



初中数学

KE TANG
ZHONG
DE
WEN HAO

课堂中的

上海中学生报社主编

问号

■ 上海人民出版社

课堂中的问号

(初中数学)

上海中学生报社 主编

上海人民出版

责任编辑 汤中仁

特约编辑 刘 懿

封面装帧 杨德鸿

课堂中的问号

(初中数学)

上海中学生报社 主编

上海人民出版社 出版、发行

(上海绍兴路54号 邮政编码200020)

新华书店 上海发行所经销 常熟新骅印刷厂印刷

开本 787×1092 1/32 印张 12.25 字数 251,000

1999年7月第1版 1999年7月第1次印刷

印数 1-5,100

ISBN 7-208-03056-1/G·556

定价:18.40元

编写者 (代数部分)

滕永康 周德飞 胡家安

黄绮平 杜明华

(几何部分)

李道洲 陈子元 沈海燕

李廷雄

统稿者 李廷雄

审 定 邹一心

写在前面的话

《上海中学生报》前身为《中学生知识报》，在当年《中学生知识报》语文、数学、英语三门主课的学科版面上，我们曾开过这样一个栏目：“课堂中的问号”。栏目开设后，学生来信不断，提出了许许多多在这三门课程的学习中所遇到的问题，我们让有经验的教师来解答这些问题，并将这些“问”与“答”在版面上连载。由于这些问题以及解答切合学生的实际需要，因而在连载的几年中，该栏目极受欢迎。

今天，当《中学生知识报》已成为往事，当我们把当年连载于报纸的“问号”集中在一起的时候，我们惊奇地发现，这些文章在今天依然有其实用价值和指导作用，我们因此而萌发了将这些“问号”汇编成书的想法。

在这套《课堂中的问号》语文卷、数学卷和英语卷的编写过程中，我们既保留了原先刊登于《中学生知识报》“课堂中的问号”栏目中的有价值的文章，同时，也对原有文章的不足进行了必要的补充和修改，以便使这套书更适合于今天的中学生的需要。我们相信，这套书的出版，对于初中学生语文、数学、英语这三门主课的学习，会有很大的帮助。

上海中学生报社

1998年6月6日

目 录

代数部分

1. x 与 $-x$ 哪个大?	3
2. 小高斯为什么算得这么快?	4
3. 无理数是“没有道理的数”吗?	6
4. 有理数和无理数有什么区别?	8
5. 你知道三个非负数吗?	9
6. 如何确定因式分解中的公因式?	13
7. 分解因式要达到哪几个标准?	14
8. 怎样将四项式分组分解因式?	16
9. 因式分解的一般步骤有哪些?	18
10. 分式的基本性质与分数的基本性质有哪些相同点 和不同点?	21
11. 应该从哪些方面理解“分式”的概念?	22
12. 通分时, 如何确定公分母?	24
13. 分式运算中, 何时可以避免通分而获得解题捷径? ...	26
14. 你会进行分式的分解吗?	29
15. 分式运算中有哪些常见错误?	32
16. 怎样另辟蹊径, 求一些代数式的值呢?	35
17. $(\sqrt{a})^2$ 与 $\sqrt{a^2}$ 一样吗?	39

18. 代数式在哪些情况下没有意义?	41
19. 怎样理解和掌握公式 $\sqrt{a^2} = a $?	43
20. 常用的有理化因式有哪些?	45
21. 为什么零的零次幂没有意义?	47
22. 为什么可以把幂的运算转化为指数运算?	49
23. 把指数概念加以推广有何意义?	50
24. $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$ 成立有条件吗?	52
25. 怎样应用指数幂的概念解题?	52
26. 等号两边一定相等吗?	54
27. 解方程时怎样去分母更简便?	57
28. 解方程中如何处理多重括号?	58
29. 你知道怎样使用待定系数法吗?	59
30. 怎样进行恒等式的证明?	62
31. 你会解含绝对值符号的方程吗?	65
32. 你知道二元一次方程的几何意义吗?	67
33. 解方程组时怎样运用整体代换的思想?	69
34. 碰到三元方程组如何解?	70
35. 换元法常可应用于哪几个方面?	72
36. 你会解行程方面的应用题吗?	75
37. 怎样应用比例知识解应用题?	79
38. 时钟上的时针与分针何时重合?	81
39. 你会计算百分比浓度吗?	83
40. 工作量是怎样算出来的?	85
41. 你会解数字问题吗?	86
42. 你会计算增长率吗?	88
43. 怎样求不定方程的正整数解?	90

44. 解无理方程有哪些特殊方法?	93
45. 怎样根据不同的结构特点解分式方程?	97
46. 解方程时为什么有时会出现增根?	101
47. 怎样巧用配方法解题?	102
48. 所有的二次三项式都可分解因式吗?	104
49. 怎样判断一元二次方程?	106
50. 哪种情况下用“配方法”解一元二次方程比较方便? ...	107
51. 你能用“十字相乘法”解含有字母系数的一元二次 方程吗?	109
52. 一元二次方程根的判别式可有有哪些应用?	111
53. 怎样利用方程根的定义解题?	113
54. 高次方程中能运用根的判别式和韦达定理吗? ...	114
55. 你会根据方程组特征解二元二次方程组吗?	116
56. 你能用“韦达定理”解二元二次方程组吗?	119
57. 解一元二次方程时,系数看错了怎么办?	121
58. 做选择题有哪几种常见方法?	122
59. 分子相同时,分母越大分式的值越小吗?	126
60. 一元一次不等式与一元一次方程的同解原理有 什么区别、联系?	127
61. 函数 $y=x$ 与函数 $y=\frac{x^2}{x}$ 是同一个函数吗?	128
62. 求函数自变量的取值范围应注意些什么?	129
63. 你能理解正(反)比例函数中比例系数的意义吗? ...	131
64. 正比例函数是一次函数吗?	133
65. 关于两直线相交的问题,不求交点坐标能直接 求解吗?	133

66. 怎样求由一次函数图象所围成的三角形的面积? ...	135
67. 怎样求与几何图形有关的函数关系式?	138
68. 如何简捷地求得二次函数关系式?	140
69. 怎样利用二次函数图象的对称性解题?	143
70. 怎样借助于一元二次方程求二次函数关系式? ...	145
71. 求解函数问题时,如何认真审题找捷径?	148
72. 怎样解一次函数与三角函数有关的综合题?	149
73. 怎样求折痕的长?	152
74. 你能避开求根公式解“年份”类型的一元二次 方程吗?	153
75. 不解方程,能直接求出有关根的代数式的值吗?	154
76. 根式运算中有哪些常用的技巧?	155
77. 怎样通过列方程组解无理方程?	158
78. 求代数式的值有哪些常用的方法?	162
79. 为什么解不等式时用韦达定理要特别谨慎?	167
80. 怎样才能保证一元二次方程有整数解?	169

几何部分

1. 如何找到两点之间的最短距离?	177
2. 你能说清楚直线、射线和线段之间的区别与 联系吗?	178
3. 你知道“三线八角”吗?	178
4. 怎样度量角?	179
5. 度、分、秒如何互化?	180
6. 如何区别“互余”与“互补”?	181
7. “三角形内角和为 180° ”,你能给出几种证法?	182
8. 你知道三角形的外心、内心、重心和垂心吗?	184

9. 怎样证明线段的和差关系?	184
10. 怎样证明两条线段的倍分关系?	185
11. 任意三条线段都能构成三角形吗?	187
12. 你能只用圆规作出线段的中点吗?	188
13. 证明三角形全等的基本思路有几种?	189
14. 证明两直线垂直的常见方法有哪些?	191
15. 怎样证明两条线段相等?	192
16. 怎样证明两个角相等?	193
17. 如何证明一个角大于另一个角?	194
18. 如何证明一个三角形是等腰三角形?	195
19. 怎样证明文字型几何题?	197
20. 解关于等腰三角形的问题时,怎样避免漏解 或多解?	198
21. 轴对称图形与中心对称图形的区别是什么?	199
22. 轴对称图形与中心对称图形的联系是什么?	200
23. 一组对边相等且一组对角也相等的四边形是平行 四边形,对吗?	201
24. 如何应用等积变形思想证题?	202
25. 判定平行四边形能否不通过证三角形全等?	205
26. 判定正方形为什么不强调判定定理?	206
27. 你能用一条直线把正方形面积分割成 3:5 的两个 梯形吗?	208
28. 怎样利用正方形的对角线计算角度?	209
29. 你能找出隐含在图中的 30° 角吗?	211
30. 利用面积关系求证是否更简捷?	212
31. 如何利用“同一法”证题?	214

32. 在梯形问题中常可添哪些辅助线?	215
33. 怎样发挥中点的作用?	219
34. 遇到复杂的图形,怎样分解图形?	220
35. 怎样利用面积公式计算线段的长度?	222
36. 如何寻找分散条件的联结纽带?	223
37. 同样利用中位线,哪种方法更好?	224
38. 梯形中哪些情形与相似形有关?	225
39. 你会利用三角形作特殊四边形吗?	227
40. 你注意到将线段延长一段的作用吗?	231
41. 什么样的四边形可考虑添加辅助圆?	233
42. 线段与面积都分为 1:2 行吗?	236
43. 怎样进行比例式的变形?	237
44. 五角星中蕴含着什么奥秘?	239
45. “平行线分线段成比例定理”有没有逆定理?	243
46. 平行线分线段成比例的三个基本图形有何内在 联系?	244
47. 在“梯形”基本图形中,如何求平行线段的长?	247
48. 你会利用比例证明线段相等吗?	250
49. 怎样利用比例证两直线平行?	253
50. 你会证 $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{1}{p}$ 形的几何题吗?	255
51. 如何利用添平行线证明比例线段问题?	257
52. 作线段的第四比例项有哪几种方法?	260
53. 三角形的“重心”就是它的“中心”吗?	264
54. 如何利用相似三角形列比例式求线段的长?	267
55. 如何利用“中间比”证比例式或等积式?	270

56. 你是否熟悉关于“直角三角形加斜边上的高”这一基本图形?	273
57. 怎样用射影定理解题?	276
58. 如何作两条已知线段的比例中项?	278
59. 怎样利用常见的若干基本图形解题?	280
60. 怎样灵活应用相似三角形的两条判定定理?	282
61. 如何提高有关相似三角形的证题与计算的能力?	285
62. 如何合理运用相似三角形的性质定理?	288
63. 如何求在给定条件下两线段的比值?	290
64. 你会巧用设 k 法解题吗?	293
65. 怎样利用相似三角形列比例求函数关系式?	295
66. “开放性”结论的几何题怎么解?	302
67. 圆的若干定义之间有何联系?	307
68. 过几点可确定一个圆?	308
69. 垂径定理有几个逆定理?	311
70. 垂径定理及其推论有哪些应用?	313
71. 如何利用同圆半径相等,构造等腰三角形?	316
72. 三角形的外接圆与圆的内接三角形有何联系? ...	317
73. 同圆中,圆心角、弧、弦、弦心距之间有何样的关系?	319
74. 圆周角和圆心角有哪些区别与联系?	321
75. 怎样证四点共圆?	323
76. 命题“菱形都内接于圆”对吗?	325
77. 如何判定直线与圆的位置关系?	326
78. 怎样证明直线与圆相切?	327

79. 圆的切线性质定理有哪些应用?	331
80. 圆的弦切角定理有哪些应用?	334
81. 圆的切线长定理有哪些应用?	338
82. 三角形的内切圆性质有哪些应用?	342
83. 什么样的四边形有内切圆?	346
84. 菱形一定有内切圆吗?	348
85. 如何判定圆与圆的位置关系?	349
86. 两圆相切时如何添辅助线?	353
87. 两圆相交时如何添辅助线?	359
88. 如何求两圆公切线的长?	364
89. 如何证与圆有关的比例线段问题?	367
90. 如何合理应用正 n 边形的计算公式?	370
编后	374

代 数 部 分

1. x 与 $-x$ 哪个大?

要回答 x 与 $-x$ 哪个大,不妨先作试探。

x 是从一切数字中抽象而成的,它可以代表一切实数。为此,我们可以取一个特殊数值分别代入 x 及 $-x$ 中。例如取 $x = -2$, 得 $-2 < -(-2)$ 。从字母 x “退”到取一个特殊数,这就是数学中常用的“以退为进”的策略,大踏步的退,是为了大踏步的进。于是,你说 $x > -x$, 我说:“不见得!”例如,只要取 $x = -2$ 就推翻了这个结论,这个“不见得”就是数学证明中常用的“举反例”。要肯定某个结论,必须证明;然而,要否定某个结论,只需举一个反例已足够。

如上所述,那么是 $x < -x$ 了,且慢,下此结论,未免为时过早。不妨再分别取 $x=0, x=2$ 试试。于是我们猜想:

当 $x > 0$ 时, $x > -x$; 当 $x = 0$ 时, $x = -x$;

当 $x < 0$ 时, $x < -x$ 。

这就是数学猜想,数学猜想可能是对的,也可能是错的,为此,必须进行严格的数学证明。

证明: $\because x - (-x) = 2x$,

(1) 当 $x > 0$ (x 为实数) 时, $2x > 0$,

即 $x - (-x) > 0$, 则 $x > -x$, $\therefore x$ 比 $-x$ 大;

(2) 当 $x = 0$ 时, $2x = 0$, 即 $x - (-x) = 0$, 则 $x = -x$, $\therefore x$

与 $-x$ 相等;

(3) 当 $x < 0$ (x 为实数) 时, $2x < 0$,

即 $x - (-x) < 0$, 则 $x < -x$, $\therefore x$ 比 $-x$ 小。

由此可见, 本题在证明中需要把 x 分为 $x > 0$ 、 $x = 0$ 、 $x < 0$ 三种不同的情况加以讨论, 这就是数学中常用的“分类讨论”的思想方法, 这是很重要的一种数学思想方法。

2. 小高斯为什么算得这么快?

很小的时候, 我们就知道小高斯算数的故事。当高斯还在读小学时, 一天, 老师要求大家计算 $1 + 2 + 3 + \cdots + 100$ 等于多少, 这本是一道数字不小的加法运算题, 当别的同学还在埋头苦算时, 小高斯却早在一旁看着别人做, 当老师走到他身边, 准备批评他时, 却一下子呆住了, 原来小高斯已经在小石板上写出了答案: 5050, 而且这个答案是正确的!

那么小高斯是怎样如此迅速地将结果计算出来的呢? 原来, 他利用加法的交换律, 先把 1 与 100 相加, 得到 101; 2 与 99 相加, 也得到 101; 再一直加下去, 共有 50 个 101, 所以结果为 $50 \times 101 = 5050$ 。这样小高斯就巧妙地利用运算的规律达到了迅速解题的目的。其实我们在平时的运算中也会遇到很多类似的问题, 如下面的例子:

例 1 计算 $\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \cdots + \frac{1}{29 \times 30}$ 。

分析:乍一看无从下手, 若是通分势必会产生数目很大的公分母, 但当我们观察每一项的特点就会发现: $\frac{1}{1 \times 2} = 1 - \frac{1}{2}$, $\frac{1}{2 \times 3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$, $\cdots$ 事实上, 更一般的形式为 $\frac{1}{n(n+1)} =$