数学奥林匹克竞赛36计

王志雄　著

電子工業出版社

数学奥林匹克竞赛36计

王志雄　著

電子工業出版社

（京）新登字055号

内 容 简 介

本书通过大量精心选编、富有新意的例题，介绍了数学竞赛中经常涉及到的36种解题方法：配对法、枚举法、图解法、定常法、量化法、调整法、极端法、辅线法、对称法、构造法、进制法、放缩法、特试法、复数法、分析法、反证法、参数法、归纳法、强化法、面积法、递推法、抽屉法、双计法、物理法、变换法、定义法、分类法、反主法、题养法、多解法、析因法、增减法、居高法、同一法、容斥法、反演法等。实际上，这些方法也是初等数学研究中常用的36种方法。

读者可以从中学到许多重要的解题技巧、方法，提高自己的解题能力、研究水平。

本书对广大的数学竞赛参加者、数学竞赛教练员以及一般的数学教师和广大数学爱好者都有很大的参考价值。

数学奥林匹克竞赛36计

王志雄 著

责任编辑：竞 力

电子工业出版社出版（北京市万寿路）

电子工业出版社发行 各地新华书店经售

山东电子工业印刷厂印刷

开本850×1168毫米 1/32 印张：15 字数：376千字

1993年12月第1版 1993年12月第1次印刷

印数：4000册 定价：14.00元

ISBN7-5053-2133-1/G·172

作 者 简 介

王志雄，1945年8月生于福建省泉州市。1963年获福建省首届中学生数学竞赛第一名，同年考入北京大学数学力学系。当十年中学教师后，到厦门大学数学系攻读研究生，1981年毕业获硕学学位。现任华侨大学数学系副教授，中国数学奥林匹克高级教练。迄今为止，已在国内外发表学术论文廿余篇，著、译书四本。

前　　言

数学知识、数学问题与数学方法，既有所区别，又是血肉一体的。任何一本数学书都不能不把这三者兼而有之，但也不能不各有所侧重。

绝大多数的数学书以介绍数学王国中丰富的、有趣的，或是基本、或是深奥的，或是通俗、或是专门的知识为主。这不足为奇。数学知识是数学的躯干、主体。

著名数学家哈尔莫斯(Halmos)说过："问题是数学的心脏"。数学正是在解决形形色色的问题之过程中丰富与发展起来的。正如希尔伯特(Hilbert)所说："一个科学分支只要能提出足够的问题，它就充满生机。缺乏问题则是灭绝或停止独立发展的先兆。"

但是，解决问题需要一定的方法。惠特霍斯（Whitworth）认为："一般地，解题之成功，在很大的程度上依赖于选择一种最适宜的方法。比如，圆锥截面的许多性质，用纯几何方法，只要很少几步就能证明；若用三线坐标法，就要涉及到繁杂的演算。而另一些性质，用三线坐标法几乎是不证自明的；但是，用纯几何方法，却似乎无法证明。"

若瓦利斯(Novalis)则更进一步说到："数学方法是数学之精髓。只有完全领悟数学方法的人才算是一个数学家。"

笛卡尔(Descartes)发现坐标法，开创了数学的一个新分支——解析几何学。复数法不仅奠定了复变函数论的基础，而且，方法渗透到力学、电学等应用学科。

随着数学奥林匹克运动的发展，每年潮涌而来的数学竞赛题、训练题数以万计。

做为一名准备参加各级竞赛的选手，这些问题提供了练习的便利条件。但是，另一方面，面临着这些几欲泛滥的问题，我们不仅要问：我们需要这么多的“心脏”吗？

当然不需要！更准确地说，我们与其把问题视为数学的心脏，不如视为“健身器械”。为了健身，任何人都不需要玩遍一切健身器械。

而且，数学竞赛的知识完全限于初等数学，不超越现行的中学数学大纲。因此，解题技能技巧与解题方法的研究，对于提高数学竞赛的教练效果显得特别必要。它可使我们不致望问题之汪洋大海而兴叹。对于准备各级竞赛的选手也是十分重要的。它可使我们不致淹没于这题海之中。

相对于问题似欲爆炸、题型不断更新，方法是较少也较稳定的。如能较深入地、熟练地、灵活地掌握一些重要的解题方法，将使我们如乘快艇，得以优游于题海之上，达到数学王国之彼岸。

现行专门介绍数学方法的书，显得凤毛麟角，这不能不说是一件缺憾。

笔者根据多年参加数学竞赛培训、命题及学术研究积累的大量资料，总结了数学竞赛中常用的36种方法。为阐释这些方法，作者特别设计、改造与编写了大量的例题，撰成此书，以飨读者。

数学方法有其内在联系。归为某一章的某一个问题，往往也用到或可用其他章谈到的方法。但是，为便于阅读起见，我们既点明其内在联系，又尽量使各章有相对的独立性。读者可以根据自己的需要，只选读或先读某一些章节。

数学方法有其同一性。大多数方法既能用以解决很初等的问题，也能用以解决很高深的问题。因此，本书的每一章节，都有一些内容是十分浅显简单的，也有一些是难度相当大的。读者可以根据自己的目的、层次与水平，只选读或先读某一章节的一部

分，暂时略去另一部分留待以后继续学习。

为引证、查阅方便，全书的例题统一编号。例$x.y$表示第x章的第y个例。公式则各章独立编号。

在编写本书的过程中，中国林业科学院副研究员张淑娟女士拨忙校阅部分手稿，并提出宝贵的修改意见。

吾妻李秀玉女士为使笔者得以专心撰稿，独担几乎全部家务的辛苦劳作。为减少书稿之舛误，免贻笑万家，提出不少文字加工意见。

书内书外均幸得诸位帮助，谨此一志，以表谢意。

限于作者之学识，对书中任何不妥、不足之处，恳请读者赐正。

王志雄　谨识

目　录

一、相得益彰——配对法

据说，德国数学家高斯(Gauss)年仅八岁，还在上小学的时候，他的老师出了一道这样的题目："求$1+2+3+\cdots\cdots+99+100$的和"。别的小学生随即"老老实实"地埋头依序相加，而高斯却坐在那儿一动不动地。老师问他："为什么不做题？"他说："我已做完了。"

"答案是多少？"

"5050。"

"你怎么做出来的？"老师感到惊讶。

"1与100，2与99……每对的和都是101，共有50对，因此，总和是101乘以50得5050。"

像高斯那样，善于使用配对技巧，常常能使一些表面上看来很麻烦，甚至很棘手的问题，迎刃而解。"天子之与后，犹日之与月，阴之与阳，相须而后成者也。"(《礼记》)，"人皆为梅幸，遇此知己友。相得乃益彰，压倒众芳薮。"(清，赵翼)数学中，存在许多相须而后成，相得乃益彰的对子。关键在于我们要善于发现并利用这种对子。

【例1.1】 求$0.125\times\frac{1}{27}\times25\times0.05\times24\times0.12\times600$的积。

【解】 首先分解24，0.12，600及$\frac{1}{27}$成积的形式：$24=8\times3$，$0.12=0.04\times3$，$600=200\times3$，$\frac{1}{27}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}$，又因$0.125\times8=1$，$25\times0.04=1$，$0.05\times200=10$，利用乘法交换律，立即得到所求的积为10。

【例1.2】 求1，2，3，……，9999998，9999999所有数

码的和。（比如：79，80，81的数码和是 $7+9+8+0+8+1=33$。）

【解】 因为0与9999999，1与9999998，……，4999999与5000000各对的数码和都是$9\times 7=63$。这儿共有5000000对，故所有数码的和是$63\times 5000000=315000000$。

上述两道例题，若不用配对法，多花点儿时间，迟早总能算出精确的结果来。但有些问题，就不是这么简单了，配对法似乎是解决它们的唯一方法。

【例1.3】 求方程$8x^{14}-7x^{12}+6x^{10}-5x^{8}+4x^{6}-3x^{4}+2x^{2}-1=4|x|$的所有实数根之和。

【解】 显然，已知方程确有实数根，比如$x=1$和$x=-1$都是给定方程的实数根。而且，若$x=x_0$是这个方程的一个实根，则$x=-x_0$也是它的一个实根；当$x_0\neq 0$时，这两个根是不同的，即原方程的所有非零实根可以两个两个地配成对，每一对的两个数是互为相反数，因此，已知方程的所有实数根之和为零。

【例1.4】 设$f(x)=1/[1+(\mathrm{tg}x)^{\sqrt{3}}]$，求$f(\pi/180)+f(2\pi/180)+\cdots+f(89\pi/180)$的和。

【解】 当$0<x<\pi/2$时，

$$f(x)+f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\frac{1}{1+(\mathrm{tg}x)^{\sqrt{3}}}+\frac{1}{1+\left[\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right]^{\sqrt{3}}}$$

$$=\frac{1}{1+(\mathrm{tg}x)^{\sqrt{3}}}+\frac{(\mathrm{tg}x)^{\sqrt{3}}}{(\mathrm{tg}x)^{\sqrt{3}}+1}=1$$

因此，原和式除$f(45\pi/180)=f(\pi/4)=1/2$外，其余88项可两两配成对，每对的两项之和是1，故所求之和是$44\frac{1}{2}$。

【例1.5】 设p和q是互素的正整数，求$[p/q]+[2p/q]+\cdots+[(q-1)p/q]$之和，其中，$[x]$表示不超过$x$的最大整数。

【解】 设$ip/q=[ip/q]+r_i(1\leqslant i\leqslant q-1)$。由于$p$和$q$互素，故$r_i\neq 0$。由符号$[x]$之定义，得$0<r_i<1$。又因

$$r_i+r_{q-i}=\frac{ip}{q}-\left[\frac{ip}{q}\right]+\frac{(q-i)p}{q}-\left[\frac{(q-i)p}{q}\right]$$

$$=p-\left[\frac{ip}{q}\right]-\left[\frac{(q-i)p}{q}\right]$$

是整数，但$0<r_i+r_{q-i}<2$，故$r_i+r_{q-i}=1$，即$[ip/q]+[(q-i)p/q]=ip/q-r_i+(q-i)p/q-r_{q-i}=p-1$。

（Ⅰ） 当q是奇数时，给定和式的$(q-1)$项可两两地配成$(q-1)/2$对，每对的两项和是$(p-1)$，故所求的和是$(p-1)(q-1)/2$。

（Ⅱ） 当q是偶数时，因p和q互素，故p必是奇数，则除$\left[\frac{q}{2}\cdot p/q\right]=[p/2]=(p-1)/2$外的其余$(q-2)$项可两两地配成$(q-2)/2$对，每对的两项和是$(p-1)$，故所求的和是$(p-1)(q-2)/2+(p-1)/2=(p-1)(q-1)/2$。

以上的例子都是借助数与数的配对简化运算。实际上，能够配对的对象远不止于此。

根据以下的法则，可利用配对法计算集合的元素个数：**如果集合A的元素与另一个集合B的元素能够建立一一对应关系，也就是说，对每个元素$a\in A$，依某一对应规律f，存在唯一元素$f(a)\in B$；且对每个元素$b\in B$，有唯一的元素$a\in A$，使得$f(a)=b$，则集合A和B有相同的元素个数。**

【例1.6】 从1，2，……，n中取k数a_1，a_2，……，a_k，使这k个数中，任两个不同数的差绝对值不小于t（t为给定的正整数）。求选取的方法数$f(n, k, t)$。

【解】 不妨设$1\leqslant a_1<a_2<\cdots\cdots<a_k\leqslant n$。令

$$b_i=a_i-(i-1)(t-1),\ (1\leqslant i\leqslant k) \quad (1)$$

则当$1\leqslant i\leqslant k-1$时，$b_{i+1}-b_i=a_{i+1}-a_i-(t-1)\geqslant 1$，$b_k\leqslant n-$

$(k-1)(t-1)$，$b_1\geqslant 1$。从而，合本题要求的每一种选取方法，对应着从1，2，…，$n-(k-1)(t-1)$中取k个不同正整数b_1，b_2，……，b_k的一种选取法，且在对应关系(1)下，这两类选取法是一一对应的。显然，后一种选取的方法数是$C^k_{n-(k-1)(t-1)}$，此即所求的选取方法数$f(n, k, t)$。

【例1.7】 设正整数p和q互素。问：有多少非负整数n不能表示成$px+qy$(x和y是非负整数)的形式？

【解】 首先，不限定n的非负性。在n，$n-p$，……，$n-(q-1)p$这q个数中，任两个不同数之差是ip($|i|=1, 2, \cdots, q-1$)。因p和q互素，故差ip不能被q整除，即这q个数被q除，余数两两不同。从而，恰有一个数能被q整除，即$px+qy=n$恰有一组整数解(x, y)使$0\leqslant x\leqslant q-1$。

令n与数组(x, y)依上述规律对应($0\leqslant x\leqslant q-1$)，与$y\geqslant 0$的数组$(x, y)$对应的整数$n$称为“好的”；否则，称为“坏的”。

若n与(x, y)对应，即$n=px+qy(0\leqslant x\leqslant q-1)$，则$pq-p-q-n=p(q-1-x)+q(-y-1)$，故$pq-p-q-n$与数组$(q-1-x, -y-1)$对应。$y$和$-y-1$中恰有一个是非负的，即$n$和$pq-p-q-n$中恰有一个是“好的”，故0，1，2，…，$pq-p-q$中的“好数”与“坏数”一一配对。从而，其中的“坏数”恰有$(pq-p-q+1)/2=(p-1)(q-1)/2$个。

显然，若$n<0$，则n是“坏数”，故大于$pq-p-q$的数均为“好数”。由此得：“坏的”，即不能表为$px+qy$(x，y是非负整数)的非负整数n有$(p-1)(q-1)/2$个。

【例1.8】 求方程$x_1+x_2+\cdots+x_k=n$的正整数解$(x_1, x_2, \cdots, x_k)$的数目。

【解】 给定方程的一组解$(x_1, x_2, \cdots, x_k)$如下对应着集合$\{1, 2, \cdots, n-1\}$中的$(k-1)$个不同的元素y_1，y_2，…，y_{k-1}：

$$y_1=x_1,\ y_2=x_1+x_2,\ \cdots\cdots,\ y_{k-1}=x_1+x_2+\cdots+x_{k-1} \qquad (2)$$

反之，对于集合$\{1, 2, \cdots\cdots, n-1\}$中的$(k-1)$个不同的元素$y_1, y_2, \cdots\cdots, y_{k-1}$，不妨设$1 \leqslant y_1 < y_2 < \cdots\cdots < y_{k-1} \leqslant n-1$，由式(2)，得

$$x_1 = y_1,\ x_2 = y_2 - y_1,\ \cdots\cdots,\ x_{k-1} = y_{k-1} - y_{k-2},$$

令$x_k = n - y_{k-1}$，则$(x_1, x_2, \cdots\cdots, x_k)$是原方程之一组正整数解。故原方程的解与从$\{1, 2, \cdots\cdots, n-1\}$取$(k-1)$个不同元素的选取方法一一对应。因后者之选取方法数是C_{n-1}^{k-1}，故原方程有C_{n-1}^{k-1}组正整数解。

既然可以用配对法计数，自然地，也可以用配对法证明恒等式。

【例1.9】 设a，b，c是复数，且$|a| = |b| = |c| = r \neq 0$，$a+b+c \neq 0$，求证：$|(ab+bc+ca)/(a+b+c)| = r$。

【证】 利用互为共轭数配对：

$$ab = abc \cdot \frac{1}{c} = abc \cdot \frac{\overline{c}}{c \cdot \overline{c}} = \frac{abc}{r^2}\overline{c},$$

同理，$bc = \frac{abc}{r^2}\overline{a}$，$ca = \frac{abc}{r^2}\overline{b}$，故$|ab+bc+ca| = \left|\frac{abc}{r^2}(\overline{a}+\overline{b}+\overline{c})\right| = \frac{|abc|}{r^2}|\overline{a}+\overline{b}+\overline{c}| = r|a+b+c|$，得所欲证。

【例1.10】 设A_n是用1×2的多米诺骨牌覆盖$2\times n$棋盘的方法数，B_n是把n表示成和式，和式的每一项是1或2的方法数（项序不同的两个式子视为是不同的）。求证：$A_n = B_n$。

【证】 首先证明：骨牌如果是平放，不能如图1那样错开。否则，棋盘中处于A和B之间的未覆盖部分有奇数格，无论如何不能被完整的若干块多米诺骨牌覆盖。

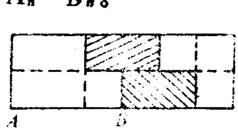

图 1

若把竖放的一块骨牌对应数1，横放的两头对齐的两块骨牌

对应数 2，则每一种覆盖法对应着一个由 1，2 组成的数列a_1，a_2，…，a_k且$a_1+a_2+\cdots\cdots+a_k=n$。上述对应显然是一一的，因此，$A_n=B_n$。

【例1.11】 某团体中，任两个相识的人没有公共的熟人，任两个不相识的人恰有两个公共的熟人。求证：这个团体中每个人认识的人数相等。

【证】 设x和y是这团体中相识的两个人，与x，y相识的人组成的集合分别记为N_x，N_y。因为任两个相识的人没有公共的熟人，故N_x和N_y不交，从而，对任何$z\in N_x$，y和z不相识，但他们都与x相识，故恰还有一个公共熟人，即N_y中恰有一人u与z相识。反之，对任何$u\in N_y$，N_x中恰有一人z与u相识，即N_x和N_y的人可以建立一一对应，由此得x和y认识的人数相同。

若x和y不相识，则他们必有公共的熟人z。由上面的证明，x和z，y和z认识的人数分别相同，故x和y认识的人数也相同。

【例1.12】 考虑正整数n的两种表示方法：

（Ⅰ） n表示成若干个 1 与 2 之和。

（Ⅱ） n表示成大于 1 的正整数之和。

即使仅项序不同的表示方法也认为是不同的。两种表示方法数分别记为$A(n)$和$B(n)$。求证：$A(n)=B(n+2)$。

【证】 正整数n的一个第一种表示$n=a_1+a_2+\cdots\cdots+a_k$（$a_1$，$a_2$，…，$a_k=1$或2）依下述规律对应着$n+2$的一个第二种表示$n+2=b_1+b_2+\cdots\cdots+b_t$。

（1）若所有的$a_i=1$，取$t=1$，$b_1=n+2$。

（2）若第一种表示存在取值2的项$_i$，它们是a_{i_1}，……，$a_{i_p}(1\leqslant i_1<\cdots<i_p\leqslant k)$。令$b_1=a_1+\cdots\cdots+a_{i_1}$，$b_2=a_{i_1+1}+\cdots+a_{i_2}$，……，$b_p=a_{i_{p-1}+1}+\cdots+a_{i_p}$，$b_{p+1}=a_{i_p+1}+\cdots+a_k+2$，$t=p+1$。

上面建立的两种表示方法的对应关系是一一的，故得$A(n)=B(n+2)$。

如果对应关系不一定是一一的，当然无法保证相应两个集合的元素个数相同。但是，在一定条件下，可以导出不等关系，并从而证明与存在性有关的结论。其依据是：

集合A的每个元素对应着集合B的一个元素。若A中的不同元素对应着B的不同元素，则A的元素个数不超过B的元素个数；若B的元素个数超过A的元素个数，则必存在$b\in B$，它不与A中任何元素对应。

【例1.13】 设$M=\{1, 2, \cdots\cdots 2n\}$，$n>1$，$M$中任一个$(n-1)$元子集$S$，赋予$M$中的某一个数值$f(S)$。求证：存在$M$的$n$元子集$T$，使得对任何$k\in T$，$f(T-\{k\})\neq k$。

【证】 对M的任一个$(n-1)$元子集S，若$f(S)\overline{\in} S$，令S与n元子集$S\cup\{f(S)\}$对应。因M有C_{2n}^{n-1}个$(n-1)$元子集，故使$f(S)\overline{\in} S$的$(n-1)$元子集至多只有C_{2n}^{n-1}个，但M有$C_{2n}^{n}=\dfrac{n+1}{n}C_{2n}^{n-1}>C_{2n}^{n-1}$个$n$元子集，故$M$中必有$n$元子集$T$，不与任何使$f(S)\overline{\in} S$的$(n-1)$元子集$S$对应。这时，对任何$k\in T$，记$S=T-\{k\}$，则$f(S)\neq k$，否则，$f(S)=k\overline{\in} S$，而$S\cup\{f(S)\}=T$，则$T$与$S$对应，与$T$的取法矛盾。

【例1.14】 设X是n元集，X的三元子集组成的类$\{A_1, A_2, \cdots\cdots, A_m\}$有性质：任两个不同的三元子集$A_i$和$A_j$至多只有一个公共元素。求证：$X$中至少有$k\geqslant[\sqrt{2n}]$个元素$x_1, \cdots\cdots, x_k$，使得任一子集$A_i$，均非集合$\{x_1, \cdots\cdots, x_k\}$的子集。这儿，$[\sqrt{2n}]$表示不超过$\sqrt{2n}$的最大整数。

【证】 设$B=\{x_1, \cdots\cdots, x_k\}$是使得任一子集$A_i$不含在$B$中的有最多个元素的一个子集。因为，任取$X$的两个元素组成子集，任一$A_i$不含在此子集中，由极端原理(见第七章)，$B$之存在性是显然的。

令$X-B=\{y_1, \cdots\cdots, y_{n-k}\}$。由$B$之最大性，对每个$y_j$，存

在子集A_i，使A_i含在$B\cup\{y_j\}$中。但因A_i不含在B中，故有B之元素对x_{j1}，x_{j2}，使$A_i=\{x_{j1}, x_{j2}, y_j\}$。也就是说，每个$y_j\in X-B$，有$B$的二元子集$\{x_{j1}, x_{j2}\}$与之对应。

因为任两个不同的子集A_i，A_j至多只有一个公共元素，故对不同的元素y_i，y_j，对应的二元子集也不同。B有C_k^2个不同的二元子集，故$n-k\leqslant C_k^2=k(k-1)/2$，从而，$k\geqslant(\sqrt{8n+1}-1)/2$。

设$[\sqrt{2n}]=t$，即$t\leqslant\sqrt{2n}<t+1$，$t^2\leqslant 2n<t^2+2t+1$。因n，t均为整数，故存在整数r使$2n=t^2+r(0\leqslant r\leqslant 2t)$。这时

$$2t\leqslant 2\sqrt{2n}<\sqrt{8n+1}=\sqrt{4r^2+4r+1}<2t+2$$

$$t-\frac{1}{2}<\frac{\sqrt{8n+1}-1}{2}<t+\frac{1}{2}$$

故$[(\sqrt{8n+1}-1)/2]=t$。由整数$k\geqslant(\sqrt{8n+1}-1)/2$ 得 $k\geqslant t=[\sqrt{2n}]$，证毕。

从例1.6至例1.14可以看出，配对方式多种多样：组合选取与组合选取配对(例1.6)，方程解与组合选取配对(例1.8)，共轭复数配对(例1.9)，覆盖方式与和式配对(例1.10)，和式与和式配对(例1.12)，集合与集合配对(例1.13)，元素与子集配对(例1.14)。利用配对法解决的问题也不拘一格：计数，证明恒等式，证明存在性与界的估计等。

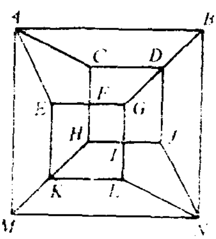

图 2

配对法做为一种重要的解题技巧方法，在解题实践中体现出来的方式，远比我们所能想像的要丰富得多。再看下面的例子。

【例1.15】 某地区有14个城镇（如图2所示的点A，B，……，M，N），有些城市之间有公路直接连接(如图2，A和B，A和C……有公路直接连接；但A和D，A和F之间没有公路直接连接)。求证：无论如何，无法从某一个城镇出发，沿公