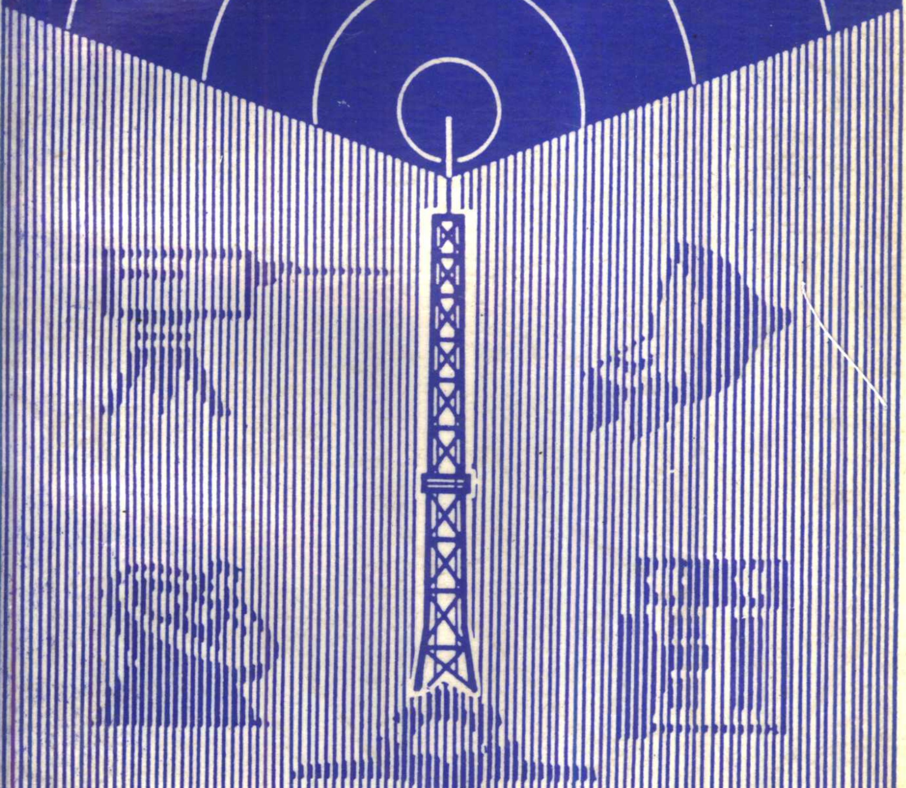
高等学校教材

矩阵光学

卢亚雄　吕百达
编著



大连理工大学出版社

矩 阵 光 学

卢亚雄　吕百达编著

大连理工大学出版社

内 容 简 介

《矩阵光学》一书主要研究矩阵方法在光学领域中的应用。全书共分八章。第一章简要复习矩阵运算的基本内容，第二至第七章分别讨论了矩阵方法在几何光学、高斯光束传播、谐振腔理论、偏振光学、晶体光学及薄膜光学等方面的应用，第八章介绍了矩阵光学的新进展。章末附有一定数量的习题。为了区别起见，较深的内容用“*”表示，教学中可根据不同的对象对内容进行取舍。讲授完全书约需40～60学时。

本书可作为光电子技术与光学专业的大学本科高年级学生和研究生的教材，也可供在相应领域内工作的科技人员参考。

矩 阵 光 学

Juzhen Guangxue

卢亚雄　吕百达　编著

大连理工大学出版社出版（大连市甘井子区凌水河）

辽宁省新华书店经销　大连理工大学印刷厂印刷

开本：787×1092　1/32　印张：$14\frac{3}{4}$　字数：317千字

1989年12月第1版　1989年12月第1次印刷

印数：0001—1500册

责任编辑：许芳春　责任校对：冬　梅

封面设计：葛　明

ISBN 7-5611-0187-2/O·33　定价：2.75元

出 版 说 明

根据国务院关于高等学校教材工作分工的规定，我部承担了全国高等学校、中等专业学校工科电子类专业教材的编审、出版的组织工作。由于各有关院校及参与编审工作的广大教师共同努力，有关出版社的紧密配合，从1978年至1985年，已编审、出版了两轮教材，正在陆续供给高等学校和中等专业学校教学使用。

为了使工科电子类专业教材能更好地适应“三个面向”的需要，贯彻“努力提高教材质量，逐步实现教材多样化，增加不同品种、不同层次、不同学术观点、不同风格、不同改革试验的教材”的精神，我部所属的七个高等学校教材编审委员会和两个中等专业学校教材编审委员会，在总结前两轮教材工作的基础上，结合教育形势的发展和教学改革的需要，制订了1986～1990年的“七五”（第三轮）教材编审出版规划。列入规划的教材、实验教材、教学参考书等近400种选题。这批教材的评选推荐和编写工作由各编委会直接组织进行。

这批教材的书稿，是从通过教学实践、师生反映较好的讲义中经院校推荐，由编审委员会（小组）评选择优产生出来的。广大编审者、各编审委员会和有关出版社为保证教材的出版和提高教材的质量，作出了不懈的努力。

限于水平和经验，这批教材的编审、出版工作还会有缺点和不足之处，希望使用教材的单位、广大教师和同学积极提出批评建议，共同为不断提高工科电子类专业教材的质量而努力。

电子工业部教材办公室

前　　言

随着激光的问世及激光技术与应用的迅猛发展，矩阵方法得到了愈来愈广泛的应用，使得《矩阵光学》这个光学领域中的古老分支发展成为崭新的一门学科。为了反映该学科的新发展，我们按机械电子部《电子物理与器件》教材编审委员会《激光与红外》编审小组制定的编写大纲，编写了本书。经编审小组审定，推荐出版。除了作为光电子技术与光学专业大学本科高年级学生和研究生的教材外，本书也可供在相应领域内工作的科技人员参考。

《矩阵光学》一书主要研究矩阵方法在光学领域中的应用。全书共分八章。第一章简要复习矩阵运算的基本内容，第二章至第七章分别讨论了矩阵方法在几何光学、高斯光束传播、谐振腔理论、偏振光学、晶体光学及薄膜光学等方面的应用。最后一章介绍了矩阵光学的新进展。章末附有一定数量的习题。为了区别起见，较深的内容用“*”表示，教学中可根据不同的对象对内容进行取舍。讲授完全书约需40～60学时。

有关《矩阵光学》的参考文献很多，内容十分丰富。我们在编写中力求突出重点。本书中，矩阵光学在几何光学、高斯光束传播及谐振腔的应用方面的内容占主要篇幅。这是因为该学科的发展，主要集中在以上几个方面。虽然有关内容的文献已有不少，但是，系统地用矩阵方法处理这些内容，

国内尚无专著。对于目前蓬勃发展的薄膜光学，限于篇幅，只作了一般性的讨论。希望本书内容的安排能够满足不同读者的需要。

为了充分反映《矩阵光学》的最新发展，编著者广泛参考了有关的国内外文献资料，采用了其中的一些最新成果，也包括编著者自己的部分工作。书中列出了主要的参考文献，便于读者查阅。

本书是根据编著者在电子科技大学光电子技术系和四川大学物理系讲授《矩阵光学》课程所使用的讲义，加以修改整理而成的，其中§2.10、§2.11、§3.9、§3.10以及第四章、第八章由四川大学吕百达执笔；其余各章由电子科技大学卢亚雄执笔。全书由卢亚雄统编，上海交通大学蒋秀明副教授主审。编著者曾就矩阵光学的有关问题与杭州大学王绍民教授、北京理工大学魏光辉教授广泛交换意见并进行多次十分有益的讨论。书中还写入了王绍民教授一些新的研究成果。编写中还得到电子科技大学蔡伯荣教授的支持和帮助。谨此一并致谢。

由于编著者水平有限，错误之处难免，诚挚地希望读者批评指正。

卢亚雄　吕百达

1988.12

目　　录

第一章　矩阵及其运算

§1.1　矩阵及其运算

贯穿本书的主要计算是矩阵运算。虽然在数学的有关课程中讨论过这部分内容，但仍有必要简单地复习《矩阵光学》所涉及的矩阵和矩阵运算的基本知识。

矩阵是常用的数学工具。处理两组变量之间的关系时，经常使用矩阵方法。例如，平面直角坐标系xoy中的某点，其坐标用（x, y）表示。若将该坐标系绕原点o沿逆时针方向旋转α角，得到新坐标系$x'oy'$，该点在新坐标系下的坐标（x', y'）与原坐标（x, y）之间满足

$$\begin{cases} x' = x\cos\alpha + y\sin\alpha \\ y' = -x\sin\alpha + y\cos\alpha \end{cases} \tag{1.1-1}$$

在有关运算原则的规定下，可将上式写为矩阵的形式：

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \mathbf{T}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{1.1-2}$$

其中

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \tag{1.1-3}$$

是2×2矩阵，而$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$与$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$是$2\times1$矩阵。

一般而言，将$m \times l$个元素排成m行、l列的一个矩形阵列，就称为矩阵：

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1l} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2l} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{ml} \end{bmatrix} \tag{1.1-4}$$

其中的a_{ij}($i=1,\cdots,m$; $j=1,\cdots,l$) 是该矩阵中处在第i(横)行、第j(纵) 列位置的元素，而$m \times l$是矩阵的阶。行数与列数相等 ($m=l$) 的矩阵称为方阵。若方阵的对角元素为1，非对角元素全部为零：

$$\mathbf{I}_m=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \tag{1.1-5}$$

该矩阵为单位矩阵，记为$\mathbf{I}_m$。

将 (1.1-4) 式矩阵有关元素位置对换所得到的$m \times l$矩阵

$$\mathbf{A}'=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{1l} & a_{2l} & \cdots & a_{ml} \end{bmatrix} \tag{1.1-6}$$

称为矩阵$\mathbf{A}$的转置矩阵，写为$\mathbf{A}'$。显然，作转置变换时，对角元素不变，而$\mathbf{A}'$的第i行第j列元素等于矩阵$\mathbf{A}$的第j行第i列元素。

一个$p \times 1$阶矩阵称为p维向量，或者p维矢量，例如

$$\mathbf{B}=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_p \end{bmatrix}=(b_1 \quad b_2 \quad \cdots \quad b_p)^t \qquad (1.1\text{-}7)$$

其元素b_i ($i=1,\cdots,p$) 是该向量的第 i 个分量。

如果两个矩阵**A**和**B**具有相同的阶数$m\times l$，而且对应位置上的元素相等。

$$a_{ij}=b_{ij}(i=1,\cdots,m;\quad j=1,\cdots,l) \qquad (1.1\text{-}8)$$

那么矩阵**A**等于矩阵**B**。

矩阵之间可以进行加法、减法、乘法以及除法等基本运算。两个矩阵**A**和**B**，仅当其具有相同的阶数$m\times l$(相同的行数与列数）时才能进行加减运算，其和或者差仍是同阶的另一个矩阵**C**，其元素是**A**、**B**两个矩阵的对应元素的和或差，即：

$$c_{ij}=a_{ij}\pm b_{ij} \qquad (1.1\text{-}9)$$

显然，矩阵的加法和减法满足交换律与结合律。

一个$s\times l$阶的矩阵**A**与另一个$l\times m$阶的矩阵**B**的乘积是一个$s\times m$阶的矩阵。若

$$\mathbf{AB}=\mathbf{C} \qquad (1.1\text{-}10)$$

那么，矩阵**C**的元素c_{ij} ($i=1,\cdots,s$; $j=1,\cdots,m$) 为：

$$c_{ij}=\sum_{p=1}^{l}a_{ip}b_{pj} \qquad (1.1\text{-}11)$$

其中a, b是矩阵**A**、**B**的元素。该式表明，矩阵**A**与**B**的乘积所得的矩阵**C**，其第 i 行第 j 列的元素，等于第一个矩阵**A**的第 i 行各元素与第二个矩阵**B**的第 j 列各相应元素乘积之和。当然，第一个矩阵的列数必须等于第二个矩阵的行数，

这两个矩阵才能按序相乘。例如，在2×2方阵的情况下有：

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22} \end{pmatrix}$$

根据上述乘法的法则，乘积矩阵的元素c_{12}是**A**矩阵的第1行的两个元素a_{11}、a_{12}，分别乘以**B**矩阵的第2列相应元素b_{12}、b_{22}的乘积之和，再用同样原则计算其它元素，便得到上式。

在矩阵乘积的（1.1-10）式中，矩阵**A**是自左面乘以矩阵**B**，简称**A**左乘**B**；若写为**BA**，则**A**是右乘矩阵**B**。数学上可以证明，在一般情况下，左乘与右乘的结果并不相等，即：

$$\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$$

只有当**A**、**B**两个矩阵相等，或者两个矩阵都是对角矩阵（非对角元素为零），或者其中一个矩阵是单位矩阵或零矩阵（全部元素为零）的情况下，**AB**才与**BA**相等。所以，在涉及矩阵的乘法时，应该说明相乘的具体形式。"**A**与**B**的乘积"的表述是含糊不清的。显然，矩阵的乘法只满足结合律与分配律，而不满足交换律，也不满足消去律。

当s（$s=1,2,\cdots$）个完全相同的方阵**A**连乘时，仍然得到一个同阶的方阵，记为$\mathbf{A}^s$，称为**A**的s次幂。幂的计算完全可以按照乘法的原则去处理。

矩阵之间的除法运算，是通过乘以逆矩阵的方法来实现的。如果方阵**A**与**B**的乘积为单位矩阵：

$$\mathbf{AB} = \mathbf{I} \tag{1.1-12}$$

则称**A**是**B**的左逆，**B**是**A**的右逆，可将**B**写为$\mathbf{A}^{-1}$，或将**A**写为$\mathbf{B}^{-1}$，则：

$$\mathbf{AB} = \mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{B} = \mathbf{I} \tag{1.1-13}$$

矩阵方程式

$$\mathbf{AD} = \mathbf{C}$$

中的除法，即用逆矩阵表示：

$$\mathbf{D} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{C}, \quad \mathbf{A} = \mathbf{C}\mathbf{D}^{-1}$$

但要注意，一般情况下：

$$\mathbf{D} \neq \mathbf{C}\mathbf{A}^{-1}; \quad \mathbf{A} \neq \mathbf{D}^{-1}\mathbf{C}$$

下面计算方阵的逆矩阵。为了求出矩阵的逆矩阵，先讨论伴随矩阵。设$A_{ij}(i, j = 1, \cdots, m)$是矩阵

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mm} \end{bmatrix}$$

的元素a_{ij}的代数余子式（即在原矩阵$\mathbf{A}$中，划掉第i行与第j列元素后的（$m-1$）×（$m-1$）阶方阵相应的行列式的值，再与（$-1)^{i+j}$的乘积)，那么$\mathbf{A}$的伴随矩阵adj$\mathbf{A}$（记为$\mathbf{A}^*$）等于：

$$\mathbf{A}^* = \mathrm{adj}\mathbf{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{m1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{m2} \\ \vdots & & & \vdots \\ A_{1m} & A_{2m} & \cdots & A_{mm} \end{bmatrix} \qquad (1.1\text{-}14)$$

若用det$\mathbf{A}$表示矩阵$\mathbf{A}$的值，则当

$$\det \mathbf{A} \neq 0$$

时，$\mathbf{A}$的逆矩阵存在，而且为

$$\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^*/\det \mathbf{A} \qquad (1.1\text{-}15)$$

数学上容易证明

$$\det(\mathbf{AB}) = (\det\mathbf{A})(\det\mathbf{B}) \qquad (1.1\text{-}16)$$

$$\det(\mathbf{A}^{-1}) = (\det\mathbf{A})^{-1} \tag{1.1-17}$$

$$(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1} \tag{1.1-18}$$

当然，相应的公式容易推广到多个矩阵乘积的情况。

对于2×2的矩阵$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$，在

$$\det\mathbf{T} = ad - bc = 1 \tag{1.1-19}$$

的条件下，逆矩阵为

$$\mathbf{T}^{-1} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \tag{1.1-20}$$

在部分章节的讨论中，将直接使用上式的结果。

§1.2 矩阵的本征值及本征向量

现在讨论一个给定方阵的本征值与本征向量的问题，对于m级方阵$\mathbf{A}$，若存在对角矩阵$\mathbf{\Lambda}$与变换矩阵$\mathbf{F}$：

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & & & \cdots & \lambda_m \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & \cdots & f_{1m} \\ f_{21} & f_{22} & \cdots & f_{2m} \\ \vdots & & & \vdots \\ f_{m1} & f_{m2} & \cdots & f_{mm} \end{bmatrix}$$

使得

$$\mathbf{A} = \mathbf{F\Lambda F}^{-1} \tag{1.2-1}$$

成立，那么，对角矩阵的对角元素λ_i $(i = 1, \cdots, m)$是矩阵$\mathbf{A}$

的本征值，而**F**矩阵的第 i 列元素所组成的向量，是λ_i所对应的本征向量。因此，本征值问题就是求满足方程

$$\mathbf{AF} = \mathbf{F\Lambda} \tag{1.2-2}$$

的标量值λ_i及所对应的列向量。由上式得出

$$(\mathbf{A} - \mathbf{\Lambda})\mathbf{F} = 0 \tag{1.2-3}$$

的形式，它表示一个齐次方程组，为使之存在非零解，必须有

$$\det(\mathbf{A} - \mathbf{\Lambda}) = 0 \tag{1.2-4}$$

上式就是矩阵**A**的本征方程。把上式的$m \times m$行列式展开，得到一个关于λ的一元m次方程，其解λ_1、λ_2…、λ_m就是本征值。将本征值代入（1.2-3）式，求出变换矩阵**F**，即求出其m个本征向量。所以，本征值与本征向量不是唯一的，一般来讲，$m \times m$阶矩阵有m个本征值及与之对应的m个本征向量。

实际上，本征值与本征向量也可用于**A**的幂运算中。考虑到（1.2-1）式，容易证明：

$$\mathbf{A}^s = \mathbf{F\Lambda}^s\mathbf{F}^{-1} \tag{1.2-5}$$

其中对角矩阵**Λ**的 s 次方，就等于各个对角元素的 s 次方所组成的对角矩阵。使用上式，可以大大简化矩阵的幂运算。

在2×2阶矩阵的情况下，若

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix};\quad \mathbf{\Lambda} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix};\quad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{pmatrix}$$

本征方程（1.2-4）式为

$$(a - \lambda)(d - \lambda) - bc = 0$$

其解为

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}(a + d) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(a + d)^2 - 4(ad - bc)} \tag{1.2-6}$$

将上式代入到（1.2-2）式中，令等式两端矩阵乘积的相应元素相等，得到：

$$\begin{cases} a f_{11} + b f_{21} = \lambda_1 f_{11} \\ a f_{12} + b f_{22} = \lambda_2 f_{12} \\ c f_{11} + d f_{21} = \lambda_1 f_{21} \\ c f_{12} + d f_{22} = \lambda_2 f_{22} \end{cases}$$

可以确定：

$$f_{11}/f_{21} = b/(\lambda_1 - a) = (\lambda_1 - d)/c$$
$$f_{12}/f_{22} = b/(\lambda_2 - a) = (\lambda_2 - d)/c$$

所以λ_1和λ_2对应的两个本征向量分别为：

$$\begin{pmatrix} f_{11} \\ f_{21} \end{pmatrix} = k_1 \begin{pmatrix} b \\ \lambda_1 - a \end{pmatrix} = k_2 \begin{pmatrix} \lambda_1 - d \\ c \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} f_{12} \\ f_{22} \end{pmatrix} = k_3 \begin{pmatrix} b \\ \lambda_2 - a \end{pmatrix} = k_4 \begin{pmatrix} \lambda_2 - d \\ c \end{pmatrix}$$

其中k_i $(i = 1, \cdots, 4)$是任意常数。若令这些常数为 1 ，则矩阵$\mathbf{F}$ 可写为以下两种形式：

$$\begin{cases} \mathbf{F} = \begin{pmatrix} \lambda_1 - d & \lambda_2 - d \\ c & c \end{pmatrix} \\ \mathbf{F} = \begin{pmatrix} b & b \\ \lambda_1 - a & \lambda_2 - a \end{pmatrix} \end{cases} \tag{1.2-7}$$

在$\lambda_1 \neq \lambda_2$的条件下，相应的逆矩阵为：

$$\begin{cases} \mathbf{F}^{-1} = \dfrac{1}{c(\lambda_1 - \lambda_2)} \begin{pmatrix} c & d - \lambda_2 \\ -c & \lambda_1 - d \end{pmatrix} \\ \mathbf{F}^{-1} = \dfrac{1}{b(\lambda_2 - \lambda_1)} \begin{pmatrix} \lambda_2 - a & -b \\ a - \lambda_1 & b \end{pmatrix} \end{cases} \tag{1.2-8}$$

$\mathbf{F}$ 与$\mathbf{F}^{-1}$的两种形式，可分别适用于 $b = 0$ 或者$c = 0$ 两种特