刚度分别为 l 和 EA，预拉伸长 δ后，右端加一刚性支撑，然后，在杆的右端施加一轴向拉力 F。设杆件始终在线弹性范围内工作，试分析外力 F 的施加过程中杆件轴力 F_N的变化。

解 如果 $F\leqslant\dfrac{EA\delta}{l}$，则 $F_N=\dfrac{EA\delta}{l}$

如果 $F\geqslant\dfrac{EA\delta}{l}$，则 $F_N=F$（见图 2.2）

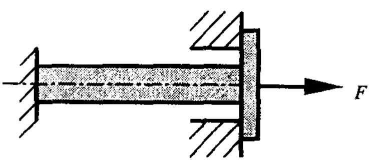


图 2.1

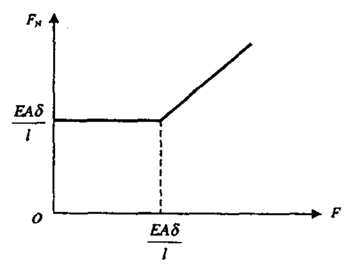


图 2.2

2.（轴向接触问题，见图 2.3）左端固定的等直杆，长度和拉（压）刚度分别为 l 和 EA，右端作用一轴向拉力 F，杆伸长δ后，右端与支撑刚性接触，然后，外力 F 继续加大。设杆件始终在线弹性范围内工作，试分析外力 F 的施加过程中杆件轴力 F_N的变化。

解 如果 $F\leqslant\dfrac{EA\delta}{l}$，则 $F_N=F$

如果 $F\geqslant\dfrac{EA\delta}{l}$，则 $F_N=\dfrac{EA\delta}{l}$（见图 2.4）

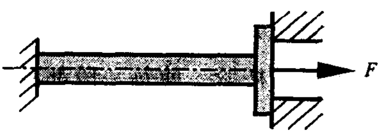


图 2.3

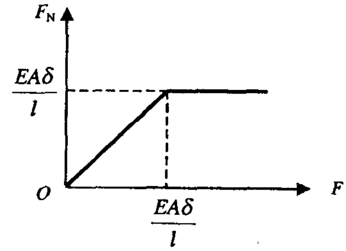


图 2.4

3.（轴向摩擦与拉出问题，见图 2.5）一圆杆紧插在拉（压）刚度为 EA 的套管中，杆端施加力 F 后将杆从套管中拔出。设杆刚被拉动时摩擦力均匀分布于两者接触的圆柱面上，试求此时套管的伸长量。

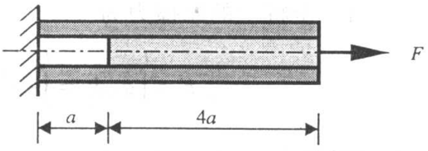


图　2.5

解　圆杆与套管的受力分别如图 2.6 所示，两者之间的摩擦力可简化为轴向均布力，其集度为

$$q = \frac{F}{4a}$$

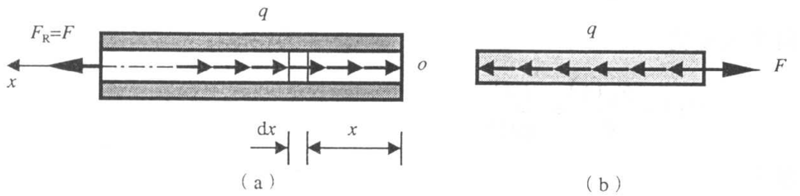


图　2.6

套管 x 截面的轴力为

$$F_{\mathrm{N}}(x) = \frac{Fx}{4a} \qquad (0 \leqslant x \leqslant 4a)$$

$$F_{\mathrm{N}}(x) = F \qquad (4a \leqslant x \leqslant 5a)$$

纵向线应变为

$$\varepsilon(x) = \frac{Fx}{4aEA} \qquad (0 \leqslant x \leqslant 4a)$$

$$\varepsilon(x) = \frac{F}{EA} \qquad (0 \leqslant x \leqslant 4a)$$

套管的总伸长量为

$$\Delta l = \int_0^{5a} \varepsilon(x)\mathrm{d}x = \int_0^{4a} \frac{Fx}{4aEA}\mathrm{d}x + \int_{4a}^{5a} \frac{F}{EA}\mathrm{d}x = \frac{3Fa}{EA}$$

4.（轴向摩擦与压入问题，见图 2.7（a））拉（压）刚度为 EA 的等截面木桩，受柱顶轴向荷载 F 作用，打进土中的深度为 l。设荷载 F 完全由沿桩侧面的摩擦力 q_{f}（单位长度的集度，沿桩长的分布规律如图 2.7（b）所示）来抵抗，且不计桩身自重和桩底反力，试求：（1）桩的轴力沿桩长的变化规律（图 2.7（c））；（2）桩的压缩量。

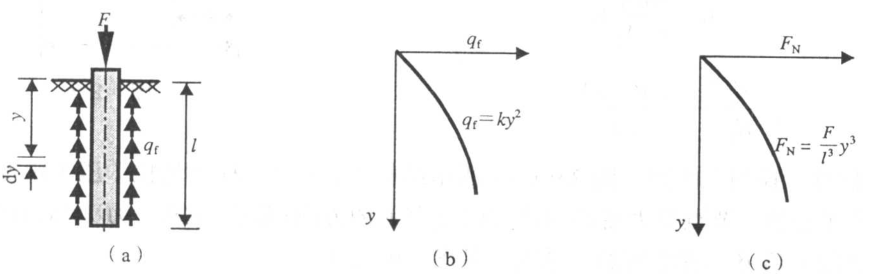


图　2.7

解

（1）全桩上的摩擦力为

$$F=\int_0^l q_f \mathrm{d}y=\int_0^l ky^2\mathrm{d}y=\frac{kl^3}{3}$$

y 截面的轴力（图 2.7（c））为

$$F_{\mathrm{N}}(y)=\int_0^y q_f \mathrm{d}y=\int_0^y ky^2\mathrm{d}y=\frac{ky^3}{3}=\frac{F}{l^3}y^3$$

（2）纵向线应变为

$$\varepsilon(y)=\frac{F_{\mathrm{N}}(y)}{EA}=\frac{Fy^3}{EAl^3}$$

全桩的压缩量为

$$\Delta l=\int_0^l \varepsilon(y)\mathrm{d}y=\int_0^l \frac{Fy^3}{EAl^3}\mathrm{d}y=\frac{Fl}{4EA}$$

5.（位移“控制”问题）图 2.8 所示结构中，杆 1、杆 2 的拉（压）刚度分别为 E_1A_1 和 E_2A_2，水平杆为刚性杆，受力后仍保持在水平位置。试求：①力 F 的位置 x；②杆 1 与杆 2 的刚度比值（E_1A_1/E_2A_2）与 x 之间的关系式。

解 由刚性杆的静力平衡条件求出杆 1、杆 2 的轴力分别为

$$F_{\mathrm{N1}}=\frac{l-x}{l}F\,,\qquad F_{\mathrm{N2}}=\frac{x}{l}F$$

由拉（压）杆的胡克定律求出杆 1、杆 2 的伸长量分别为

$$\Delta l_1=\frac{F_{\mathrm{N1}}l_1}{E_1A_1}=\frac{Fl_1(l-x)}{E_1A_1l}\,,\qquad \Delta l_2=\frac{F_{\mathrm{N2}}l_2}{E_2A_2}=\frac{Fl_2x}{E_2A_2l}$$

因为刚性杆保持在水平位置，所以变形协调条件为

$$\Delta l_1=\Delta l_2$$

即

$$\frac{Fl_1(l-x)}{E_1A_1l}=\frac{Fl_2x}{E_2A_2l}$$

解得

$$x=\frac{ll_1}{l_1+\dfrac{E_1A_1}{E_2A_2}l_2}$$

或者

$$\frac{E_1A_1}{E_2A_2}=\frac{l_1(l-x)}{l_2x}$$

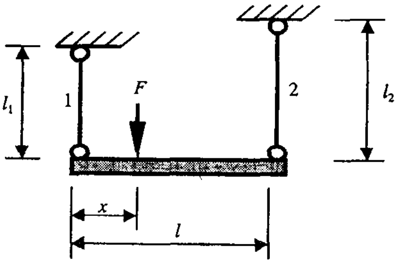
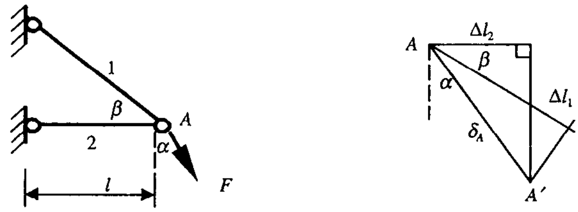


图 2.8

6.（位移“控制”问题）图 2.9（a）所示结构中，杆 1、杆 2 的拉（压）刚度 EA 相同，杆 2 位于水平位置，节点受力后的位移方向与力 F 的方向相同。试求：力 F 与垂线的夹角 α、杆 1 与杆 2 的夹角 β 二者之间的关系式（见图 2.9（b））。

解 由节点 A 的静力平衡条件求出杆 1、杆 2 的轴力分别为



（a）　　（b）

图　2.9

$$F_{N1}=\frac{\cos\alpha}{\sin\beta}F\ ,\qquad F_{N2}=(\sin\alpha-\cos\alpha\cot\beta)F$$

由拉（压）杆的胡克定律求出杆 1、杆 2 的伸长量分别为

$$\Delta l_1=\frac{F_{N1}l_1}{EA}=\frac{Fl\cos\alpha}{EA\sin\beta\cos\beta}\ ,\qquad \Delta l_2=\frac{F_{N2}l_2}{EA}=\frac{Fl(\sin\alpha-\cos\alpha\cot\beta)}{EA}$$

由节点 A 的位移图，可得变形协调条件为

$$\Delta l_2=\frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}\Delta l_1$$

即

$$\frac{Fl(\sin\alpha-\cos\alpha\cot\beta)}{EA}=\frac{Fl\cos\alpha}{EA\sin\beta\cos\beta}\cdot\frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}$$

化简后解得

$$\tan 2\alpha=-\frac{\cos\beta\sin 2\beta}{1+\cos\beta\cos 2\beta}$$

7.（分布参数体系的形状优化问题）图 2.10 所示柱子受柱顶压力 F 和自重的共同作用，已知材料的密度为ρ，许用应力为$[\sigma]$，欲使柱子每一横截面的应力都等于许用应力，试求：横截面面积沿轴线的变化规律。

解　距柱顶 x 处的微段 dx，其顶面面积为 A（x），底面面积为$[A(x)+\mathrm{d}A(x)]$，平衡微分方程为

$$A(x)[\sigma]+\rho gA(x)\mathrm{d}x-[A(x)+\mathrm{d}A(x)][\sigma]=0$$

化简得

$$\frac{\mathrm{d}A(x)}{A(x)}=\frac{\rho g\mathrm{d}x}{[\sigma]}$$

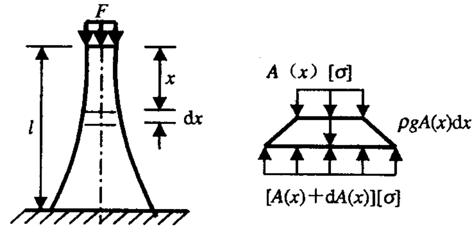


图　2.10

等式两端积分得

$$\int_{A_0}^{A(x)}\frac{\mathrm{d}A(x)}{A(x)}=\int_0^x\frac{\rho g\mathrm{d}x}{[\sigma]}$$

即

$$\ln\frac{A(x)}{A_0}=\frac{\rho g}{[\sigma]}x$$

或者

$$A(x)=A_0\mathrm{e}^{\frac{\rho g}{[\sigma]}x}$$

式中

$$A_0=\frac{F}{[\sigma]}$$