中学数学奥林匹克讲座及解题技巧

主编 陶文中

（初一分册）

经济日报出版社

中学数学奥林匹克讲座及解题技巧

（初一分册）

主　编　陶文中
副主编　揭　英　段　鹏
撰稿人　李光华　蔡晓东　李芳宜
　　　　王永俊　田琪琨　陈　娴
　　　　赵一西　郑　康

经济日报出版社

(京)新登字102号

责任编辑　雷　伟

中学数学奥林匹克讲座及解题技巧

（初一分册）

ZHONG XUE SHU XUE AO LIN PI KE

JIANG ZUO JI JIE TI JI QIAO

陶文中　主编

经济日报出版社出版

（北京市宣武区虎坊桥福州馆前街6号）

新华书店总店科技发行所发行

北京仰山印刷厂印刷

开本：787×1092毫米　1/32　9.25印张　160千字

1991年11月第一版　1992年11月第二次印刷

印数：20001—40000册

ISBN 7-80036-554-9/G·134　定价：3.50元

前　言

近几年来，中小学数学奥林匹克热方兴未艾。从1986年开始的全国“华罗庚金杯”少年数学竞赛，已举办了三届，吸引了全国百余万中小学生参加。规模之大令人瞩目。一年一度的全国初中数学联赛和高中数学联赛，已成为衡量我国中学生数学奥林匹克竞赛的权威性考试。从小爱数学，从小赛数学已在全国蔚成风气。

为了帮助中小学生的数学奥林匹克学习，在今后的数学竞赛中取得更好的成绩，我们结合多年数学奥校辅导的经验，在整理竞赛辅导讲义的基础上，编写了《小学数学奥林匹克讲座及解题技巧》及《中学数学奥林匹克讲座及解题技巧》这两套课外读物。这两套丛书共六册，其中小学三册（四、五、六年级各一册），中学三册（初一、初二、初三各一册）。各册书紧密配合本年级的教学进度，选择基础性强、应用性广的重点教学内容作为专题。同时又根据数学竞赛的需要，开设竞赛数学专题讲座。力求做到选题典型，新颖，注意广度和深度。例题讲解富有启发性，注重从方法上，从能力培养的角度上多方探究解题思路。每讲最后都有小结，便于读者掌握要领。同时还配备了一定数量的练习，并附提示与解答。

我们希望这两套丛书能为提高中小学生数学能力水平有所裨益。书中如有疏漏或错误之处，欢迎读者批评指正。

编　者

1991年6月

目　　录

第一讲 有 理 数

在小学学过自然数、0、和正分数（小数）这些数统称为算术数。到初一后，由于引入了相反意义的量，出现了负数，而整数（包括正整数、负整数和0）和分数（包括正分数、负分数）统称有理数。本章将对有理数的定义和性质、有理数的绝对值、比大小及运算等进行较深入的学习，使理论上和计算上都有所提高。

一 有理数的定义、性质

1．有理数的定义

除课本上定义外，有理数还可以这样定义：能够表示成分数$\frac{p}{m}$形式的数（其中m、p整数，$m\neq0$），称为有理数。

任意整数n，均可以表示成$\frac{n}{1}$，即整数可以写成分数形式。所以整数和分数都可具有$\frac{p}{m}$的形式，这个定义与原定义是等价的。

例1 若数$x^2=2$，称x是2的一个正的平方根，记作$\sqrt{2}$。也就是说$(\sqrt{2})^2=2$，那么请证明，$\sqrt{2}$不是有理数。

证明：假设$\sqrt{2}$是有理数，那么

$\sqrt{2}=\frac{p}{m}$（$m\neq0$，且m、p互质，这是因为若m、 p不互质，我们可以约分，至m、p互质。）

于是 $(\sqrt{2})^2=\dfrac{p^2}{m^2}$

$$2=\frac{p^2}{m^2}$$

$2m^2=p^2$（这式子表明2是p的因数）

设$p=2k$，那么

$2m^2=4k^2$

$m^2=2k^2$（这式子表明2是m的因数）

∴m也是偶数。这样m、p有公因数2，与m、p给定互质相矛盾。故假设错误，即：$\sqrt{2}$一定不是有理数。这种证题方法称反证法。

2. 有理数的性质

1. 有理数具有顺序性。即指任意两个有理数a、b，在$a>b$，$a=b$，$a<b$三种关系中，有一种而且仅有一种是成立的。

2. 有理数具有对加、减、乘、除（0不为除数）四则运算的封闭性。这是指任意两个有理数的和、差、积、商（0不为除数）还是有理数。

3. 有理数具有稠密性，即指任意两个有理数之间总存在一个有理数。

例2 试证在所有比给定的有理数a大的有理数中，没有最小的数。

证明：假设在所有比a大的有理数中，b是最小的。根据有理数的稠密性，那么一定存在有理数c，使$a<c<b$，c也比a大。这就与b是最小的比a大的数相矛盾。所以在所有比a大的有理数中，没有最小的。

二　有理数的绝对值

1. 定义

绝对值是个很重要的概念，它的定义采用了描述法：正数的绝对值是它的本身，负数的绝对值是它的相反数，零的绝对值是零。

用式子表达，即

$$|a| = \begin{cases} a & (a>0) \\ -a & (a<0) \\ 0 & (a=0) \end{cases}$$

要注意$a=0$时$|a|$的表达其实有三个形式：a，$-a$和0，当然一般用0。

根据绝对值的定义，应抽象出一个重要性质：$|a| \geqslant 0$。

例1　$|a|>-a$，对吗？

解：不对，当$a \leqslant 0$时，$|a|=-a$。

同理，我们还可以对$|a|$与a的大小进行类似的讨论。这样得到$|a| \geqslant a$与$|a| \geqslant -a$都是正确的。这是一个有用的结论。

2. 绝对值的几何意义

$|a|$的几何意义是：在数轴上，表示这个数的点离开原点的距离。

由上述意义，我们不难理解$|a|<5$是指：用点A表示数a（下同），则A点与原点距离小于5，所以a在-5与5之间取值，且不包括5、-5、（如图1-1），而$|a|>5$，则表示a在点-5与点5外侧取值，且也不包括5、-5（如图1-2）。

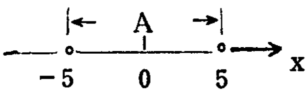

图1-1

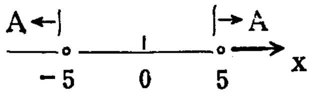

图1-2

绝对值$|x-a|$表示点x和点A的距离，这些结论是很重要的。

例2　若$|a+b|>|a-b|$，a、b如何取值？

解：若$b=0$，则$|a|>|a|$不可能成立。$\therefore b\neq 0$，若$b>0$，（如图1-3）

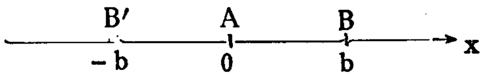

图 1-3

原不等式表示点A到点B′$(-b)$的距离大于点A到点B(b)的距离。由图，若A落在原点处，则A点与B、B′距离相等，若A点向右移，自然离B点近，离B′点远。由此可知A在0的右侧即$a>0$。

同理可知若$b<0$时，$a<0$

$\therefore$　a、b必须同号。

例3　若$|x+5|+|x-2|=7$，求x的取值范围。

解1：用轴上标根法解。点-5和点2把数轴分为三段$x\leqslant-5$，$-5<x\leqslant2$，$x>2$，对每一区间分别讨论，（其中-5、2称为零点，即它们分别使$x+5=0$，$x-2=0$）

1）$\begin{cases}x\leqslant-5\\-(x+5)-(x-2)=7\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\leqslant-5\\-2x=10\end{cases}\Rightarrow x=-5$

2）$\begin{cases}-5<x\leqslant2\\x+5-(x-2)=7\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-5<x\leqslant2\\7=7\end{cases}\Rightarrow -5<x\leqslant2$

3）$\begin{cases} x>2 \\ x+5+x-2=7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>2 \\ 2x=4 \end{cases} \Rightarrow$ 无解

∴ $-5\leqslant x\leqslant 2$ 为解。

解 2　用几何法解，原式表示点 x 到点 -5 和点 2 的距离和为 7。而点 -5 和点 2 已经相距 7 个单位，故点 x 必须在点 -5 和点 2 之间运动，（包括端点）∴ $-5\leqslant x\leqslant 2$。

例 4　$|x+3|-|x-2|>7$，求 x。

解 1：用轴上标根法解

1）$\begin{cases} x\leqslant -3 \\ -(x+3)+(x-2)>7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\leqslant -3 \\ -5>7 \end{cases} \Rightarrow$ 无解

2）$\begin{cases} -3<x\leqslant 2 \\ (x+3)+(x-2)<7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3<x\leqslant 2 \\ x>3 \end{cases} \Rightarrow$ 无解

3）$\begin{cases} x>2 \\ (x+3)-(x-2)>7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>2 \\ 5>7 \end{cases} \Rightarrow$ 无解

∴　原不等式无解

解 2：用几何法解

$|-3-2|=5$，即点 -3 与点 2 相距 5 个单位

若点 x 在 -3 与 2 的正中间，即 $x=-0.5$ 时，点 x 到点 2 和点 -3 距离相等，原式要求点 x 到点 -3 比到点 2 距离大，所以点 x 应向点 2 靠拢，但由图可知点 x 在 -3 到 2 间运动时，距离差肯定小于 5；当点 x 与点 2 重合时，距离差为 5，所以点 x 需继续右移。但无论点 x 在点 2 右边何处，它到点 -3 与到点 2 距离差还是 5，不会比 7 大。（如图1-4）

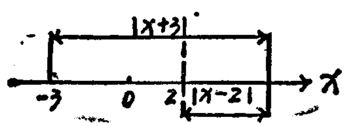

图 1-4

∴ 原不等式无解

例 5 m是有理数，求

$|m-2|+|m-4|+|m-6|+|m-8|$的最小值

解：用几何法解

1）若M点在点 2 的左侧（如图1-5），（包括点 2）由图

$$|m-2|+|m-4|+|m-6|+|m-8|$$

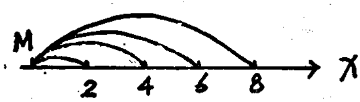

图 1-5

$\geqslant|m-4|+|m-6|+|m-8|$

$\geqslant 2+4+6=12$。且易见，点M在点 8 的右侧（或位于 8 上）也有同样的结论。

2）若点M在点 2 和点 4 间运动（不包括 2、4），由图：(如图1-6)

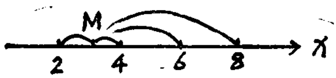

图 1-6

$|m-2|+|m-4|+|m-6|+|m-8|$

$=2+|m-6|+|m-8|$

$>2+2+4=8$。且易见，点M在点 6 和点 8 间运动（不包括点6、8），也有同样的结论。

3）若点M在点 4 和点 6 间运动（包括点 4 和点 6）(如图1-7)，则

图 I-7

$$|m-2|+|m-4|+|m-6|+|m-8|$$
$$=(|m-2|+|m-8|)+(|m-4|+|m-6|)$$
$$=6+2=8$$

故原式最小值为8。

三　有理数大小的比较

我们已经知道，正数＞0＞负数，而两个负有理数比大小，绝对值大的反而小。

比较两个数的大小，可以用比差法。若$a-b>0$，则$a>b$；若$a-b=0$，则$a=b$；若$a-b<0$则$a<b$，两个正有理数比大小，也可用比商法，令$a>0$，$b>0$若，$\frac{a}{b}>1$，则$a>b$；若$\frac{a}{b}=1$，则 $a=b$；若$\frac{a}{b}<1$，则$a<b$。

例6　比较两个正有理数a^2b与ab^2的大小。

解：可用比差法　$a^2b-ab^2=ab(a-b)$。

∵　$a^2b>0$，$ab^2>0$　而$a^2>0$，$b^2>0$（不会是0！）

∴　a、b均是正数，即有$ab>0$。

故　若$a>b$，则$a^2b-ab^2>0$　即$a^2b>ab^2$

若$a=b$，则$a^2b-ab^2=0$　即$a^2b=ab^2$

若$a<b$，则$a^2b-ab^2<0$　即$a^2b<ab^2$。

例2　a_1、a_2、$a_3\cdots a_{1991}$都是有理数，设

$M=(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{1990})$ $(a_2+a_3+a_4+\cdots$

$+a_{1990}+a_{1991})$

$$N=(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{1990}+a_{1991})\cdot(a_2+a_3+a_4+\cdots+a_{1990})$$

试比较M、N的大小。

思路分析：注意到M、N均是两个数的乘积，且从乘数看，每个乘数都由和组成。和间有差异也有联系。

解：设$x=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{1990}$，

$y=a_2+a_3+a_4+\cdots+a_{1991}$

则　$M=xy$，$N=(x+a_{1991})\cdot(y-a_{1991})$

$$\begin{aligned}M-N&=xy-[(x+a_{1991})\cdot(y-a_{1991})]\\&=xy-[xy+a_{1991}\cdot y-a_{1991}\cdot x-a_{1991}^2]\\&=a_{1991}(x-y)+a_{1991}^2\\&=a_{1991}(a_1-a_{1991})+a_{1991}^2\\&=a\cdot a_{1661}\end{aligned}$$

由此可知　1）若$a_1\cdot a_{1991}>0$，则$M>N$。

2）若$a_1\cdot a_{1991}=0$（两数中至少有一个为0），则$M=N$。

3）若$a_1\cdot a_{1991}<0$，则$M<N$。

例3：若p、q、t都是自然数，比较$\frac{p+t}{q+t}$与$\frac{p}{q}$的大小。$(p\neq q)$

解：用比差法

$$\frac{p+t}{q+t}-\frac{p}{q}=\frac{pq+tq-pq-tp}{q(q+t)}=\frac{t(q-p)}{q(q+t)}$$

∵　p、q、t均是正数、$\frac{t}{q(q+t)}>0$

故 1）若$q>p \Rightarrow q-p>0 \Rightarrow \frac{t(q-p)}{q(q+t)}>0$

即 $\frac{p+t}{q+t}>\frac{p}{q}$

2）若 $q<p \Rightarrow q-p<0 \Rightarrow \frac{t(q-p)}{q(q+t)}<0$

$$\frac{p+t}{q+t}<\frac{p}{q}$$

本题告诉我们，在真分数的分子、分母上同加一个相同的自然数，值变大了。例如：$\frac{2}{3}<\frac{3}{4}<\frac{4}{5}$，$\frac{7}{11}<\frac{14}{18}<\frac{21}{25}$，若是个假分数，分子、分母同加一个相同的自然数后，分式值变小了。例如$\frac{3}{2}>\frac{4}{3}>\frac{5}{4}$，$\frac{11}{7}>\frac{18}{14}>\frac{25}{21}$……。

例 4　将$\frac{18}{19}$，$\frac{198}{199}$，$\frac{1998}{1999}$按从小到大的顺序排列起来。

解：利用上题结论

$$\frac{18}{19}<\frac{18+180}{19+180}=\frac{198}{199}<\frac{198+1800}{199+1800}=\frac{1998}{1999}。$$

∴　应$\frac{18}{19}$，$\frac{198}{199}$，$\frac{1998}{1999}$。

例 5　如果$t>0$，$x<y$，试证$\frac{x+yt}{1+t}$必在x，y之间。

思路分析1：用比差法，

证 1　$\frac{x+yt}{1+t}-x=\frac{x+yt}{1+t}-\frac{x+xt}{1+t}=\frac{t(y-x)}{1+t}>0$

$$\frac{x+yt}{1+t}-y=\frac{x+yt}{1+t}-\frac{y+yt}{1+t}=\frac{x-y}{1+t}<0$$

$$\therefore\quad x<\frac{x+yt}{1+t}<y。$$

思路分析2： 本题也可以从分数中分离出数x、y来，再行比较大小。

证 2 $\quad \frac{x+yt}{1+t}=\frac{x+xt-xt+yt}{1+t}=x+\frac{(y-x)\cdot t}{1+t}>x$

$$(y-x>0,\ 1+t>0)$$

$$\frac{x+yt}{1+t}=\frac{x-y+y+yt}{1+t}=y+\frac{x-y}{1+t}<y$$

$(x-y<0,\ 1+t>0)\qquad \therefore\quad x<\frac{x+yt}{1+t}<y$

本题所涉及的方法，对解决某些分数问题，显得方便些。

例 6　能使n^2+10被$n+10$整除的正整数n的最大值是多少？

解：采用例 6 的方法，先把商的整数部份分离出来。

$$\frac{n^2+10}{n+10}=\frac{(n^2+10n)-(10n+100)+110}{n+10},$$

$$=(n-10)+\frac{110}{n+10}$$

当$n+10$是110的约数时，商为整数，而110的最大约数是110。

令　$n+10=110\qquad n=100$

四　有理数的运算

1．有理数运算

1）对有理数的四则运算法则，应注意：

要本着“先符号，后绝对值”的顺序运算，养成良好习惯。

2）有理数运算仍然满足

加法交换律　$a+b=b+a$

加法结合律　$(a+b)+c=a+(b+c)$

乘法交换律　$a\cdot b=b\cdot a$

乘法结合律　$(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$

乘法对加法的分配律　$a\cdot(b+c)=ab+ac$

计算时要注意应用算律，特别是乘法对加法的分配律，左边可以变到右边，右边也可以变到左边。

3）在算术数集中，有了分数，使乘法和除法得到统一；在有理数集中，有了负数，使加法和减法得到统一，这样减法和除法的性质在有理数集中当然正确。

例 1　计算下列各题：

1）$-1-(-1)^1-(-1)^2-(-1)^3-\cdots\cdots-(-1)^{99}-(-1)^{100}$

2）$(-1)^{5^2}+(-1)^{2^5}$

解： 1）原式 $=(-1+1)+(-1+1)+\cdots+(-1+1)-1$

$=-1$

2）原式 $=(-1)^{25}+(-1)^{32}=0$

注意负数方幂的特性，奇次幂为负，偶次幂为正。

例 2　计算下列各题：

1）$\left(4\frac{3}{8}-1\frac{2}{7}\right)-\left(2\frac{1}{2}+2\frac{5}{7}\right)$

2）$(-1)^{1991}\left[(-2)^5-3^2-\frac{5}{13}\div\left(-\frac{1}{7}\right)\right]-2$

3） $\dfrac{(-2)^3\cdot(-1)^{1990}-|-12|\div\left[-\left(-\frac{1}{2}\right)^2\right]}{(-1)+\left(-\frac{4}{5}\right)\times1\frac{1}{4}}$

解：1）原式 $=\left(4\frac{3}{8}-2\frac{4}{8}\right)-\left(1\frac{2}{7}+2\frac{5}{7}\right)$

$$=2-\frac{1}{8}-4=-2\frac{1}{8}$$

2）原式 $=-\left(-32-9+\frac{5}{13}\times7\right)-2$

$$=41-2\frac{9}{13}-2=36\frac{4}{13}$$

3）原式 $=\dfrac{-8+48}{\frac{5}{4}\times\frac{5}{4}}=40\times\frac{4}{5}\times\frac{4}{5}=25\frac{3}{5}$

注意符号，注意加法交换律、结合律。

例3　计算

1）$1991\times19901990-1990\times19911991$

2）$\dfrac{(-135)\times(-271)+136}{(-136)\times(-271)-135}$

3）$(-66)\left[\frac{1}{2}-\left|-\frac{1}{3}\right|+\left(-\frac{5}{11}\right)\right]+(-124)$

$\times38-(-124)\times-(62)$

解：1）原式 $=1990\times19901990+19901990-1990$

$\times19911991$

$=1990(19901990+10001-19911991)$

$=1990\times0$

$=0$