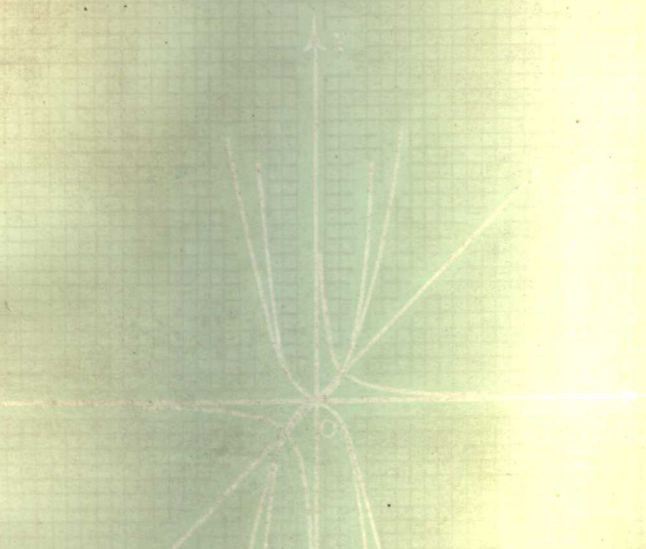


CHUDENGSHUXUE



初等数学

上册·代数

湖南师范学院数学系

湖南人民出版社

初 等 数 学

(上册·代数)

湖南师范学院数学系编

*

湖南人民出版社出版

湖南省新华书店发行

湖南省新华印刷一厂印刷

*

1978年7月第1版第1次印刷

印数: 1—100,000册 印张: 11.625

统一书号: 13109·41 定价: 0.67元

《初等数学》全书分上、中、下三册。上册是初等代数；中册是初等几何；下册是三角、解析几何。

目 录

第一章 有理数 实数

第一节 有理数.....(1)	三、有理数的乘法.....(14)
一、负数的引入.....(1)	四、有理数的除法.....(17)
二、反数、有理数的绝对值.....(4)	五、运算的比较性质.....(21)
第二节 用轴上的点表示数、有理数的大小比较.....(6)	第四节 实数.....(22)
第三节 有理数的运算.....(9)	一、无理数.....(22)
一、有理数的加法.....(10)	二、无理数的近似值.....(25)
二、有理数的减法.....(11)	三、数轴.....(26)
	第五节 数的开方.....(28)
	习题.....(30)

第二章 有 理 式

第一节 有理式的概念.....(33)	第五节 最高公因式与最低公倍式.....(50)
第二节 多项式.....(36)	第六节 有理分式.....(51)
一、多项式的概念.....(36)	一、有理分式的概念.....(51)
二、多项式的运算.....(38)	二、有理分式的加法与减法.....(54)
三、乘法的基本公式.....(41)	三、有理分式的乘法与除法.....(56)
第三节 含一个字母的多项式的带余除法.....(43)	四、有理分式与有理整式(多项式)和分式的关系.....(58)
第四节 因式分解.....(45)	习题.....(59)
一、提公因式法.....(46)	
二、分组分解法.....(46)	
三、利用乘法基本公式分解因式.....(47)	
四、十字交叉相乘法.....(48)	

第三章 根式与无理式

第一节 算术根与根式.....(65)	形.....(69)
第二节 无理式与根式的变	一、无理式.....(69)

二、根式的变形.....(70)	习题.....(77)
第三节 有理化因式.....(75)	

第四章 一次函数与二次函数

第一节 函数概念.....(81)	二、函数 $y = ax^2$ 的图象和性质.....(95)
一、常量与变量.....(81)	三、函数 $y = ax^2 + c$ 的图象.....(98)
二、函数的定义.....(83)	四、函数 $y = a(x-m)^2$ 的图象.....(99)
三、函数关系的表示法.....(87)	五、函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的图象.....(101)
四、函数图象的作法.....(89)	六、二次函数极值的应.....(104)
第二节 一次函数.....(91)	习题.....(106)
一、一次函数.....(91)	
二、一次函数的图象.....(93)	
三、一次函数的均匀性.....(93)	
第三节 二次函数.....(94)	
一、二次函数.....(94)	

第五章 方程和方程组

第一节 方程的概念.....(110)	一、乘方法.....(128)
第二节 一元一次方程和一元二次方程.....(112)	二、引入辅助未知数的方法.....(129)
一、一元一次方程.....(112)	第五节 方程组.....(133)
二、一元二次方程的解法.....(114)	一、二元方程组.....(133)
三、一元二次方程的根的判别式.....(118)	二、二元一次方程组.....(135)
四、一元二次方程的根与其系数的关系.....(121)	三、二元二次方程组.....(140)
五、借助解一元二次方程可解的高次方程.....(124)	四、三元一次方程组.....(147)
第三节 分式方程.....(125)	第六节 关于方程同解与方程组同解的一般理论.....(151)
第四节 无理方程.....(128)	一、方程的同解性.....(151)
	二、方程组的同解性.....(164)
	习题.....(167)

第六章 不等式

第一节 不等式和它的性质.....(184)	一、不等式.....(184)
	二、不等式的性质.....(185)

第二节	不等式的同解性	···(186)
第三节	不等式的解法	···(190)
一、一元不等式	···(190)	
二、二元不等式	···(200)	
第四节	不等式的证明	···(201)
第五节	特殊的极值问题	···(206)
第六节	函数、方程、不等	

式之间的关系	···(210)
一、用函数观点定义方程与不等式	···(210)
二、方程和不等式的图象解法	···(212)
习题	···(217)

第七章 数 列

第一节	数列	···(224)
第二节	等差数列	···(225)
一、等差数列的通项公式	···(226)	
二、等差数列前 n 项和的公式	···(228)	
第三节	等比数列	···(230)

一、等比数列的通项公式	···(231)
二、等比数列前 n 项和的公式	···(232)
三、无穷递缩等比数列	···(234)
四、化循环小数为分数	···(238)
习题	···(240)

第八章 排列、组合和二项式定理

第一节	排列	···(243)
一、两个简单原理	···(243)	
二、全排列	···(244)	
三、选排列	···(246)	
第二节	组合	···(250)

第三节	数学归纳法, 二项式定理	···(254)
一、数学归纳法	···(254)	
二、二项式定理	···(259)	
习题	···(263)	

第九章 指数与对数

第一节	幂的概念的扩张	···(266)
一、零指数幂与负整数指数幂	···(266)	
二、分数指数幂	···(269)	
三、无理指数幂	···(271)	
第二节	对数	···(275)
一、对数的意义	···(275)	

二、对数的运算法则	·····(277)
三、对数的换底	·····(279)
第三节 常用对数与自然对数	·····(280)
一、常用对数	·····(280)
二、自然对数	·····(285)
习题	·····(286)

第十章 幂函数、指数函数与对数函数

第一节 幂函数.....(290)	一、反函数的概念.....(302)
幂函数的图象和性质.....(292)	二、对数函数.....(305)
第二节 指数函数.....(298)	习题.....(306)
第三节 对数函数.....(302)	

第十一章 三角函数与反三角函数

第一节 正弦函数的性质和 图象.....(310)	二、反余弦函数.....(331)
一、正弦函数 $y = \sin x$ 的 性质.....(310)	三、反正切函数、反余切 函数.....(334)
二、正弦函数 $y = \sin x$ 的 图象.....(313)	习题.....(337)
三、函数 $y = A \sin$ $(\omega x + \phi)$(315)	附录一 整数的整除性.....(342)
第二节 余弦函数的性质和 图象.....(321)	一、整除的概念.....(342)
第三节 正切函数, 余切函 数的性质和图象.....(322)	二、带余除法.....(344)
一、正切函数 $y = \tan x$ 的性 质和图象.....(322)	三、最高公因数.....(346)
二、余切函数 $y = \cot x$ 的性 质和图象.....(325)	四、质数.....(350)
第四节 反三角函数.....(326)	附录二 关于实数理论的补 充.....(355)
一、反正弦函数.....(326)	第一节 实数的大小比较.....(355)
	第二节 退缩线段原理.....(356)
	第三节 实数的四则运算.....(360)
	一、加法.....(360)
	二、减法.....(363)
	三、乘法.....(364)
	四、除法.....(365)

第一章 有理数 实数

第一节 有 理 数

一、负数的引入

算术中遇到的数有自然数 1、2、3、……和数 0 以及分数 $\frac{m}{n}$ (m 、 n 都是自然数, m 不被 n 除尽). 这些数统称算术数, 都是人们从现实世界中抽象出来的概念. 为了表示某类物体的个数, 人们创造了自然数. 为了表示没有某种物体, 引进了数 0. 分数的概念也是由于实际的需要而产生的. 如某工程队完成某项工程需要五天时间, 那末平均每天应完成的工作量是整个工程工作量的五分之一. 按这一进度施工, 两天完成整个工作量的五分之二, 三天完成整个工作量的五分之三, ……

实践不仅要求有数, 还要求对数进行计算. 对数进行计算, 正是对具体事物作实在计算的反映. 在计算过程中, 人们还逐渐地发现了计算的某些规律; 例如, 把几个数相加, 计算的结果与按怎样的顺序进行无关. 因此, 在算术中还讲了数 (算术数) 的加法和乘法, 并且这两种运算具有以下的基本性质:

I、加法的交换律:

$$a+b=b+a;$$

II、加法的结合律:

$$(a+b)+c=a+(b+c);$$

Ⅲ、乘法的交换律： $ab = ba$;

Ⅳ、乘法的结合律： $(ab)c = a(bc)$;

Ⅴ、乘法对加法的分配律： $a(b+c) = ab+ac$.

这里 a 、 b 、 c 都代表算术数。除此以外，算术中还讲了数的减法与除法。但应注意的是，在算术中，减法不是对任何两个数都可以施行的，只有在被减数不小于减数时，才能进行减法。例如，我们可以从5减去2，但不能从2减去5。在进行除法时，应注意0不能做除数。

随着人类在实践中对自然界和社会认识的不断深化，人们认识到现实世界中存在着两类具有相反方向的量。例如，今天的气温比昨天升高了 5° ，或者今天的气温比昨天降低了 5° 。在这两种情况下，虽然这两天气温变化的度数都是 5° ，但变化的方向是相反的，反映着完全不同的两回事。如果不加“升高”和“降低”两个字，就反映不出它们之间的差异。这“升高 5° ”与“降低 5° ”就是具有相反方向的两个量。还有，为了说明某一天的气温，我们规定某一一定的温度为 0° ，当温度高于 0° 时，称零上多少度，温度低于 0° 时，称零下多少度。如“零上 40° ”，“零下 40° ”，相对于 0° 来说，它们也是一对具有相反方向的量。还可以从实践中经常遇到的量中举出许多这样的例子。如河水水位上涨和下降的高度，或以某一定水位为标准，高于与低于这一标准水位的水位；物体作直线运动时，向左和向右移动的距离，等等。如果要用数表示出这种具有相反方向的量，单有算术数就不够了。于是就产生了一种新的数——负数。

为了区别具有相反的两个量，人们把其中一个方向（如升

高、零上、上涨、向右等)的量规定为正的量，并用算术数来表示度量它的结果；而把另一个相反方向（如降低、零下、下降、向左等）的量规定为负的量，并引进新数——“负数”来表示度量它的结果。

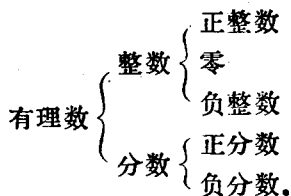
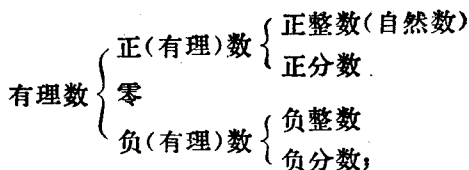
在每一个不为零的算术数的前面放上符号“-”（读做负），
我们把它看作新的数叫做负数。如 -40 ， -400 ， -1.5 ， $-1\frac{1}{2}$ 都是负数。相对地把算术数（零除外）叫做正数。如 40 ， 400 ， 1.5 ， $1\frac{1}{2}$ 都是正数。有时我们也在算术数前面放上符号“+”

（读做正）以表示它是正数。如 40 ， 400 ， 1.5 ，也可以分别写成 $+40$ ， $+400$ ， $+1.5$ 。不过通常写正数时，符号“+”可省略。

零既不是正数，也不是负数。

引入了负数之后，对于具有相反方向的两个量，就可以用正、负数来刻画它们了。例如，气温升高 5° 记作 $+5^{\circ}$ ，降低 5° ，记作 -5° ，零上 40° 记作 $+40^{\circ}$ ，零下 40° 记作 -40° ；水位上涨 2 米记作 $+2$ 米，下降 2 米记作 -2 米，等等。

所有上述的正数、负数和零组成一个新的数的集合，叫做有理数集。有理数集中每一个元素（数）都叫做有理数。其中的正数叫做正有理数；负数叫做负有理数，对于有理数这一概念所包括的所有数，可按下列两种方法分类：



在算术中，我们学习过把分数化为小数。所得的结果，或是有限小数，或是无限循环小数。例如 $\frac{1}{2} = 0.5$, $\frac{2}{3} = 0.666 \dots$ $\dots = 0.\dot{6}$ 。反过来，每一个有限小数或无限循环小数也都可以化为分数，例如： $2.46 = \frac{246}{100}$, $0.\dot{3}2 = \frac{32}{99}$ 。因此，分数与有限小数及无限循环小数是同一种数的不同表现形式。因此，有限小数与无限循环小数都是有理数。

二、反数、有理数的绝对值

正数和负数是现实世界中具有相反方向的量反映入人们的思想而产生的矛盾着的两个概念。对于每一个正数 a ，有唯一的负数 $-a$ 与它对应；反之，每一个负数 $-a$ 也一定有一个正数 a 对应于它。这一对数互相对立着，又因一定条件而互相联系着。例如，在东西方向公路上行驶的汽车，规定向东的方

向为正方向，那末，要分清汽车向东行驶 5 公里和向西行驶 5 公里，就必须用 $+5$ (公里) 和 -5 (公里) 来表示。但如果只考虑汽车走了多少路程，就不论是行驶 $+5$ 公里还是 -5 公里，走过的路程都是 5 公里，只需用一个正数 5 来表示。我们把 $+5$ 与 -5 叫做互反数，而正数 5 叫做它们的绝对值。一般的，我们有：

定义 1 相互对应的正数 a 与负数 $-a$ ，我们称它们是互为反数。数 0 的反数规定为它自身。

例如， -5 是 5 的反数，5 是 -5 的反数。

从定义 1 中看到，正数 a 的反数就是在它前面放上符号“ $-$ ”所表示的负数。对于负数 $-a$ 与数 0，我们也约定在它前面放上符号“ $-$ ”来表示它的反数。这样一来，如果字母 a 表示任一有理数（正数、负数或 0）， $-a$ 都表示 a 的反数，而符号“ $-$ ”又有了新的意义，它起着把一个数改成它的反数的作用。并且我们总有：

$$-(-a) = a.$$

注意：如果 a 表示任意的有理数， $-a$ 不一定表示负数。当 a 是正数时， $-a$ 是负数，当 a 是负数时， $-a$ 是正数，当 a 是零时， $-a$ 也是零。例如， $-(+5) = -5$ ， $-(-5) = 5$ ， $-0 = 0$ 。

定义 2 对任何非零有理数 a ， a 与 $-a$ 中正的那一个叫做 a 的绝对值。因此，正数的绝对值是这个正数本身；负数的绝对值是作为它的反数的那个正数，零的绝对值规定为零。

一个数 a 的绝对值，用符号 $|a|$ 来表示。例如：

$$|+3| = 3, \quad |-3| = -(-3) = 3, \quad |0| = 0.$$

如果 a 表示任意的有理数，那末，

$$|a| = \begin{cases} a & \text{当 } a \text{ 是正数时;} \\ 0 & \text{当 } a \text{ 是零时;} \\ -a & \text{当 } a \text{ 是负数时.} \end{cases}$$

由定义 2，互为反数的两个数有相同的绝对值。

$$|a| = |-a|.$$

第二节 用轴上的点表示数、有理数的大小比较

我们知道，算术数可以比较大小。如果用符号“ $<$ ”表示“小于”（例如 $3 < 5$ ），那么它适合以下的基本规律：

I 三歧律：对于任意两个数 a 与 b ，关系 $a = b$ ， $a < b$ 或 $b < a$ 中，有且只有一种成立；

II 传递律：如果 $a < b$ ， $b < c$ ，那末， $a < c$ 。

有理数也可以比较大小。为了更直观的说明这种关系，先用轴上的点来表示有理数。

取一条直线，选定它的一个方向（如下图 1—1，通常选定由左向右的方向）作为正方向，用箭头表示出来。（相应地把另一方向叫做负方向）这样选定了正方向的直线叫做轴。在轴上取定一点 O 叫做原点，再取一条适当的线段 E 作为长度单位。

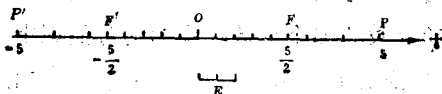


图 1—1

按照下面规定的度量方法,把有理数用轴上的点表示出来.

对于每一个正整数 P ,从 O 点出发,用线段 E 向右连续截取 P 次,得线段 OP ,规定数 P 对应于端点 P . 而 OP 的长度就是 P . 例如, $P=5$, 那末,用线段 E 从 O 向右连续截取 5 次,得点 P (图 1—1), OP 的长度是 5,而数 5 对应于点 P . 对于负整数 $-P$,就从 O 点出发用 E 向左截取 P 次,得点 P' ,规定数 $-P$ 对应于点 P' . OP' 的长度也是 P ,但方向是负的. 对于每一个正分数 $\frac{m}{n}$ ($n>1$), 先将 E 分为 n 等分,取一等分作度量单位从 O 向右截取 m 次,得线段 OF ,规定数 $\frac{m}{n}$ 对应于点 F . 数 $\frac{m}{n}$ 就是 OF 的长度. 例如, 图 1—1, 分数 $\frac{5}{2}$ 就对应于点 F . 对于负分数 $-\frac{m}{n}$,与上面一样,只改变度量方向,得点 F' . 规定 $-\frac{m}{n}$ 对应于点 F' , OF' 的长度也是 $\frac{m}{n}$.

对于数 0, 就规定它对应于原点 O .

这样一来,对于每一个有理数 a ,都对应于轴上的唯一点 A . a 的绝对值就是线段 OA 的长度 (点 A 到原点 O 的距离.) (见图 1—2) 并且:

1° 对于每一对互反数 a 与 $-a$ (a 是正数), 轴上的相应点 A 与 A' 是关于原点对称 (即到原点距离相等) 的两点.

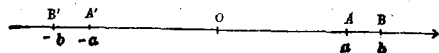


图 1—2

2° 设 a, b 是两个正数, 且 $a < b$. 那末它们的相应点 B 在点 A 的右边, 而与 $-a$ 相应的点 A' 在与 $-b$ 相应的点 B' 的右边. 如果我们对轴上的点也规定在右边的点大于左边的点, 那末, 对算术数来说, 数的大小关系与其相应点的大小关系是一致的.

这启示我们规定有理数的大小关系如下:

1) 两个非负有理数 (即算术数) 的“相等”、“小于”和“大于”关系采取算术里的规定;

2) 每一个负数都小于 0 和每一个正数. 即

$$0 - a <, -a < b, (a, b \text{ 都表示正数}).$$

如果还用符号 “ $>$ ” (大于) 的话, 相应的: 正数和零都大于负数:

$$0 > -a, b > -a (a, b \text{ 都表示正数}).$$

3) 对于两个负数 $-a, -b$ (a, b 都是正数) 规定, 绝对值相等时, 两数相等; 绝对值不相等时, 绝对值较大的那个数较小, 绝对值较小的那个数较大. 即

$$a = b \text{ 时}, -a = -b,$$

$$a > b \text{ 时}, -b > -a,$$

$$b < a \text{ 时}, -a < -b.$$

不难检验, 有理数的大小关系仍适合下面的规律:

I 三歧律: 对任何两个有理数 a 与 b , 关系 $a = b, a < b$ 或 $b < a$ 中, 有且只有一种成立;

II 传递律: 如果 $a < b, b < c$, 那末, $a < c$.

这样规定有理数的大小关系以后, 零这个数又有了新的意义, 因为一切负数都小于零, 一切正数都大于零, 所以零是所

有负数和正数的分界点。它刻划着“物质的十分确定的状态。”例如，我们说某一天的气温是 0°C ，这并不是说这一天没有温度，而是说这一天的气温处于一个大气压下，水由液态转化为固态的临界温度。

第三节 有理数的运算

§1 中说过，对数进行计算，正是对具体事物作实在计算的反映。有理数概念是在算术数的基础上为了解决具有相反方向的量这一矛盾而产生的。因此，有理数的运算法则，必然与算术数的运算法则有某些类似之处，但又因这一矛盾的特殊本质而取特殊的运动形式，不能抽象地、形而上学地用对于算术数的运算法则的解释来解释有理数的运算法则。下面我们根据实践中经常遇到的一些具体事例所揭示的规律来建立有理数的运算法则。

一、有理数的加法

考察某粮仓收存和支付稻谷的情况。规定收进的稻谷用正数表示，支出的稻谷用负数表示。

1° 某天上午收进稻谷5千斤，下午又收进3千斤。合计这一天共收进稻谷8千斤。用正、负数列成算式，就是：

$$(+5) + (+3) = +8.$$

2° 某天上午收进稻谷8千斤，下午支出3千斤。合计这一天收进稻谷5千斤。用正、负数列成算式，就是：

$$(+8) + (-3) = +5.$$

3° 某天上午付出稻谷8千斤，下午收进了3千斤，合计这一天付出稻谷5千斤，列成算式：

$$(-8) + (+3) = -5.$$

4° 某天上午付出稻谷5千斤，下午又付出3千斤。合计这一天付出稻谷8千斤，列成算式：

$$(-5) + (-3) = -8.$$

概括上面例子所揭示的规律，规定有理数的加法法则：

1. 正有理数与零（即算术数）的加法法则仍按算术中的规定；

2. 两个负数相加，和还是一个负数，它的绝对值等于两相加数的绝对值之和；

$$(-a) + (-b) = -(a+b), \quad (a, b \text{ 表示正数});$$

3. 符号相反的两个数相加，和的绝对值等于两相加数绝对值的差，符号与绝对值较大的那个相加数相同；互反两数的和等于零；

$$a + (-b) = (-b) + a = \begin{cases} a-b & (\text{若 } a > b), \\ -(b-a) & (\text{若 } b > a), \\ 0 & (\text{若 } a = b). \end{cases}$$

4. 任一有理数与零相加，和还是这个有理数；

$$a + 0 = a, \quad (-a) + 0 = -a, \quad 0 + 0 = 0.$$

根据上面的规定，可以证明有理数的加法适合结合律与交换律。

I 交换律： $a + b = b + a,$