普通高等教育"十五"国家级规划教材

数学教育系列教材

总主编：张奠宙　宋乃庆

中学代数研究

张奠宙　张广祥　主编

高等教育出版社

中学代数研究

普通高等教育“十五”国家级规划教材
数学教育系列教材
总主编:张奠宙　宋乃庆

中学代数研究

张奠宙　张广祥　主编

高等教育出版社

内容提要

本书是“数学教育系列教材”(普通高等教育“十五”国家级规划教材)之一,是关于中学代数内容及其教学理论与实践的概述,包括数与数系,式、代数式与不等式,方程,函数,数列,算法以及中学代数问题精选等内容。

本教材对中学代数内容用较高的数学观点进行了分析,提出了一些具有针对性的教学建议,并精选了一些典型的例题。在编写思想上力求在注意形式化的同时,加强代数知识的直观理解。

本书由来自全国十余所高等师范院校的专家、学者共同完成,其读者对象是高等师范院校的数学系学生以及有志于从事数学教育的大学生,也十分适合作为中小学教师培训和继续教育用书。

图书在版编目(CIP)数据

中学代数研究/张奠宙,张广祥主编.—北京:高等教育出版社,2006.1

(数学教育系列教材/张奠宙,宋乃庆总主编)

普通高等教育“十五”国家级规划教材

ISBN 7-04-017761-7

Ⅰ.中… Ⅱ.①张…②张… Ⅲ.中学-代数课-教学研究-师范大学-教材 Ⅳ.G633.622

中国版本图书馆CIP数据核字(2005)第148419号

出版发行	高等教育出版社	**购书热线**	010-58581118
社　　址	北京市西城区德外大街4号	**免费咨询**	800-810-0598
邮政编码	100011	**网　　址**	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
经　　销	蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
印　　刷	北京印刷一厂	**畅想教育**	http://www.widedu.com
开　　本	787×960　1/16	**版　　次**	2006年1月第1版
印　　张	16	**印　　次**	2006年1月第1次印刷
字　　数	280 000	**定　　价**	18.70元

物料号　17761-00

“数学教育系列教材”编辑委员会名单

本书主要作者

张奠宙　张广祥　贾丕珠　熊惠民　濮安山　龙开奋

参加本书编写工作的还有

刘永生　蔺　云　蒋　亮　张　森

序　言

常言说，教师要给学生一杯水，自己先要有一桶水。高等师范院校设置的大量数学课程，就是这样的一桶水。本书是这桶水的一部分，一个中学数学教师最直接使用的一部分。

本书定名为《中学代数研究》。早些年，通用的名称是《初等代数研究》。我们觉得这个名字不甚确切，请看大百科全书对"初等代数学"的界定：

"初等代数学，研究数字和文字的代数运算（加法、减法、乘法、除法、乘方、开方）的理论和方法；更确切点说，研究实数和复数和以它们为系数的多项式的代数运算的理论和方法。它的研究方法是高度计算性的。它的中心问题是实或复系数的多项式方程（或称代数方程）和方程组的解（包括解的公式和数值解）的求法及其分布的研究，因此它也可简称方程论。"（见《中国大百科全书（数学卷）》，第 111 页。）

回顾我国 1949 年以前的中学数学课程，中学里设置的代数课程，其核心内容就是上述意义的"初等代数"。简单地说，中学里的代数学"以方程为纲"。翻开译自美国数学家 Fine 所著的《范氏大代数》，最高水平的内容是"高次方程式论"。进入 20 世纪 50 年代，中国的数学教学全面学习前苏联，中学数学课程改为"以函数为纲"。方程的教学要求随之降低：只学习一元二次方程的求解，高次方程式论全部删去。经过半个世纪的教学实践，逐步形成了中国传统的"中学代数"体系，主要内容有：数和数系，方程，函数，不等式，数列。这显然超出了上述的"初等代数"的含义。进入 21 世纪之后，中学代数的内容又有了变化。2002 年公布的《高中数学课程标准（实验稿）》，必修课部分新增加了"算法"，选修课中的代数内容则更加广泛。由此看来，"中学代数"不同于"初等代数"，中学代数是一个不断发展变化的学科。正因为如此，我们将本书定名为《中学代数研究》。

那么，我们将怎样对中学代数进行研究呢？

德国大数学家 F·克莱因的著作《高观点下的初等数学》①是这种研究的经典之作。前苏联数学家 A·亚历山大洛夫等编写的《数学：它的内容意义和方

① 有中译本。吴大任等译，湖北教育出版社，1988。

法》对中学代数学的内容也有很好的阐述。20世纪以来,希尔伯特的形式主义数学哲学盛行。第二次世界大战之后,布尔巴基学派的结构主义观念影响着中学数学。于是在欧美①和前苏联②都有一批着重公理化、形式化的中学代数研究的著作出版。国内在借鉴之后,也陆续出版了类似的著作。它们的一个主要目的都是将中学里"不严格的内容"加以严格化。过度形式化的倾向,使得"中学代数"看上去干瘪和晦涩。1990年代以来,在中学数学教材教法课程中,也有一些按内容分别叙述的教学研究教材(俗称《分论》)。以上的教材,我们都留意到了,并从中吸取精华,丰富本书。

经过思考,我们采取了以下的写作思路:

首先,仍以中学代数的主要内容,依次设章叙述。分为数系、式与不等式、方程、函数、数列、算法六个部分。排列组合这里未能涉及,将归到本丛书的《中学微积分与概率研究》一书中。

其次是每章的写法。我们的想法是,先用较高的数学观点加以分析,加深对相关内容的本质理解,然后提出一些教学上的建议,对相关内容的教学处理进行一些辨析,特别是针对教材、教学中的问题进行探讨;此外,还讨论一些比较特别的解题方法。最后一章精选了一些中学试题作为练习,难度相当于历年高考试题中最后的几题,其目的是帮助学生复习和提高中学数学的常规解题能力。希望能为读者到中学施教之前做一些准备。

最后,我们尽可能体现信息时代的要求,对以往的教材增加了一些新的部分。例如,新增算法一章,补充我国"居民身份证的检验码"等数字化内容;注重数学知识的历史发展,体现人文价值;增加数学建模、数学应用方面的阐述。这些都是以前"初等代数研究"所未涉及的方面。最后一章,我们收集了一些综合性问题,希望读者能够接触一些比较难的中学数学问题,并进行一些评论。

这里,我们想着重阐述"中学代数教学"的一个基本原则:在注意形式化的同时,加强代数知识的直观理解。

中学代数与几何课程的主要差别在于:代数(包括概念和法则)抽象、繁琐,而几何直观、形象。因此尽管几何问题富有挑战性、难度大,但是"图形变换"的魅力使学生获得无穷的乐趣。相比起来,代数没有可见的形象,显得枯燥乏味。因此,从心理接受能力的角度来说,在代数教学中引入适当的几何直观、注重利用贴近生活的形象思维便是代数教学中一项重要任务。特别是对于初学者来说,教师创造"直观形象"的思维背景与思维环境至关重要。许多大数学家都反

① H. B. Griffith 等:《经典数学综合教材》,陈应枢等译,贵州人民出版社,1986。

② Веленкин:Совлеменные Основы Школьного Круса Математикин. Москва ⟨Провенщие⟩,1980。

复强调建立直观形象的重要性，从一定的意义上说，所谓“理解”实际上基本等同于“建立直观形象”，纯粹抽象的事物是难以理解的。

数学法则是严格的、毋庸置疑的，法则的逻辑基础是公理系统。但是对法则的理解和解释却不可能事事诉诸公理系统，在教学过程中尤其如此。初学者需要在教师的引导下，对于一些比较复杂的运算规则，建立起比较直观、仅仅相对准确的理解。

1992 年，当代大数学家阿诺德(V. I. Arnold)在俄罗斯教师进修学院的一次讲演中谈到形式化数学对数学教学的影响时说：

“数学的形式化导致了其教育的一定程度的形式化，于是也造成了数学教学的布尔巴基(法国一个注重形式化数学的数学团体)化倾向。典型的例子是在法国，向二年级学生提出这样的问题：2＋3 等于多少？回答是：因为加法满足交换律，因此 2＋3＝3＋2。”

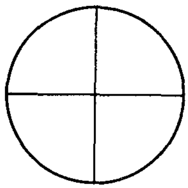
阿诺德评论道：“很好的回答，他完全正确。但是学生根本没有想到要把两个数加起来，因为教学的重点是运算本身。”

教师要把自己所学到的高度严格的形式化数学，转化为适合教学的数学形态并不是一件轻松的工作。特别是当教师在低年级面对一些基础性问题时，要求既能让低年级学生顺利接受，同时又不失逻辑严格性，相当困难。

著名的美国数学家芒福德(David Mumford)[①]对数学课程中“公理证明”与“图形直观”发表的看法是：

“通常图形是促进交流的办法，在小学里，当你接受 $1/(1/n)=n$ 时，你可能像我一样困惑。当然，现代教科书中，往往程度不同地摆弄公理化办法去‘证明’这一公式，但是用下面的对比图形不是一样清楚吗。参见下图：

总共 6 块饼，每人 2 块，可以分给几个人？6/2＝3，结论：6 包含 3 个 2，所以 6/2＝3。总共 1 块饼，包含几个 1/4 块？结论：1 包含 4 个 1/4，因此 1/(1/4)＝4。”



芒福德评论说：“介绍一个实例，观察一个图形，导出一个解释，难道不比去介绍形式化证明更好吗？”

当然，我们绝对不是否定数学的形式化特征，更不是否定理性思维的价值。完全按逻辑规则严格处理的“形式化证

① 芒福德(1937—　)，哈佛大学教授，1974 年获菲尔兹奖，1995—1999 年任国际数学家联盟主席。引文来自 Notices of AMS，第 44 卷，1997。

明”,中学生难以企及。我们只能进行适度的“形式化”。对于数学教师来说,体验数学的形式化则是十分必要的一课。“只有经历必要的痛苦,才能体验成功的快乐。”本书的第一章将讨论数系的发展,读者必须理解“数”是直接建立在最原始的“集合”基础之上的。通过集合、运算、公理、结构等一连串枯燥的定理及其推理,体验蕴涵其中的理性思维精神。

总之,我们的原则是强调数学本质,注意适度形式化。正如2004年公布的《高中数学课程标准(实验稿)》中所指出的:

“形式化是数学的基本特征之一。在数学教学中,学习形式化的表达是一项基本要求,但是不能只限于形式化的表达,要强调对数学本质的认识,否则会将生动活泼的数学思维活动淹没在形式化的海洋里。数学的现代发展也表明,全盘形式化是不可能的。因此,高中数学课程应该返璞归真,努力揭示数学概念、法则、结论的发展过程和本质。数学课程要讲逻辑推理,更要讲道理,通过典型例子的分析和学生自主探索活动,使学生理解数学概念、结论逐步形成的过程,体会蕴涵在其中的思想方法,追寻数学发展的历史足迹,把数学的学术形态转化为学生易于接受的教育形态。”

本书的写作,首先由丛书主编拟订编写框架,向全国“招标”征求作者。确定后由作者写出初稿,经过其他作者补充修改,最后由本书主编充实改写,梳理润饰,许多章节变动很大。参加初稿编写的有:贯丕珠(数系、函数);濮安山(不等式);熊惠民(数列、算法);刘永生(方程的一部分)。张淼提供了一些教学建议。第七章的习题和综合题,由龙开奋、蒋亮等提供。蔺云、张伟平、刘丹、董超、黄兴丰参加了审读和校改工作。

由于本书的写作没有可以依托的蓝本,在参考一些著作之后,大多还要进行新的构思和编写。现在只能做到这样。我们希望能够得到读者的批评,以求不断地加以改进。

张奠宙　宋乃庆　张广祥

2005年5月

目　录

第一章　数与数系

数与数系的扩展，与数学思想的发展密切相关.数系的每一次扩充，都伴随着数学思想的重大变革.本章将叙述数系的历史发展，从数学结构上进行扩展和分析，并提出若干教学的建议.

第一节　数系的历史发展

数是抽象思维的产物.在漫长的史前时代，人类已经认识了抽象的自然数.随着人类文明的进步，数的概念先后经历了多次重大的变化.首先，数的概念从实体的测量发展为抽象的存在，如从正方形对角线的测量得到脱离经验的"无理数".其次是代数运算的需要，因减法、开方运算的需要产生了负数、无理数和复数.到了近代，"数"不再只是单个的量的表示，数系发展为一个完备化的运算系统.人们为了追求运算的无矛盾性，接受了理想的"数"，包括复数、四元数、八元数等等.在 20 世纪，从希尔伯特到布尔巴基，结构主义的数系观占据了统治地位.以下我们分别进行论述.

一、数学思维对象与实体的分离

数的概念产生于对实物的计量.通过物件的多少、线段的长短、面积的大小等的测量，最终归结到某个特定的数.但是，真正与实体直接相关的、用日常生活经验可以获得的数，只有自然数.其他的数，都需要进行理性思考才能获得.

按照与实体分离的程度不同，数系循着以下的历史途径逐渐扩展：

(i) 自然数 $\longrightarrow$ 正有理数 $\longrightarrow$ 简单的代数无理数(如$\sqrt{2}$, $\sqrt{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$等) $\longrightarrow$ 零与负有理数 $\longrightarrow$ 复数 $\longrightarrow$ 严格的实数系.

然而"数"的扩展的历史过程，与"数系"的逻辑扩展过程是不同的.请看以下的逻辑扩展：

(ii) 自然数 $\xrightarrow{\text{添加负数和零}}$ 整数系 $\xrightarrow{\text{作分式域}}$ 有理数系 $\xrightarrow{\text{作柯西序列等价类}}$ 实数系 $\xrightarrow{\text{作 2 次代数扩张}}$ 复数系.

数学史家 M·克莱因(M. Kline)指出①："数学史上这一系列事件的发生顺

① M·克莱因：《数学——确定性的丧失》，中译本，177.

序是耐人寻味的，数学家们并不是按照先整数、分数，然后无理数、复数、代数学和微积分的顺序，而是按照相反的顺序与它们打交道的. 看来，他们进行逻辑化的工作是极不情愿的.”

事实上，当人们还普遍怀疑负整数也是一种数时，人们就已经在研究正的有理数与无理数，甚至已经开始使用复数了. 直到 1830 年，一些大数学家还在怀疑负数. M·克莱因说：“确实的，直到现代，负数才算被彻底地理解了”. 在 18 世纪后半叶，欧拉(L. Euler)仍然深信负数比∞大. 他还如下论证$(-1)(-1)=+1$：“这个乘积必定是$+1$或-1，又因为$1\cdot(-1)=(-1)$，所以$(-1)(-1)=+1$.”著名的法国几何学家 Carnot 认为，负数的使用会导致谬误的结论. 在 1831 年这样晚近的时候，伦敦大学学院的数学教授、著名的数理逻辑学家、对代数学有贡献的德摩根(A. D. Morgan，1806—1871)在他的《论数学的研究和困难》中说：“‘虚数式$\sqrt{-a}$和负数式$-a$有一种相似之处，即只要它们中的任一个作为问题的解出现，就说明一定有某种矛盾或谬误，只要一涉及到实际的含义，两者都是同样的虚构，因为$0-a$和$\sqrt{-a}$同样是不可思议的.’……德摩根固执地认为考虑比 0 小的数是荒谬的.”①

人们可以接受正有理数(1/2)和$\sqrt{2}$，因为它们是在测量实体的过程中所产生的抽象物. 虽然已经离开了经验，毕竟是实际的理想存在. 至于负数，则不是测量出来的. 如果说亏损 20 元，那个 20 仍旧是正数. 因此人们不觉得非要接受负数不可. 不能实际测量，正是一些数学家不愿意承认负数的理由.

二、算术到代数的演进加速了数系的形成

字母表示数这一重要的代数学发展，有力地促进了数系的发展. 让我们来看一下无理数的发展过程.

毕达哥拉斯学派发现无理数的故事是大家熟悉的. 此后，像$\sqrt{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$这样已经比较复杂的代数无理数，也已在中后期的古希腊数学中出现(例如欧几里得的《几何原本》). 但是，无理数受到数学家的普遍承认，其时间却要晚得多. 16 世纪帕斯卡(B. Pascal，1623—1662)、巴罗(I. Barrow，1630—1677)这样伟大的数学家还拒绝接受$\sqrt{3}$这种简单无理数，他们评论说：“像$\sqrt{3}$这样的数只能作为几何量来理解，无理数仅仅是记号，它们脱离连续的几何量便不能存在.”

古希腊的数学家欧多克斯是伟大的思考者. 他的伟大功绩之一，是用穷竭法把“相似比”扩展到了无理数情形. 值得提出的是，我们今天可以把两个三角形相

① M·克莱因：《古今数学思想》，中译本，第 2 卷，第 25.1 节，345～346.

似的一些定理(包括最原始的平行线切割定理)用于相似比为无理数的情形,并没有给出证明就在使用了.那是因为欧多克斯早就为我们铺平了道路.

无理数跳出"几何量"的禁锢,作为普遍接受的"数",是和文字代表数的使用分不开的.事实上,既然字母也可以成为一种特定的数,$\sqrt{a}$就是可以接受的了."字母一旦被采用,它们就是数的化身,因而可以像数那样来处理."①

可以想像,如果利用根式解方程,研究者就会认为 $x=\sqrt{a}$ 应该是方程 $x^2-a=0$ 的一个根.事实上,既然 2 作为 $x^2-4=0$ 的一个根是合理的,那么$\sqrt{3}$作为$x^2-3=0$ 的一个根也是合理的.2 和$\sqrt{3}$作为数没有特别的差异.这启发人们应该把正有理数与正无理数一起,都看成同一个数系中的成员,从而开始形成实数的整体概念.

圆周率 π 也是人们早期接触的无理数.但是在早期数学中,人们只把它作为一个特定的记号,数学家热衷于利用几何方法计算圆周率的近似值(包括渐近分数),并没有把它放在实数系中考察.π 的符号由 16 世纪的韦达首先引入.17 世纪之后数学家找到了很多巧妙的纯代数算法计算 π 的近似值.直到 1882 年德国数学家林德曼(F. Lindemann,1852—1939)才首次证明了 π 不是有理数.

总之,仅仅把无理数作为个别量的一种特定数的记号,还不能形成数系.无理数的价值在于可以和有理数一样进行运算.人们接受无理数是和方程求解的运算过程分不开的.

三、算法的合理性是新"数"获得承认的主要原因

数学教育研究表明,人们认识负数比起认识无理数要容易些.但是,历史有独特的自身发展逻辑.正如几何学家 F·克莱因(F. Klain)所述:"讲起负数的历史,不像许多人所想像的那样,样样事情都是希腊领先.古希腊人肯定没有负数,这个发明应该归功于印度人,印度人还创造了我们使用的十进制,特别是零.欧洲人是在文艺复兴时代逐渐起用负数的,当时刚刚过渡到用文字符号运算的阶段."②

F·克莱因在这里有误.希腊人确实没有使用负数,但是大量研究表明,最早使用负数的是中国人.著名的数学史家史密斯(D. E. Smith,1860—1944)在《数学史》第 2 卷"数系"一章里指出:"中国人在很早年代就能对这种负数进行运算.他们用红色算筹记正数,黑色算筹记负数.在大约公元前 200 年的专著《九章算术》中已有记载."

① M·克莱因:《古今数学思想》,中译本,第 1 卷,第 13.2 节与 13.8 节,292 与 330.

② F·克莱因:《高观点下的初等数学》,中译本,第 2.1 节,21~22.

中国古代数学中很早就把负数与正数一起看成同一个数系的整体，注重算法的中国古代数学在正负数的统一观点上是超前的.《九章算术》中正负数提出了一套完整的符号运算法则：

同名相除$((\pm a)-(\pm b)=\pm(a-b))$；

异名相益$((\pm a)-(\mp b)=\pm(a+b))$；

正无入负之$(0-(+a)=-a)$；

负无入正之$(0-(-a)=+a)$.

如前所述，"得到的钱数是正数、失去的钱数是负数"这样的观念不能让人们充分地接受负数. 拒绝接受负数的人总是认为"失去的钱数"在实体对应的原则下仍然是一个正数值."负号"仅仅是"失去"一词的代用物而已.

负数受到数学家的普遍承认主要依赖于算法的合理性. 也就是说，引入负数可以扩展数的对象，却不会发生矛盾，即无矛盾性. 正如 $2+x=5, x=5-2=3$ 一样，由 $5+x=2$ 同样可以求解出 $x=2-5=-3$. 进一步说，与 $3\times(2+1)=3\times 2+3\times 1=6+3=9$ 一样，也有 $3\times(-2+1)=3\times(-2)+3\times 1=(-6)+3=-3$. 凡是对于正数成立的运算法则，对于负数也同样成立. 运算可以扩展，又不会发生矛盾，何乐而不为？

再看一个负数合理性的例子. 帕斯卡(B. Pascal)的一位朋友阿尔诺(A. Arnauld, 1612—1694)质疑负数的比例关系 $-1:1=1:-1$. 他说，既然 -1 小于 1，那么较小的数与较大的数之比，怎么会等于较大的数与较小的数之比呢？1712 年，莱布尼茨(G. W. Leibniz)认为这种比例在形式上是正确的(内项之积等于外项之积)，运算是合理的. 按照"无矛盾性"优先的想法，负数仍然是可以接受的. 既然比例关系 $-1:1=1:-1$ 在算法是合理的，并没有在计算上出现矛盾. 阿尔诺所质疑那些次要的"不合理"也就不加计较了，作为算法系统，总是把算法的无矛盾性放在首位.

我们再来看数学家如何承认虚数 i^i. 运用极限方法，人们容易想像 $2^{\sqrt{2}}=2^{1.4142136\cdots}=2.6651441\cdots$，显然这是实数. 但是 2^i 的实际意义呢？i^i 又是什么意思呢？后来欧拉算出 $i^i=e^{-\frac{\pi}{2}}=0.2078795763\cdots$竟然是一个实数.

承认这种形式运算的合理性最主要根据就是运算的无矛盾性. 复数幂的欧拉公式在逻辑上具有无矛盾性，即逻辑相容性，因而得到了广泛承认. 正如德摩根所述："通过这些记号(即虚数$\sqrt{-a}$记号——本书作者注)，代数中极其有用的一部分便建立起来了. 它依赖于一件必须用经验来检验的事实，即代数的一般规则可以应用于这些式子(复数)，而不会导致任何错误的结果."①

① M·克莱因：《古今数学思想》，中译本，第 2 卷，第 25.1 节，349.

四、与实体不能直接对应的“理想数”

在19世纪，数学产生了两个方面的变化.一方面，出现了拉普拉斯方程，热传导方程，流体力学方程，以及影响深远的电磁学方程，数学大举进入应用性的科学范畴.另一方面，数学更加抽象化、形式化.非欧几何的诞生，群论的创立，四元数的出现，使得数学家在建立“人类理性王国”的道路上不断前进.

希尔伯特完全求助于理性的想像力，用“理想元”来概括数学中的“虚数”、“无限”这类并不直接与实体对应的数学概念.希尔伯特说：“在重要而富有成效的理想元方法中，我们遇到了关于无限性概念的一个全然不同且很独特的想法.……两条直线总能交于一点这样的结论是不成立的，因为两条直线也可以互相平行.然而我们知道，在引入理想元，即无限远点和无限远直线之后，我们能使两条直线总在一点而且只在一点相交这条定理普遍为真.……采用理想元的另一个例子是代数学中大家熟悉的复虚量，它们使那些有关一个方程的根的存在性和根的数目的定理得以简化.”“因为在数学中和在其他场合一样，成功是最高法庭，任何人都得服从它的裁决.”①

希尔伯特的“理想元”想法，在20世纪引发了数系的另一个重大的进步，那就是非标准实数系.1960年，鲁宾逊(A. Robinson)用数理逻辑的方法证明了，通常的实数系 $\mathbf{R}$，可以扩充为一种包括“无穷小”与“无穷大”在内的数系 $\mathbf{R}^*$.在 $\mathbf{R}^*$ 内，普通的实数称为标准实数.在标准实数0附近，有许多表示“无穷小”的非标准实数.这些“无穷小”非标准实数的倒数，就是“无穷大”非标准实数.鲁宾逊证明：这样扩充之后，数系 $\mathbf{R}^*$ 定义的各种运算和通常实数系中的运算，不会发生矛盾.同时，原来标准实数的极限过程就可以用非标准实数的四则运算加以代替.“无穷小”终于成为 $\mathbf{R}^*$ 中一个“数”了，不必再是一个过程.

无穷小成为一个理想的数，得到了普遍的承认.不过，当初鲁宾逊等数学家曾经预言，非标准分析将取代现今通用的“标准分析”.这至今没有实现.

五、用结构主义方法构造数系

从17世纪牛顿—莱布尼茨创立微积分以后，经过欧拉等大数学家的发展，数学体现了巨大的应用价值.但是，数学的基础还不牢固.微积分使用的无穷小概念就缺乏逻辑依据.贝克莱大主教把无穷小说成是“逝去的鬼魂”.确实，认为“无穷小既是0，又不是0”，怎么说得通?

---

① D. Hilbert：《论无限》，Mathematische Annalen，Vol. 95，161～190，1926.转引自 P. Benacerraf，H. Putnam：《数学哲学》，朱水林等译，商务印书馆，2003，211～215.

进入 19 世纪，经过高斯(C. F. Gauss，1777—1855)、柯西(A. L. Cauchy，1789—1857)、魏尔斯特拉斯(K. Weierstrass，1815—1894)、戴德金(R. Dedekind，1831—1916)、康托尔(G. F. Cantor，1845—1918)的努力分析终于严密化. 特别是希尔伯特(D. Hilbert，1862—1943)倡导的形式主义数学哲学，使数学获得了空前严密的逻辑性. 他首先将欧氏几何完全严密化，写成《几何基础》一书. 此后，从一组公理出发，经过形式化推理得到数学真理的方法风靡世界. 这样的公理系统就成为数学研究的严格的逻辑对象，数学被看成在公理系统基础上一步一步发展出来的逻辑结构.

结构主义数学的产生是 20 世纪数学的重大成就之一. 20 世纪 30 年代，法国的布尔巴基学派，倡导结构主义数学. 他们认为数学有三种基本结构：代数结构，序结构和拓扑结构. 不同的数学分支是由不同的数学结构的组合而形成的. 同样，不同的数系也需要用不同的结构加以刻画.

这样一来，经历几千年发展起来的自然数系、有理数系、实数系与复数系，借用抽象代数的语言，可以浓缩地表达为一系列极其简单明晰的代数结构和序结构的组合：自然数半群(既是加法半群又是乘法半群)、整数环(欧几里得环)、整数环的分式域(有理数域)、完备阿基米德有序域(实数域)、实数域的 2 次代数扩域(复数域). 数系的扩充过程是在原有的数系上添加新的元，规定新的运算，形成新的结构，最终扩充为新的数系.

详细地说，从一个数系 A 扩展到新的数系 B，应当遵循如下的结构主义原则(以实数系扩充到复数系为例)：

1. A 是 B 的真子集，即 $A \subset B$(实数集是复数集的真子集). 用“老”数系 A 中的数，按逻辑方法，构造出一种新的对象，叫做“新”数. “老”的数是所有新数系的一部分(一对有序的实数 (a,b) 作为新数，$(a,0)$ 等同于原来的实数 a).

2. 在新数上建立各种运算(对 (a,b) 规定四则运算法则，特别是乘法 $(a,b)\cdot(c,d)=(ac-bd,ad+bc)$). A 的元间所定义的运算关系，在 B 的元间也有相应的定义，且 B 的元间的这些关系和运算对 B 中的 A 的元来说与原定义一致(新规定的复数运算当复数是实数时和原来的实数运算一样，$(a,0)+(b,0)=(a+b,0)$)；这保证老结构和新结构彼此相容.

3. B 的结构和 A 的结构可能有本质不同(在序结构上，实数系是阿基米德有序域，复数系是半序域). 某种运算在 A 中不是总能实施，在 B 中却总能实施(实数中的负数不能做开方运算，而在复数系中总能进行).

4. 在 A 的具有上述三个性质所有的扩展中，在同构意义下，B 是唯一最小扩展(如果只是为了能够施行开方运算，实数系可以扩展为复数系或四元数系等等，但是复数系是其中最小的扩充).