数學科技叢書18（下）

APOSTOL

微積分題解（下）

亞帕斯特　著　　張中堯等編寫

水牛出版社

水牛出版社

The Buffalo Book Co.

特價250元

數學科技叢書

18 ㊦

微積分題解

（下册）

張中堯　等著

水牛出版社

微積分題解（下）

數學科技叢書18

編　　者：張　中　堯　等　著
發 行 人：彭　　誠　　晃
出 版 者：水牛圖書出版事業有限公司
地　　址：台北市金山南路一段135號2樓
電　　話：3410275・3215644
郵政劃撥13932號
初　　版：中華民國66年7月20日
再　　版：中華民國76年4月15日

登記證　局版台業字第0628號

目　　次(下册)

第 八 章

Introduction to differential equations ······ 1

(原書 P 311　Sec. 8.5) ······ 1

(原書 P 319　Sec. 8.7) ······ 12

(原書 P 328　Sec. 8.14) ······ 22

(原書 P 333　Sec. 8.17) ······ 28

(原書 P 339　Sec. 8.19) ······ 37

(原書 P 344　Sec. 8.22) ······ 40

(原書 P 347　Sec. 8.24) ······ 44

(原書 P 355　Sec. 8.28) ······ 45

第 九 章

Complex numbers ······ 55

(原書 P 365　Sec. 9.6) ······ 55

(原書 P 371　Sec. 9.10) ······ 57

第 十 章

Sequences, infinite series, improper integrals ······ 65

(原書 P 382　Sec. 10.4) ······ 65

（原書P391　Sec. 10.9）…… 81
（原書P393　Sec. 10.10）…… 96
（原書P398　Sec. 10.14）…… 101
（原書P402　Sec. 10.16）…… 112
（原書P409　Sec. 10.20）…… 124
（原書P414　Sec. 10.22）…… 158
（原書P420　Sec. 10.24）…… 175

第十一章
Sequences and series of functions …… 195
（原書P430　Sec. 11.7）…… 195
（原書P438　Sec. 11.13）…… 212
（原書P443　Sec. 11.16）…… 231

第十二章
Vector algebra …… 235
（原書P450　Sec. 12.4）…… 235
（原書P456　Sec. 12.8）…… 238
（原書P460　Sec. 12.11）…… 242
（原書P467　Sec. 12.15）…… 248
（原書P470　Sec. 12.17）…… 253

第十三章
Applications of vector algebra to analytic geometry …… 257
（原書P477　Sec. 13.5）…… 257
（原書P482　Sec. 13.8）…… 265

（原書 P 487　Sec. 13.11）……277
（原書 P 491　Sec. 13.14）……289
（原書 P 496　Sec. 13.17）……300

第十四章

Calculus of vector-valued functions……315
（原書 P 516　Sec. 14.4）……315
（原書 P 524　Sec. 14.7）……325
（原書 P 528　Sec. 14.9）……334
（原書 P 535　Sec. 14.13）……343
（原書 P 538　Sec. 14.15）……360
（原書 P543　Sec. 14.19）……369
（原書 P 549　Sec. 14.21）……380

第 八 章

9. Find all solutions of $(x-2)(x-3)y' + 2y = (x-1)(x-2)$ on each of the following intervals: (a) $(-\infty, 2)$; (b) $(2, 3)$; (c) $(3, +\infty)$. Prove that all solutions tend to a finite limit as $x \to 2$, but that none has a finite limit as $x \to 3$.

[Sol] $$y' + \frac{2y}{(x-2)(x-3)} = \frac{(x-1)(x-2)}{(x-2)(x-3)}$$

$$= \frac{x-1}{x-3} \quad （因爲 x \neq 2，x \neq 3）$$

$$A(x) = \int_a^x \frac{2}{(t-2)(t-3)}\,dt = 2\int_a^x \frac{1}{(t-2)(t-3)}\,dt$$

$$= 2\int_a^x \left(\frac{1}{t-3} - \frac{1}{t-2}\right) dt$$

$$= 2\left(\ln|t-3| - \ln|t-2| \Big|_a^x\right)$$

$$= 2\left(\ln\left|\frac{x-3}{x-2}\right| - \ln\left|\frac{a-3}{a-2}\right|\right).$$

$$e^{-A(x)} = \left(\frac{x-2}{x-3}\right)^2 \left(\frac{a-3}{a-2}\right)^2 \quad , \quad e^{A(x)} = \left(\frac{x-3}{x-2}\right)^2 \left(\frac{a-2}{a-3}\right)^2$$

因爲(a)(b)(c)三個條件不影響 $e^{-A(x)}$ 與 $e^{A(x)}$ 的值，所以三個解是一樣的

$$y=b\left(\frac{x-2}{x-3}\right)^2\left(\frac{a-3}{a-2}\right)^2+\left(\frac{x-2}{x-3}\right)^2\int_a^x\frac{(t-1)(t-3)}{(t-2)^2}\,dt$$

$$=b\left(\frac{x-2}{x-3}\right)^2\left(\frac{a-3}{a-2}\right)^2+\left(\frac{x-2}{x-3}\right)^2\int_a^x\frac{(y+1)(y-1)}{y^2}\,dy$$

（以 $y=t-2$ 代入）

$$=b\left(\frac{x-2}{x-3}\right)^2\left(\frac{a-3}{a-2}\right)^2+\left(\frac{x-2}{x-3}\right)^2\left[\int_a^x\left(1-\frac{1}{y^2}\right)dy\right]$$

$$=b\left(\frac{x-2}{x-3}\right)^2\left(\frac{a-3}{a-2}\right)^2+\left(\frac{x-2}{x-3}\right)^2\left(x+\frac{1}{x-2}-a-\frac{1}{a-2}\right)$$

$$=\left(\frac{x-2}{x-3}\right)^2\left(x+\frac{1}{x-2}+C\right)$$

$x\to 2$ 時，

$$y=\frac{(x-2)}{(x-3)^2}\left[x(x-2)+1+C(x-2)\right]\to C$$

而 $x\to 3$ 時，

因爲分子裏不可能有 $(x-3)^2$ 的因式，

故分母裏至少有一 $(x-3)$ 的因式，

所以，極限不存在。

10. Let $s(x)=(\sin x)/x$ if $x\neq 0$, and let $s(0)=1$. Define $T(x)=\int_0^x s(t)\,dt$. Prove that the function $f(x)=xT(x)$ satisfies the differential equation $xy'-y=x\sin x$ on the interval $(-\infty,+\infty)$ and find all solutions on this interval. Prove that the differential equation has no solution satisfying the initial condition $f(0)=1$, and explain why this does not contradict Theorem 8.3.

[Sol](1) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos x}{1} = 1 = s(0)$.

$\therefore$ $s(x)$是 continuous function on $(-\infty, \infty)$

$\Rightarrow T'(x) = s(x)$. (By the first fundamental theorem of calculus.)

$$f(x) = x \cdot \int_0^x s(t)\,dt \ .$$

$$f'(x) = xT'(x) + T(x) = \sin x + \int_0^x \frac{\sin t}{t}\,dt \ .$$

$\therefore$ $x \cdot f'(x) - f(x)$

$$= x \sin x + x \int_0^x s(t)\,dt - x \int_0^x s(t)\,dt$$

$$= x \sin x$$

$\therefore$ $f(x)$滿足 $xy' - x = x \sin x$.

(2) $xy' - y = x \sin x$ 求它的一般解。

我們須要一個Lemma:

設 $f(x)$是

$M(x, y)y' + N(x, y)y = Q(x, y)$ 之一特殊解。

則 $q(x)$是 $M(x, y)y' + N(x, y)y = 0$ 之一解。

若且唯若 $q(x) + f(x)$是

$M(x, y)y' + N(x, y)y = Q(x, y)$ 之一解。

所以我們先求 $xy' - y = 0$ 在 $(-\infty, \infty)$ 中的一般解。

我們又知道:

若 $f(x)$ 是 $xy' - y = 0$, $x \in (-\infty, \infty)$ 的一解,

則 $f(x)$ 亦是 $xy' - y = 0$, $x \in \forall$ interval 的一解。

而 $xy' - y = 0$ 在 $x \in (0, \infty)$ 時之解爲

$$y' - \frac{1}{x}y = 0 \quad (\because \ x \neq 0)$$

$a \in (0, \infty)$

$$y = be^{-\int_a^x \frac{-1}{t}dt} = be^{\ln|x| - \ln|a|}$$

$$= be^{\ln x - \ln a} = \frac{b}{a}x = cx \qquad c \in \boldsymbol{R}$$

$xy' - y = 0$ 在 $x \in (-\infty, 0)$ 時之解爲

$$y' - \frac{1}{x}y = 0$$

$a \in (-\infty, 0)$

$$y = be^{-\int_a^x -\frac{1}{t}dt} = be^{\ln|x| - \ln|a|}$$

$$= be^{\ln(-x) - \ln(-a)} = b\frac{-x}{-a} = \frac{b}{a}x = kx.$$

因爲以上的解均是一般解。故在 $x \in (-\infty, \infty)$ 時之解 y，在 $(0, \infty)$ 上只能爲 $y = cx$，在 $(-\infty, 0)$ 上爲 $y = kx$，當然 y 必須是 continuous，$\Rightarrow$ $y(0) = 0$

因爲 y 是 differentiable $\Rightarrow$ $c = k$ $\Rightarrow$ $y(x) = kx$.

$\because$ $xy' - y = 0$ 之一般解爲 $y = kx$，$k \in \boldsymbol{R}$.

$\therefore$ $xy' - y = x \sin x$ 之一般解 $x \in (-\infty, \infty)$.

爲 $y = kx + x\int_0^x \frac{\sin t}{t}dt$. $\quad k \in \boldsymbol{R}$.

【註】 必須要用這樣繞圈子的方法作，因爲我們僅憑觀察知 $y = kx$ 爲 $xy' - y = 0$ 之解，並不能保證它所有的解皆是如此型式。

(3) $y(0) = 0$，$\because$ No solution satisfies $f(0) = 1$

這並不和 Theorem 8.3 矛盾。

因爲 Theorem 8.3 的條件中 $P(x)$ 和 $Q(x)$ 必須 continuous on the open interval I.

而 $xy'-y=x\sin x$ 在 $(-\infty,\infty)$ 中，不能化爲

$$y'-\frac{1}{x}y=\frac{x\sin x}{x}$$ ，也可說 $\frac{1}{x}$ 在 $(-\infty,\infty)$ 中非連續。

11. **Prove that there is exactly one function f, continuous on the positive real axis, such that**

$$f(x)=1+\frac{1}{x}\int_1^x f(t)\,dt$$

for all $x>0$ and find this function.

[Sol] 若 $f_1(x)$，$f_2(x)$ 皆爲其解，且 $f_1(x)$，$f_2(x)$ 皆 continuous，

則 $$\begin{cases} f_1(x)=1+\dfrac{1}{x}\displaystyle\int_1^x f_1(t)\,dt & xf_1(x)-x=\displaystyle\int_1^x f_1(t)\,dt \\ f_2(x)=1+\dfrac{1}{x}\displaystyle\int_1^x f_2(t)\,dt & xf_2(x)-x=\displaystyle\int_1^x f_2(t)\,dt . \end{cases}$$

$$x[f_1(x)-f_2(x)]=\int_1^x [f_1(t)-f_2(t)]\,dt .$$

令 $f_1(x)-f_2(x)=g(x)$.

得 $$xg(x)=\int_1^x g(t)\,dt \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(*)$$

因爲 $g(x)=f_1(x)-f_2(x)$，$g(x)$ 亦 continuous.

$\therefore$ $\int_1^x g(t)\,dt$ 是 differntiable on x.

$\Rightarrow xg'(x)+g(x)=g(x) \Rightarrow xg'(x)=0$

$\Rightarrow g'(x)=0 \Rightarrow g(x)=c \quad (c \in \mathbf{R})$.

代入(*)則得 $\quad cx=cx-c \Rightarrow c=0$,

$\Rightarrow g(x)=0=f_1(x)-f_2(x) \qquad x>0$,

$\Rightarrow f_1(x)=f_2(x)$.

∴ continuous 解最多只有一個。 今證明確實存在一個.

先假定存在 continuous $f(x)$ 滿足上述方程式，試試看能否將它解出。

由 $\quad f(x)=1+\dfrac{1}{x}\displaystyle\int^{x} f(t)\,dt \Rightarrow xf(x)-x=\int^{x} f(t)\,dt$.

由 $f(t)$ 的 continuous 性質 => 上式可微分，

$\Rightarrow xf'(x)+f(x)-1=f(x) \Rightarrow xf'(x)=1$,

$\Rightarrow f'(x)=\dfrac{1}{x} \Rightarrow f(x)=\log x+c$.

代入原式中得 $\quad \log x+c=1+\dfrac{1}{x}\displaystyle\int_{1}^{x}(\log t+c)\,dt$

$$\log x+c=1+\frac{1}{x}\left(\int_{1}^{x}\log t\,dt+cx+c\right)$$

$$=1+\frac{1}{x}\left(x\log x-x\Big|_{1}^{x}+cx-c\right)$$

$$+\frac{1}{x}(x\log x-x+1+cx-c)$$

$$= 1 + \log x - 1 + \frac{1}{x} + c - \frac{c}{x}$$

$$= \log x + \frac{1-c}{x} + c \ .$$

令 $c = 1$ 時，等邊二邊相等。故我們已求出 $\log x + 1$ 爲所求。得證恰存在一連續函數 $f(x) = \log x + 1$ 滿足

$$f(x) = 1 + \frac{1}{x}\int_{1}^{x} f(t)\,dt \ .$$

The Bernoulli equation. A differential equation of the form $y' + P(x)y = Q(x)y^n$, where n is not 0 or 1, is called a Bernoulli equation. This equation is nonlinear because of the presence of y^n. The next exercise shows that it can always be transformed into a linear first-order equation for a new unknown function v, where $v = y^k$, $k = 1 - n$.

13. Let k be a nonzero constant. Assume P and Q are continuous on an interval I. If $a \in I$ and if b is any real number, let $v = g(x)$ be the unique solution of the initial-value problem $v' + kP(x)v = kQ(x)$ on I, with $g(a) = b$. If $n \neq 1$ and $k = 1 - n$, prove that a function $y = f(x)$, which is not identically zero on I, is a solution of the initial-value problem

$$y' + P(x)y = Q(x)y^n \quad \text{on } I, \quad \text{with } f(a)^k = b$$

if and only if the kth power of f is equal to g on I.

In each of Exercises 14 through 17, solve the initial-value problem on the specified interval.

[Sol]

(1) [If] part:

已知，$g(a) = b$ 且 $g'(x) + (1-n)P(x)g(x) = (1-n)Q(x)$

$f^k(x) = f^{(1-n)}(x) = g(x) \quad \text{on } I$

=> $(f^k)'(x) + (1-n)P(x)f^k(x) = (1-n)Q(x)$

=> $(1-n)f^{-n}(x)f'(x) + (1-n)P(x)f^{(1-n)}(x) = (1-n)Q(x)$

=> $f'(x)f^{-n}(x) + P(x)f^{(1-n)}(x) = Q(x)$

=> $f'(x)+P(x)f(x)=Q(x)f^{n}(x)$

=> $y=f(x)$ 滿足 $y'+p(x)y=Q(x)y^{n}$ 且 $f^{(1-n)}(a)=b$.

(2) [Only If] part:

已知，$y=f(x)$ 是 $y'+P(x)y=Q(x)y^{n}$ on I & $f(a)^{k}=b$ 之解。

則令 $v=y^{(1-n)}$ => $v'=(1-n)y^{-n}\cdot y'$

=> $(1-n)y^{-n}y'+(1-n)y^{-n}P(x)y=(1-n)y^{-n}\cdot Q(x)y^{n}$

=> $v'+(1-n)P(x)v=(1-n)Q(x)$ ……………(*)

=> $y^{(1-n)}=f^{(1-n)}(x)=g(x)$ 是(*)的 solution 且

$f^{(1-n)}(x)=b=g(x)$ 故得證。

15. $y'-y=-y^2(x^2+x+1)$ on $(-\infty,+\infty)$, with $y=1$ when $x=0$.

[Sol] $y'-y=-(x^2+x+1)y^2$ on $(-\infty,\infty)$ $y(0)=1$

由習題 13 知 $k=1-2=-1$, ∴ 令 $v=y^{(-1)}$

$$v'+v=x^2+x+1\ ,\ A(x)=\int_0^x 1\,dt=x\ ,\ v(0)=y^{(-1)}(0)=\frac{1}{y(0)}=1$$

$$=>\quad v=e^{-x}+e^{-x}\int_0^x e^{-t}(t^2+t+1)dt$$

$$=e^{-x}+e^{-x}\left[t^2e^t-te^t+2e^t\Big|_0^x\right]$$

$$=e^{-x}[x^2e^x-xe^x+2e^x-1]\quad=y^{-1}$$

$$=>\quad y=e^x\cdot\frac{1}{x^2e^x-xe^x+2e^x-1}=\frac{1}{x^2-x+2-e^{-x}}\ .$$

18. $2xyy'+(1+x)y^2=e^x$ on $(0,+\infty)$, with (a) $y=\sqrt{e}$ when $x=1$; (b) $y=-\sqrt{e}$ when $x=1$; (c) a finite limit as $x\to0$.

$$y' + \frac{1+x}{2x}\, y = \frac{e^x}{2x}\, y^{-1} \qquad k = 1-n = 1+1 = 2$$

$$v' + \frac{1+x}{x}\, v = \frac{e^x}{x}\ , \quad A(x) = \int_1^x \left(1+\frac{1}{t}\right) dt = x + \ln x - 1$$

$$e^{A(x)} = \frac{x}{e}\, e^x \qquad e^{-A(x)} = \frac{e}{x}\, e^{-x}$$

$$v = be \cdot \frac{e^{-x}}{x} + e \cdot \frac{e^{-x}}{x} \int_1^x \left(\frac{e^x}{e} \cdot x\right)\left(\frac{e^x}{x}\right) dx$$

$$= be\, \frac{e^{-x}}{x} + \frac{e^{-x}}{x} \int_1^x e^{2x}\, dx \ = be\, \frac{e^{-x}}{x} + \frac{e^{-x}}{2x}\left(e^{2x} - e^2\right)$$

$$= \frac{e^{-x}}{2x}\left(e^{2x} + c\right) \ = y^2 \ .$$

(a) $x = 1\ ,\ y = e^{\frac{1}{2}}\ ,\ y^2 = e \quad \therefore \quad e^{-1}\left(e^2 + c\right) = 2e \ \Rightarrow\ c = e^2$

$$\therefore \quad y^2 = \frac{e^{-x}}{2x}\left(e^{2x} + e^2\right) = \frac{e^x + e^{2-x}}{2x} \ \Rightarrow\ y = \left(\frac{e^x + e^{2-x}}{2x}\right)^{\frac{1}{2}}$$

(b) $x = 1 \quad y = -\sqrt{e} \ \Rightarrow\ y = -\left(\frac{e^x + e^{2-x}}{2x}\right)^{\frac{1}{2}}$

(c) $x \to 0$ 時有極限值，則

$$c = -1 \ \Rightarrow\ y^2 = \frac{e^{-x}}{2x}\left(e^{2x} - 1\right) \ \Rightarrow\ y = \frac{e^x - e^{-x}}{2x}$$

19. An equation of the form $y' + P(x)y + Q(x)y^2 = R(x)$ is called a *Riccati equation*. (There is no known method for solving the general Riccati equation.) Prove that if u is a known solution of this equation, then there are further solutions of the form $y = u + 1/v$, where v satisfies a first-order linear equation.

"u" 滿足 $y' + P(x)\, y + Q(x)\, y^2 = R(x)$ ……………………(*)

設 $u+\frac{1}{v}$ 亦滿足(*)，我們要求出 v 所滿足的 first order linear equation 來

$$(u+\frac{1}{v})'+P(x)(u+\frac{1}{v})+Q(x)(u+\frac{1}{v})^2$$

$$=u'+(-\frac{1}{v^2}v')+P(x)u+P(x)\frac{1}{v}+Q(x)u^2+2Q(x)\frac{u}{v}$$

$$+Q(x)\frac{1}{v^2}$$

$$=R(x)+(-\frac{1}{v^2})[v'-P(x)v-2Q(x)uv-Q(x)]=R(x).$$

$\Rightarrow \quad v'-(P(x)+2Q(x)u)v-Q(x)=0$

$\Rightarrow \quad v'-[P(x)+2Q(x)u]v=Q(x)$

所以得證：若 v 滿足 $y'-[p(x)+2Q(x)u]y=Q(x)$

則 $u+\frac{1}{v}$ 滿足(*)。

20. The Riccati equation $y'+y+y^2=2$ has two constant solutions. Start with each of these and use Exercise 19 to find further solutions as follows: (a) If $-2\le b<1$, find a solution on $(-\infty,+\infty)$ for which $y=b$ when $x=0$. (b) If $b\ge 1$ or $b<-2$, find a solution on the interval $(-\infty,+\infty)$ for which $y=b$ when $x=0$.

[Sol] $y'+y+y^2=2$ $\quad P(x)=1,\quad Q(x)=1,\quad R(x)=2.$

由觀察可知，$y\equiv 1$，$y\equiv -2$ on $(-\infty,\infty)$ 是它的 constant solution

$y\equiv 1=u$ 時，解 $y'-[p(x)+2Q(x)u]y=Q(x)$

i.e. $y'-3y=1 \qquad A(x)=\int_0^x -3\,dt=-3x$