华章数学译丛

16

# Real Analysis

(Third Edition)

# 实分析

（原书第3版）

（美） H. L. Royden 著

叶培新 译

机械工业出版社
China Machine Press

华章数学译丛

16

# Real Analysis

(Third Edition)

# 实分析

（原书第3版）

（美）H. L. Royden 著

叶培新 译

机械工业出版社
China Machine Press

本书是一部实分析方面的经典教材，主要分三部分，第一部分为经典的实变函数论和经典的巴拿赫空间理论；第二部分为抽象空间理论，主要介绍分析中有用的拓扑空间以及近代巴拿赫空间理论；第三部分为一般的测度和积分论，即在第二部分理论基础上将经典的测度、积分论推广到一般情形.

本书内容详尽，论证严谨、清晰且极具启发性，分析透彻、深刻，文字叙述简洁、流畅，在取材和处理方面不仅深刻地反映了实分析的核心精神，而且包含了作者创造性的构思. 本书适合作为高等院校相关专业学生实分析课程的教材.



**本书版权登记号：图字：01-2004-0900**

**图书在版编目（CIP）数据**

实分析（原书第3版）/（美）罗伊登（Royden, H. L.）著；叶培新译. -北京：机械工业出版社，2006.1

（华章数学译丛）

书名原文：Real Analysis, Third Edition

ISBN 7-111-17703-7

Ⅰ. 实… Ⅱ. ①罗… ②叶… Ⅲ. 实分析-研究生-教材 Ⅳ. O174.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2005）第125185号

机械工业出版社（北京市西城区百万庄大街22号　邮政编码　100037）

责任编辑：方　敏　迟振春

北京瑞德印刷有限公司印刷·新华书店北京发行所发行

2006年1月第1版第1次印刷

787mm×1020mm 1/16 · 19 印张

印数：0 001-4 000 册

定价：42.00 元

凡购本书，如有倒页、脱页、缺页，由本社发行部调换

本社购书热线：(010)68326294

# 译 者 序

本书的英文版在国外作为数学与统计学专业研究生实分析课程的基础教材，在过去的 40 多年中，已被许多著名大学(如斯坦福大学、哈佛大学)采用.

本书主要分为三部分. 第一部分为经典的实变函数论(包括勒贝格测度、勒贝格积分、微分与积分等内容)和经典的巴拿赫空间理论(主要为 $L^p$ 空间理论). 第二部分为抽象空间理论，主要介绍分析中有用的拓扑空间以及近代巴拿赫空间理论. 第三部分为一般的测度和积分论，即在第二部分理论基础上将经典的测度、积分论推广到很一般的情形.

本书内容详尽，论证严谨、清晰且极具启发性，分析透彻、深刻，文字叙述简洁、流畅，在取材和处理方面不仅深刻地反映了实分析的核心精神，而且包含了作者创造性的构思，特别是对不变测度以及贝尔、博雷尔测度正则性的处理更是别具匠心.

本书是一部实分析方面难得的优秀教材. 译者在力求保持 H. L. Royden 教授原著风格的基础上翻译本书，并且希望中文译本的出版能对我国相关专业的人才培养以及广大科学技术工作者有所帮助. 但限于译者水平，必定会有许多不足之处，希望广大读者指正.

本书的翻译得到了国家自然科学基金(项目号 10501026)与南开大学创新基金资助. 在本书的翻译过程中，译者得到了南开大学数学科学学院的梁科教授等的热情支持和帮助，在此表示诚挚感谢. 此外，南开大学商学院的李嵘老师、新疆伊犁师范学院数学系的高文华老师在计算机的使用以及译稿的录入方面提供了很大的帮助，在此一并致谢.

叶培新

2005 年 4 月

# 第3版前言

自上次修订到现在的20年来，尽管本书在贝尔测度的处理和不变测度的省略这两方面有一些缺陷，但它已经对几代学生的教育做出了贡献．因此我很高兴有机会提供一个新版本来弥补这些缺陷．由于这些内容对我来说是新的，要把握住原作的观点有些困难，所以我就将实质性的改动限制在局部紧空间的理论和拓扑空间的测度研究上．其他地方的改动主要是小的改进和增加新的习题．

第一部分几乎没有变动，最值得注意的变动是闵可夫斯基不等式和赫尔德不等式的处理．这样的处理对我来说更为自然，它使得当$0<p<1$时立刻给出相反方向的不等式．关于测度与积分的第11章与第12章相对来说也几乎不变．只是在第12章中增加了关于积分算子的一节与关于豪斯多夫测度的一节．

第二部分从某种程度上来说进行了重新组织和扩充：把紧度量空间和阿斯科利定理所在的小节从关于紧空间的一章移到关于度量空间的一章，使得这些题材独立于拓扑空间的一般理论．扩展了关于贝尔范畴的内容，说明了在证明中运用该理论时所需使用的一些原理．

关于拓扑空间的第8章基本没有变动，但第9章大大地改写了，扩充了对局部紧空间的处理．不仅建立起了测度论所需的局部紧空间的性质，且在局部紧豪斯多夫空间的背景下讨论了仿紧性、穷举和$\sigma$紧的概念．还有一节关于流形及它们仿紧性的意义．

第10章除了一些关于凸性的内容外没有什么变化．

关于局部紧空间的贝尔测度和博雷尔测度的内容完全重写了．第2版在这方面内容的处理上有严重缺陷．我不是指定理和命题的事实有实际错误，而是文中有误导，并且习题中的许多陈述是错的．主要的问题正如同其他一些出版物中一样，即非$\sigma$紧空间的测度的处理来自于正则性．它们之所以造成误导是因为回避直接谈到正则性．而现有的处理则直接面对这些问题，且证明了贝尔(或博雷尔)测度是内正则或拟正则的，但不总是既内正则又拟正则．包含了这个内容就给出了$C_0(X)$上的正线性泛函的里斯-马尔可夫定理的直接证明．该证明独立于丹尼尔积分，因此我们把丹尼尔积分放到本书的末尾．

关于测度空间的自同构的第15章被大大地重写，扩充了完备可分度量空间上的博雷尔测度的讨论．我希望通过强调这些空间与某些标准的测度空间(特别是$\mathbf{R}$的区间上的勒贝格测度)的等价性来使我的朋友George Mackey高兴．

现有版本的第三部分包含了关于不变测度的新的一章．因为我不满意该理论通常的建立方法，所以在先前的版本中我略去了这一主题．我认为哈尔测度的标准表达式在用选择公理以保证加性这一点上是笨拙的，因此我想沿用巴拿赫在可分度量空间运用的极限概念的推广来代替它．我也相信关于不变测度的适当背景是局部紧空间$X$上的同胚的传递群．因此拓扑应该在齐性空间$X$上，其中同胚群是一个不必有拓扑结构的抽象群．当然，这个群必须满足一些条件以使得$X$上存在在该群下不变的贝尔测度．我引入了一个称为拓扑等度连续的性质，并且证明它足以保证不变测度的存在．在包括局部紧拓扑群的许多特殊情形下，我们考虑了这种测

度的惟一性，同时也考虑了微分同胚群并引入胡尔维茨积分. 该积分在许多情形下能对被积元给出具体的公式，这是它的一个优点.

在本书最初计划与编写时，一般认为勒贝格积分理论是研究生水平的内容，本书恰好设计作为一年级的研究生学时一年的课程教材. 而那时本科生的课程倾向于对优秀学生也包含勒贝格积分的内容，并且发现本书也用在这个水平上的课程. 因此这里所提供的内容变得困难且让人迷惑. 我试图将各章安排得有相当大的独立性以使得本书可适用于多种课程. 对于短期课程一种可能的选择是覆盖第一部分和第 11、12 章，这就给出了 **R** 上的微分与积分以及抽象的测度和积分基础知识的全面讨论. 还可用覆盖度量空间的第 7 章和有关巴拿赫空间的一些主题的第 10 章加以补充. 对那些熟悉基本的测度和积分理论以及度量空间要点的学生，可以用以下方法构造一个关于拓扑空间的测度和积分的短期课程：以第 7 章和第 8 章作为背景内容，覆盖第 9、13、14 和 15 章内容.

在写本版中关于集合论的一章时，我打算给出一种不同的观点，强调关于数学基础的各种哲学观点，且告诫人们不要离开集合所嵌入的形式系统来赋予集合本质和意义. 按这种观点重写该章的尝试遭到了抵制，但我希望本书的读者在对无限集的本质形成固定的观点之前读一些关于数学基础的书.

感谢在过去的 20 年中所有给我提出改进意见的读者. Jay Jorgenson 和 Hala Khuri 阅读且检验了证明，Elizabeth Arrington 和 Elizabeth Harvey 将大量的手写改正内容转为适于印刷的稿件. 在此，对他们表示特别感谢.

H. L. Royden
斯坦福大学
1987 年 7 月

# 第 2 版前言

本书是随着斯坦福大学的课程“实变函数论”一起成长起来的，这一课程在过去的十年里我已讲授多次．该课程是为数学与统计学专业的一年级研究生设计的．学习该课程要求有本科数学的一般背景以及对本科涉及分析基本概念的课程内容较为熟悉．我试图覆盖每个研究生都应该知道的经典实变函数论与测度和积分论的基本内容，以及一般拓扑与赋范线性空间理论中更为重要与基本的一些题材．这里所给出内容的处理方式在这种类型的研究生课程中是十分标准的，虽然本书中在讨论测度与积分的一般理论之前首先讨论了勒贝格测度和勒贝格积分．我发现这是一次愉快的实践，因为学生首先熟悉了一个重要的具体情形，接着就看到他所学的知识还适用于很一般的情形．

本书的各章之间有相当大的独立性，而“致学生的序言”中的附图给出了各章之间的内在联系．因此教师可以根据意愿将这里的内容安排成一个课程，处于讨论主线边缘的各节用星号(*)标记．“致学生的序言”中列出了一些记号、习惯用法且提出了一些建议．

本书的内容属于数学中的共同文化，并且反映了许多数学家独具匠心的成果．本书对它的处理特别归功于 Constantine Carathéodory、Paul Halmos 与 Stanislaw Saks 已出版的著作以及 Andrew Gleason、John Herriot 与 Lynn Loomis 的演讲和讨论．本书的第 15 章是与 John Lamperti 集中讨论的结果．

我还要感谢许多学生与同事们的有用建议和批评．对于前者，我想特别提到 Peter Loeb，他阅读了我原有版本的手稿并且帮助澄清了一些证明；我还要提到 Charles Stanton，他阅读了这个修订版的手稿，改正了陈述与命题中的一些错误．至于同事，我想特别感谢 Paul Berg，他向我指出了李特尔伍德的“三大原理”；我也想特别感谢 Herman Rubin，他在我第一次教这门课程时提供了许多定理的反例；此外还有 John Kelley，他阅读了手稿，提出了许多有用的建议且使我省略了一些注记(然而有几个以脚注的形式出现)．最后，我要感谢 Margaret Cline 将原有版本转化为打印稿时的耐心和技巧，William Glassmire 阅读了修订版的证明，ValerieYuchartz 录入该版本，Macmillan 的编辑们在我写这本书期间的体谅和鼓励．

H. L. Royden

斯坦福大学

1967 年 9 月

# 致学生的序言

本书覆盖了每个数学专业的研究生都必须知道的部分内容. 因为想不出一个更好的名字，所以就把这里的内容称为实分析，用这个名字是指现代数学中那些根植于经典的实变函数论的部分. 其中包括经典的实变函数论自身、测度和积分、点集拓扑以及赋范线性空间的理论. 本书相应地分为三部分. 第一部分是经典的函数论，其中包括经典的巴拿赫空间. 第二部分是一般拓扑与一般巴拿赫空间的理论，第三部分是测度与积分的抽象处理.

*预备知识*. 假定读者已经对实变连续函数的主要定理和黎曼积分有所了解，本书没有正式使用该知识，而第 2 章(正式地)提供了所需的全部基本定理. 不过，本书第 2 章内容只进行简要论述，目的是回顾和作为后面各章的导言. 因此对于该知识不甚了解的读者或许会发现这里的内容难于学习. 另外，我们还假定读者对于一般本科课程中讲授的现代代数基础知识有所了解. 在一些边缘的节用到了群和环的定义和基本性质，而且在第 10 章用到线性向量空间的基本概念. 集合论则贯穿全书所有内容，在本书第 1 章中论述该理论时对一些 1
基本事实进行了概括. 由于其他部分充满了集合论的应用，因此学生应该在学习本书的过程中适应集合论的论述方式. 建议读者首先粗读第 1 章，以后在需要时再回过头来重新复习. 在 Halmos[6]⊖和 Suppes[14]中对于集合论有更为全面透彻的论述，相信可以对读者阅读本书有所帮助.

*逻辑符号*. 使用某些逻辑表达式的缩写是比较方便的. 我们用“&”表示“和”，所以“$A\&B$”是指“$A$ 和 $B$”；“$\vee$”表示“或”，所以“$A\vee B$”是指“$A$ 或 $B$”；“$\neg$”表示“非”或“否”，所以“$\neg A$”是指“非 $A$”. 另一个经常使用的重要符号是“$\Rightarrow$”. 它有许多同义词，“$A\Rightarrow B$”可表达为“如果 $A$ 成立，$B$ 亦成立”，“$A$ 蕴涵 $B$”，“$A$ 成立仅当 $B$ 成立”，“$A$ 是 $B$ 的充分条件”，“$B$ 是 $A$ 的必要条件”. 表达式“$A\Rightarrow B$”等价于“$(\neg A)\vee B$”和“$\neg(A\&(\neg B))$”. 此外，还使用像“$A\Leftrightarrow B$”的符号，这表示“$(A\Rightarrow B)\&(B\Rightarrow A)$”. “$A\Leftrightarrow B$”等价于“$A$ 成立当且仅当 $B$ 成立”，“$A$ iff $B$”，“$A$ 等价于 $B$”，“$A$ 是 $B$ 的充分必要条件”.

除前面的符号外，我们另外使用两个缩写：“$(x)$”表示“对于全体 $x$”或“对于每一个 $x$”，而“$(\exists x)$”表示“存在一个 $x$”或“对于某一个 $x$”. 因此表达式$(x)(\exists y)(x<y)$是指对于每一个 $x$ 都存在一个 $y$ 大于 $x$. 类似地，$(\exists y)(x)(x<y)$是指存在一个 $y$ 大于每一个 $x$. 要注意这两个陈述是不同的：应用于实数时，第一个陈述正确，而第二个陈述错误.

由于说存在一个 $x$ 使得 $A(x)$并不意味着对于每个 $x$ 有$\neg A(x)$，所以$(\exists x)A(x)\Leftrightarrow\neg(x)\neg A(x)$. 类似地，$(x)A(x)\Leftrightarrow\neg(\exists x)\neg A(x)$. 这个规则在我们想要表达复杂陈述的否定时常常是方便的. 因此

* 此为原书页码. ——编辑注

⊖ 括号中的数字参见本书后面的“参考文献”.

$$\neg\{(x)(\exists y)(x<y)\}\Leftrightarrow\neg(x)\neg(y)\neg(x<y)$$

$$\Leftrightarrow(\exists x)(y)\neg(x<y)$$

2 $$(\exists x)(y)(y\leqslant x),$$

其中我们用实数的性质推出$\neg(x<y)\Leftrightarrow(y\leqslant x)$.

有时我们也对标准的逻辑符号进行略微的改动. 我们写 $(\varepsilon>0)(\cdots)$，$(\exists\delta>0)(\cdots)$，$(\exists x\in A)(\cdots)$，意味着“对于每个大于 0 的 $\varepsilon(\cdots)$”，“存在一个 大于 0 的 $\delta$ 使得$(\cdots)$”，“存在集合 $A$ 中的一个 $x$ 使得$(\cdots)$”. 这种改动简化了表达. 例如，用标准逻辑符号，$(\varepsilon>0)(\cdots)$应写为$(\varepsilon)\{(\varepsilon>0)\Rightarrow(\cdots)\}$.

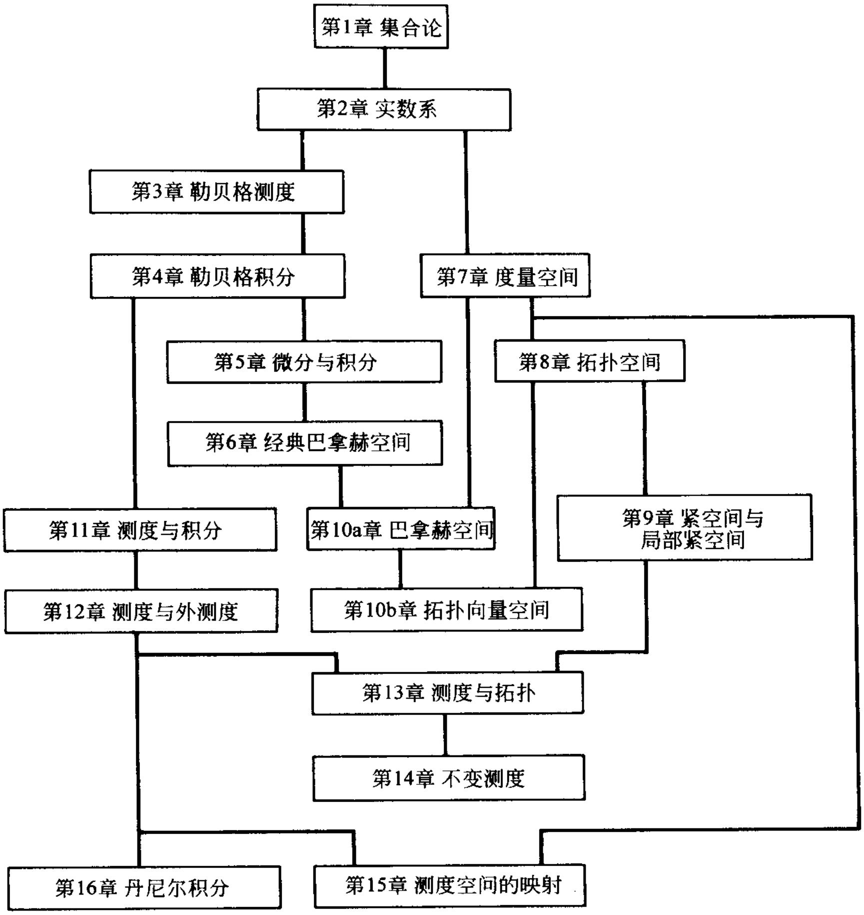
关于如何正式地使用逻辑符号的全面论述，可参考 Suppes[14].

**陈述及其证明.** 绝大多数数学中的主要陈述(定理、命题等)有其标准的形式：“如果 $A$，那么 $B$”或者用符号表达为“$A\Rightarrow B$”. $A\Rightarrow B$ 的*逆否命题*为$(\neg B)\Rightarrow(\neg A)$. 很显然，一个陈述和它的逆否命题是等价的；也就是说，如果一个为真，另一个亦为真. 证明一个形如“$A\Rightarrow B$”的定理的直接方法是从 $A$ 开始，推出它的各个结论，然后以 $B$ 结束. 有时用逆否法更容易证明一个定理，即从$\neg B$ 开始导出$\neg A$. 第三种证明方法是反证法或*归谬法*：从 $A$ 和$\neg B$ 开始，导出矛盾. 强烈建议不要使用反证法！这有两个理由：首先，这样的证明通常有错，最后的矛盾是由前面的错误推导而不是 $A$ 与$\neg B$ 的不相容性引起的. 其次，即使正确，也看不出多少 $A$ 与 $B$ 之间的联系. 而直接证明与逆否证明构造了连接 $A$ 与 $B$ 的论证的链. 用反证法比用直接证法和逆否证法容易出错的原因是，在直接方法中(假定假设不总是错的)，当假设成立时，所有从假设推导出的陈述是正确的，类似地，对于逆否法，当结论是错的时候，从结论的否推导出的陈述是正确的. 这两种方法，一种处理的是正确的陈述，一种是关于什么是正确的直觉和知识，它们有助于避免做出错误的陈述. 然而，用反证法，你假定了不真实的世界(假定定理是正确的)，其中任何陈述都可推导出来，因而陈述的错误显示不出错误的
3 推理.

本书每一章的主要陈述连续依次编号，它们以引理、命题、定理或系的形式出现. 定理将被经常使用，因此应该记住. 命题本身也有独立的意义但不经常使用，而引理通常仅用来证明本节的命题和定理. 同一章引用的陈述使用编号说明，如定理 17. 引用其他章的陈述以形如命题 3.21 出现，意思是第 3 章的命题 21. 关于习题也使用了类似的约定. 本书尽量避免各章之间陈述的引用，而是用诸如“勒贝格收敛定理”来命名定理；还有一些对编号的陈述的引用，它们大多是辅助性的引用，学生应该知道而不一定去参考.

定理、命题等的证明以“**证明**”开始而以符号“■”结束. “■”的含义是“这完成了证明”. 若一个定理具有形式“$A\Leftrightarrow B$”，则证明通常分为两部分：一是“仅当”部分，证明 $A\Rightarrow B$；二是“当”部分，证明 $B\Rightarrow A$.

**各章之间的关联性.** 每一章和前面各章的关联可参阅下图. 10a 表示 10.1～10.4 和 10.8
4 节；10b 表示 10.5～10.7 节.


第1章 集合论
第2章 实数系
第3章 勒贝格测度
第4章 勒贝格积分
第7章 度量空间
第5章 微分与积分
第8章 拓扑空间
第6章 经典巴拿赫空间
第11章 测度与积分
第10a章 巴拿赫空间
第9章 紧空间与
局部紧空间
第12章 测度与外测度
第10b章 拓扑向量空间
第13章 测度与拓扑
第14章 不变测度
第16章 丹尼尔积分
第15章 测度空间的映射

5

# 目　录

## 第三部分 一般测度与积分论

# 第1章 集 合 论

## 1.1 引言

集合论是现代数学最重要的工具之一. 对集合及其在数学基础中的使用的研究始于19世纪与20世纪之交的康托尔、弗雷格、罗素等人，他们的研究似乎表明所有数学都可以仅仅建立在集合论之上. 事实上绝大部分数学可以建立在集合论之上，但是这个集合论不是像弗雷格、罗素所设想的那样简单自然；原因是人们很快发现自由地、无批判地使用集合论会导致矛盾，因此对集合论的研究必须在设计出多种方案以排除这些矛盾的基础上小心翼翼地开展. 大致说来，当人们使用的集合"太大"时，例如试图描述一个包含所有事情的集合时，矛盾便出现了. 本书中我们用以下方法来避免这些矛盾：在我们讨论的范围内，固定某个集合或空间 $X$，且仅考虑那些元素取自 $X$ 中的元素的集合，或元素取自 $X$ 的子集的集合(这种集合称为集簇)，或元素取自 $X$ 的子集的集簇的集合(这种集合称为集族)，等等. 在前面的几章，通常假定 $X$ 为全体实数.

本章我们描述一些后面要用到的集合论概念，所给出的论断不太严密，不讲求在集合论的固有基础上严格论证，但(希望)可被理解. 这里给出的描述和记号绝大部分与哈尔莫斯在他的 6
书 Naive Set Theory[5]中所描述的集合论一致. 然而与本书的目标与风格相应，像自然数、有理数、函数等概念假设为原始的、已知的，而在哈尔莫斯的书中则可以根据集合论的概念来严格定义这些概念.

关于集合论的公理化讨论，建议读者参考萨比的书 Axiomatic Set Theory[14]或者凯利的书 General Topology[9]的附录.

自然数(正整数)在本书中极为重要，因此我们引入特殊记号 $\mathbf{N}$ 来表示自然数集. 同时我们承认数学归纳法及良序原理. 数学归纳法指的是，如果 $P(n)$ 是对每个自然数 $n$ 都有定义的命题，那么 $\{P(1)\ \&\ [P(n)\Rightarrow P(n+1)]\}\Rightarrow(n)P(n)$. 良序原理则断言自然数集 $\mathbf{N}$ 的每一个非空子集都有一个最小元素.

集合论的基本概念是集合与集合的成员. 我们用符号"$\in$"表示后一个概念，用 $x\in A$ 来表示"$x$ 是 $A$ 的一个元素(或成员)"这一陈述. 一个集合完全由它的元素所确定，也就是说，如果对两个集合 $A$ 和 $B$，$x\in A$ 当且仅当 $x\in B$，那么 $A=B$. 假定集合 $A$ 中的每个元素都在集合 $B$ 内，即 $x\in A\Rightarrow x\in B$；那么我们说 $A$ 是 $B$ 的一个子集或者 $A$ 包含于 $B$，记为 $A\subset B$. 因此我们总是有 $A\subset A$，而且若 $A\subset B$ 且 $B\subset A$，则 $A=B$. 谈到"包含"的概念，我们或许遇到比较遗憾的事情：英语短语"contained in"通常既可用来表达概念"$\in$"又可用来表达概念"$\subset$"，但这里我们仅用它来表达后一种概念. 当我们写"$x\notin A$"，意味着"非$(x\in A)$"，即 $x$ 不是 $A$ 的一个元素.

由于集合由它的元素所确定，所以确定一个集合最常用的方法之一就是列出它的所有元素，因此集合有以下定义：集合 $A$ 是 $X$ 中所有具有性质 $P$ 的元素 $x$ 的总体，简写为

$$A = \{x \in X : P(x)\}.$$

因此 $x \in A \Leftrightarrow [x \in X \ \& \ P(x)]$. 其中，当集合 $X$ 熟知时，有时简写为⊖

7
$$A = \{x : P(x)\}.$$

我们通常考虑一个具有一些元素的集合，但为方便起见我们也考虑一个不具有任何元素的集合. 由于集合完全由它的元素所确定，因此这样的集合仅有一个，我们称它为**空集**，且记为 $\varnothing$. 若 $A$ 是任意集合，那么 $\varnothing$ 的每个成员(实际上一个也没有)都是 $A$ 的成员，因而 $\varnothing \subset A$. 因此，空集是任意集合的一个子集.

如果 $x$，$y$，$z$ 是 $X$ 的元素，我们定义集合 $\{x\}$ 为具有惟一元素 $x$ 的集合；集合 $\{x, y\}$ 为恰有两个元素 $x$ 和 $y$ 的集合；集合 $\{x, y, z\}$ 为由元素 $x$，$y$，$z$ 构成的集合；等等. 集合 $\{x\}$ 称为**单元集**或 $x$ 的**单元素集**. 我们必须仔细区分 $x$ 与 $\{x\}$. 例如，总是有 $x \in \{x\}$，而几乎没有 $x \in x$.

在集合 $\{x, y\}$ 中，$x$ 对 $y$ 没有任何优先关系，即 $\{x, y\} = \{y, x\}$. 因此，我们称 $\{x, y\}$ 为**无序对**. 通常也很有必要考虑**有序对** $\langle x, y\rangle$，这里我们区分第一个元素 $x$ 与第二个元素 $y$. 因此 $\langle x, y\rangle = \langle a, b\rangle$ 当且仅当 $x = a$ 和 $y = b$，自然地，若 $x \neq y$ 则 $\langle x, y\rangle \neq \langle y, x\rangle$. 类似地，我们考虑有序三元组 $\langle x, y, z\rangle$，四元组 $\langle x, y, z, w\rangle$，等等，这里我们区分第一个元素，第二个元素，第三个元素……虽然可以通过无序对来定义有序对，三元组，等等(参见哈尔莫斯书中的定义)，但是这里并不这么做.

如果 $X$ 和 $Y$ 是两个集合，我们定义它们的**笛卡儿积**或**直积** $X \times Y$ 为其第一个元素属于 $X$、第二个元素属于 $Y$ 的有序对 $\{\langle x, y\rangle\}$ 的总体构成的集合. 类似地，$X \times Y \times Z$ 是使得 $x \in X$，$y \in Y$，$z \in Z$ 的有序三元组 $\{\langle x, y, z\rangle\}$ 的总体构成的集合. 如果 $X$ 为全体实数，那么 $X \times X$ 是全体有序实数对，如同我们从解析几何所知道的那样，它等价于平面上的点集. 我们有时将 $X \times X$ 写为 $X^2$，将 $X \times X \times X$ 写为 $X^3$，等等.

**习题**

1. 证明 $\{x: x \neq x\} = \varnothing$.
2. 证明：如果 $x \in \varnothing$，那么 $x$ 是一头绿眼狮子.
3. 证明：一般说来 $X \times (Y \times Z)$ 与 $(X \times Y) \times Z$ 是不同的，但它们中的任一个都与 $X \times Y \times Z$ 有一个自然对应.

8
4. 证明良序集原理蕴涵数学归纳法原理. [考虑集合 $\{n \in \mathbf{N}$：命题 $P(n)$ 是错的$\}$.]
5. 用数学归纳法来建立良序原理. [给定一正整数集 $S$，令 $P(n)$ 为命题"若 $n \in S$，则 $S$ 有一个最小元素".]

## 1.2　函数

谈到从 $X$ 到 $Y$ 的函数 $f$，我们指的是这样的规则：对 $X$ 中的每个 $x$ 指定 $Y$ 中的惟一元素 $f(x)$ 与之对应. $X \times Y$ 中所有形如 $\langle x, f(x)\rangle$ 的有序点对称为函数 $f$ 的**图像**. $X \times Y$ 的子集 $G$

⊖ (直接或间接)给出对 $X$ 的限制是必要的，否则，我们会遇到所谓的罗素悖论(参见 Suppes[14]，第 6 页).

是 $X$ 上函数的图像，当且仅当对每个 $x\in X$，$G$ 中有惟一的有序点对，其第一个元素是 $x$. 由于一个函数可以由它的图像所确定，因此许多人常常将函数的图像作为它的定义. 但即便如此或者用函数的原始概念都与我们的目标关系不大[⊖].

函数又称映射，我们将 $f$ 是 $X$ 到 $Y$ 的函数这一事实记为

$$f: X \to Y.$$

集合 $X$ 称为 $f$ 的*定义域*. 函数 $f$ 可以取到的值的集合 $\{y\in Y: (\exists x)[y=f(x)]\}$ 称为*值域*. 一般说来函数 $f$ 的值域比 $Y$ 小. 如果函数 $f$ 的值域就是 $Y$，则称函数 $f$ 是 $Y$ **映上的**.（此时也可用另一个术语：$f$ 是*满射的*.）

若 $A$ 是 $X$ 的子集，我们定义它在映射 $f$ 下的像为集合 $Y$ 中可以表示成 $y=f(x)$ 的元素的总体，其中 $x$ 属于 $A$. 我们将像记为 $f[A]$ 9

$$f[A] = \{y \in Y: (\exists x)[x \in A,\quad y = f(x)]\}.$$

因此 $f$ 的值域为 $f[X]$，且 $f$ 是 $Y$ 映上的当且仅当 $Y=f[X]$.

比一个集合在映射 $f$ 下的像更为重要的概念是一个集合在映射 $f$ 下的逆像. 如果 $B$ 是 $Y$ 的一个子集，我们定义它在映射 $f$ 下的**逆像** $f^{-1}[B]$ 为 $X$ 中使得 $f(x)$ 属于 $B$ 的元素集合；即

$$f^{-1}[B] = \{x \in X: f(x) \in B\}.$$

我们应注意 $f$ 是映上 $Y$ 的当且仅当 $Y$ 的每个非空子集的逆像非空.

函数 $f$: $X\to Y$ 称为**一对一**的(或*单叶*，*单射*)，若等式 $f(x_1)=f(x_2)$ 仅当 $x_1=x_2$ 时成立. 从 $X$ 到 $Y$ 的一对一函数通常也称为 $X$ 与 $Y$ 间的一一对应(它们也被称为*双射*). 在这种情形下存在一个函数 $g$ 使得对所有 $x$ 和 $y$，有 $g(f(x))=x$ 和 $f(g(y))=y$. 函数 $g$ 就称为 $f$ 的逆，有时用记号 $f^{-1}$ 来表示.

注意，如果把 $g$ 表示为 $f^{-1}$，那么 $f^{-1}[E]$ 可看成是 $E$ 在 $f$ 的逆像或是 $E$ 在 $f^{-1}$ 的像. 好在根据我们规定的记号，这两个集合是相同的.

对于两个函数 $f$: $X\to Y$ 与 $g$: $Y\to Z$，我们通过令 $h(x)=g(f(x))$ 来定义一个新的函数 $h$: $X\to Z$. 函数 $h$ 称为 $g$ 的 $f$ *复合函数*，记为 $g\circ f$. 对于函数 $f$: $X\to Y$ 与 $X$ 的一个子集 $A$，我们定义一个新的函数 $g$: $A\to Y$，使得 $g(x)=f(x)$ 对所有 $x\in A$ 成立. 这个新函数 $g$ 称为 $f$ 在 $A$ 的*限制*，有时写为 $f\mid A$. 在许多情形下都要仔细区分函数 $g$ 与 $f$. 它们的值域不同，并且一个集合在映射 $f$ 下的逆像与其在映射 $g$ 下的逆像也是不同的.

在用有序对来定义函数之后，我们应该指出，反过来，也可通过函数来定义有序对. 一个有序对是一个定义在集合 $\{1, 2\}$ 的函数. 类似地，一个**有限序列**或一个 $n$ 元组，是一个定义在前 $n$ 个自然数的函数，即集合 $\{i\in \mathbf{N}: i\leqslant n\}$.（我们称这样的集合为 $\mathbf{N}$ 的一个*片段*.）类似地，一个**无限序列**是定义在自然数集 $\mathbf{N}$ 的函数. 我们用术语"序列"来表示一个有限或无限序列. 若一个序列的值域在 $X$ 内，则说该序列是取自 $X$ 的序列或 $X$ 的元素的序列. 通常在讨论序列的时候，我们将函数在 $i$ 的值记为 $x_i$ 且称这个值为该序列的第 $i$ 个元素. 这与常用的函数记号

⊖ 函数与其图像的等价性仅当它是从一给定集 $X$ 到另一集 $Y$ 的函数时才是对的，而其他情况考虑这种等价性会遇到困难，例如在定义恒同函数($i(x)=x$ 对所有 $x$)的图像时. 因此在把函数当成原始概念正式处理时，必须有描述函数性质的公理，如 $(f=g)\Leftrightarrow(x)[f(x)=g(x)]$，正如同我们必须有能够构造函数的公理.

有所不同. 我们通常将有序 $n$ 元组记为$\langle x_i\rangle_{i=1}^n$，而将无限序列记为$\langle x_i\rangle_{i=1}^\infty$. 在不会造成误解时，常简单记为$\langle x_i\rangle$. 序列$\langle x_i\rangle$的值域为集合$\{x_i\}$. 因此，有序 $n$ 元组$\langle x_i\rangle_{i=1}^n$的值域是无序 $n$
10 元组$\{x_i\}_{i=1}^n$. 函数的这个记号是合理的，因为它与我们早先关于有序对与无序对、三元组等的记号是一致的.

若集合 $A$ 是某个序列的值域，则称它为**可数**的. 若集合 $A$ 是某个有限序列的值域则称它为**有限**的. 非有限的集合称为无限集.（许多作者把"可数"集的定义限定为无限可数的集合，而我们的定义却包含了可数集中的有限集.）这里用"可数无限"这个术语来描述无限可数集. 在 1.6 节，我们将再次讨论这个概念.

以下原理给出一个定义无限序列的有用方法：

**递归定义原理** 令 $f$ 为集合 $X$ 到其自身的一个函数，$a$ 是 $X$ 的一个元素，那么存在 $X$ 中的惟一无限序列$\langle x_i\rangle$使得 $x_1=a$ 且对于每个 $i$，$x_{i+1}=f(x_i)$.

直观上看这种序列的存在性是很清楚的：定义 $x_1=a$，$x_2=f(a)$，$x_3=f(f(a))$，以此类推. 稍微正式一点的证明可如下给出：首先根据对 $n$ 的归纳证明，对每个自然数 $n$ 存在惟一的有限序列

$$x_1^{(n)},x_2^{(n)},\cdots,x_n^{(n)},$$

使得

$$x_1^{(n)}=a \quad 与 \quad x_{i+1}^{(n)}=f(x_i^{(n)}),\quad 1\leqslant i<n.$$

由惟一性得出 $x_i^{(n)}=x_i^{(m)}$ 对于 $i\leqslant n\leqslant m$ 成立. 因此若定义 $x_n$ 为 $x_n^{(n)}$，则有 $x_i^{(n)}=x_i$ 对 $i\leqslant n$ 成立，并且可看到序列$\langle x_i\rangle$满足原理的要求.

该原理可略推广为：对每个自然数 $n$，令 $f_n$ 为 $X^n$ 到 $X$ 的函数且 $a\in X$，那么 $X$ 中存在惟一的序列$\langle x_i\rangle$使得 $x_1=a$ 且 $x_{i+1}=f_i(x_1,\ \cdots,\ x_i)$.

与序列有关的一个重要概念是子序列. 为说明之，我们首先引入序列单调的概念，若从 $\mathbf{N}$ 到 $\mathbf{N}$ 的映射 $g$ 满足$(i>j)\Rightarrow(g(i)>g(j))$，则称之为**单调**. 对于一个无限序列(即一个定义域是 $\mathbf{N}$ 的函数)$f$，我们称 $h$ 是 $f$ 的一个无限子序列，若存在一个从 $\mathbf{N}$ 到 $\mathbf{N}$ 的单调映射 $g$ 使得
11 $h=f\circ g$. 如果将 $f$ 写为$\langle f_i\rangle$，$g$ 写为$\langle g_i\rangle$，那么就可以用$\langle f_{g_i}\rangle$来表示 $f\circ g$.

**习题**

6. 令 $f$ 为非空空间 $X$ 到 $Y$ 的映射. 证明 $f$ 是一对一的，当且仅当存在一个映射 $g$ 使得 $g\circ f$ 是 $X$ 上的恒同映射，即对所有 $x\in X$ 有 $g(f(x))=x$.
7. 令 $f$ 为非空空间 $X$ 到 $Y$ 的映射. 证明 $f$ 是映上的，若存在一个映射 $g$ 使得 $f\circ g$ 是 $Y$ 上的恒同映射，即对所有 $y\in Y$ 有 $f(g(y))=y$.（其逆命题见习题 21.）
8. 用数学归纳法证明文中所推广的递归定义原理.

## 1.3 并、交和补

固定一个集合 $X$，考虑它的所有子集组成的集合$\mathcal{P}(X)$. 我们对 $X$ 的子集实施某些基本的集合论运算. 设 $A$ 与 $B$ 是 $X$ 的子集，定义它们的交集 $A\cap B$ 为既属于 $A$ 又属于 $B$ 的所有元素. 因此

$$A \cap B = \{x : x \in A \ \& \ x \in B\}.$$

注意这个定义对 $A$ 和 $B$ 是对称的；即 $A\cap B=B\cap A$. 进一步有 $A\cap B\subset A$ 且 $A\cap B=A\Leftrightarrow A\subset B$. 还有$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$，因此把这个集合写为 $A\cap B\cap C$. 该集合是属于 $A$，$B$ 与 $C$ 的元素的总体.

我们定义两个集合 $A$ 与 $B$ 的并集 $A\cup B$ 为属于 $A$ 或属于 $B$ 的元素. 因此

$$A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}.$$

我们有

$$A \cup B = B \cup A$$
$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C = A \cup B \cup C$$
$$A \subset A \cup B$$
$$A = A \cup B \Leftrightarrow B \subset A.$$

还有关于并与交之间的关系，这些关系称为分配律：

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$ 12

在这些关系中，空集 $\varnothing$ 和空间 $X$ 起着特殊的作用：

$$A \cup \varnothing = A, \quad A \cap \varnothing = \varnothing$$
$$A \cup X = X, \quad A \cap X = A.$$

如果 $A$ 是 $X$ 的一个子集，我们定义 $A$ 的补集 $\widetilde{A}$（相对于 $X$）为 $X$ 的不在 $A$ 中的元素总体. 于是

$$\widetilde{A} = \{x \in X : x \notin A\}.$$

有时也将 $\widetilde{A}$ 写为 $\sim A$. 关于集合的补集，我们有

$$\widetilde{\varnothing} = X, \quad \widetilde{X} = \varnothing$$
$$\widetilde{\widetilde{A}} = A, \quad A \cup \widetilde{A} = X, \quad A \cap \widetilde{A} = \varnothing$$
$$A \subset B \Leftrightarrow \widetilde{B} \subset \widetilde{A}.$$

关于集合的并与交的补有两个特殊的运算律，称之为德摩根律：

$$\sim (A \cup B) = \widetilde{A} \cap \widetilde{B}$$
$$\sim (A \cap B) = \widetilde{A} \cup \widetilde{B}.$$

如果 $A$ 和 $B$ 是 $X$ 的两个子集，我们定义差 $B\sim A$ 或者 $A$ 在 $B$ 中的相对补集为 $B$ 中那些不属于 $A$ 的元素，那么

$$B \sim A = \{x : x \in B \ \& \ x \notin A\}.$$

所以有 $B\sim A=B\cap\widetilde{A}$.

我们也用记号 $A\Delta B$ 来表示两个集合 $A$ 与 $B$ 有如下定义的 *对称差*：

$$A\Delta B = (A \sim B) \cup (B \sim A).$$

两个集合的对称差为那些仅属于它们其中一个集合的点的总体.

若两个集合的交集为空集，称这两个集合是**不相交**的. 若一个集簇 $\mathcal{C}$ 中的任何两个集合都不相交，则称该集簇 $\mathcal{C}$ 为**不交集簇**或两两不相交的集簇.