新课标 新思路 新创意

ZHONGKAO SHUXUE ZONGHE ZHIDAO

中考数学综合指导

《初中数学课程改革与考试》课题组 编写

一轮复习

南京出版社

新课标 新思路 新创意

中考数学综合指导

《初中数学课程改革与考试》课题组 编写

一轮复习

南京出版社

图书在版编目(CIP)数据

中考数学综合指导/《初中数学课程改革与考试》课题组编. 一南京:南京出版社,2006
ISBN 7-80718-136-2

Ⅰ.中… Ⅱ.中… Ⅲ.数学课—初中—升学参考资料 Ⅳ.G634.603

中国版本图书馆CIP数据核字(2006)第000500号

书　　名:中考数学综合指导
作　　者:《初中数学课程改革与考试》课题组
出版(发行):南京出版社
社址:南京市成贤街43号3号楼　　邮编:210018
网址:http://www.njcbs.com/www.njcbs.net
联系电话:025-83283871(营销)　025-83283883(编务)
电子信箱:webmaster@njcbs.com
责任编辑:蔡　健
装帧设计:郭春明
印　　刷:南京爱德发展有限公司
开　　本:850mm×1168mm　1/16
印　　张:31
字　　数:870千
版　　次:2006年1月第1版
印　　次:2006年1月第1次印刷
书　　号:ISBN 7-80718-136-2/G·68
总 定 价:32.00元(全二册)

第三部分 统计与概率

(1) 一个正实数的绝对值是________，一个负实数的绝对值是________，零的绝对值是________.

(2) 从数轴上看，一个实数的绝对值就是数轴上表示这个数的点到原点的________.

5. 平方根与立方根

(1) 如果一个数的平方等于 a，那么这个数叫做 a 的________，记做________.

(2) 正数 a 的平方根有________个，它们________. 其中正的平方根叫做 a 的________，记做 $\sqrt{a}$；0 的平方根与算术平方根都是________；负数________平方根.

(3) 如果一个数的立方等于 a，那么这个数叫做 a 的________，记做________，其中 a 的取值范围是________.

(4) 正数的立方根为________，负数的立方根为________，0 的立方根为________，$\sqrt[3]{-a}=-\sqrt[3]{a}$.

6. 近似数、有效数字与科学记数法

(1) 一个近似数，从左边第一个非零数字起到最后一个数字止，所有数字都是这个数的________.

(2) 科学记数法一般表示为 $a\times10^{n}$，其中 $1\leqslant|a|<10$，n 为整数.

7. 有理数、无理数、实数

整数和分数统称有理数；无限不循环小数叫无理数；有理数和无理数统称为实数.

8. 实数的分类

$$(1)\ \text{实数}\begin{cases}\text{有理数}\left.\begin{cases}\text{正有理数}\\ \text{零}\\ \text{负有理数}\end{cases}\right\}\text{有限小数或循环小数}\\ \text{无理数}\left.\begin{cases}\text{正无理数}\\ \text{负无理数}\end{cases}\right\}\text{无限不循环小数}\end{cases}$$

$$(2)\ \text{实数}\begin{cases}\text{正实数}\\ \text{零}\\ \text{负实数}\end{cases}$$

9. 实数的运算

实数的运算顺序为先算乘方和开方，再算乘除，最后算加减；有括号时，先算括号内；同一级运算应从左至右，按顺序进行. 注意特殊指数的意义：$a^0=1(a\neq0)$，$a^{-p}=\dfrac{1}{a^p}$（p 为正整数，$a\neq0$）.

课时 1　实数(1)

典型剖析

例 1. $\dfrac{1}{2-\sqrt{3}}$的倒数是________.

分析： 一个实数 $a(a\neq0)$ 的倒数是 $\dfrac{1}{a}$，而 $\dfrac{1}{a}$ 的倒数是 a.

解：填 $2-\sqrt{3}$.

例 2. $\sqrt{64}$的平方根是________.

分析： 一个正数的平方根有两个，它们互为相反数. 本题是求 8 的平方根，而不是 64 的平方根.

解：填 $\pm2\sqrt{2}$.

点评： 填写答案前必须搞清楚 $\sqrt{64}$ 的意义.

例 3. 南京长江三桥是世界上第一座弧线形钢塔斜拉桥，全长 15600 米，用科学记数法表示为　（　　）

A. 1.56×10^4 米　　B. 15.6×10^3 米　　C. 0.156×10^4 米　　D. 1.6×10^4 米

分析：把一个实数表示成 $a\times10^n$，其中 a 必须满足 $1\leqslant|a|<10$，n 为整数.

解：选 A.

例 4. 近似数 0.5600 的有效数字的个数和精确度分别是（　　）

A. 两个，精确到万分位　　B. 四个，精确到十万分位

C. 四个，精确到万分位　　D. 四个，精确到千分位

分析：一个近似数四舍五入到哪一位，就说这个近似数精确到哪一位. 同时，一个近似数从左边第一个非 0 数字起直到精确的位数止，所有数字都是有效数字.

解：选 C.

点评：有效数字要区分以下几种情况. 如：12300 的有效数字是 5 个，它们分别是 1，2，3，0，0；1.23×10^4 的有效数字是 3 个，精确到百位；1.23 万的有效数字是 3 个，精确到百位；1.23 的有效数字是 3 个，精确到百分位.

例 5. 下列实数：$\frac{\pi}{2}$，$\sin30^\circ$，0.1414，$\sqrt[3]{9}$，$(-\sqrt{7})^2$，$\frac{22}{7}$，$\sin45^\circ$，$\sqrt{9}$中，无理数的个数（　　）

A. 1 个　　B. 2 个　　C. 3 个　　D. 4 个

分析：$\sin30^\circ$、0.1414、$\frac{22}{7}$是分数，$(-\sqrt{7})^2$、$\sqrt{9}$是整数，它们都是有理数；$\frac{\pi}{2}$、$\sqrt[3]{9}$、$\sin45^\circ$是无理数.

解：选 C.

点评：无理数是指无限不循环小数，如 0.1010010001…（两个 1 之间依次增加 1 个 0）、π、$\sqrt{2}$、$\frac{\sqrt{3}}{2}$等.

练兵平台

一、填空题

1. $-\frac{1}{2}$的相反数是________，倒数是________.

2. $\sqrt{16}$的算术平方根是________， 8 的立方根是________.

3. 1 纳米等于 1 米的 10 亿分之一，人的一根头发的直径约为 6 万纳米. 用科学记数法分别表示 10 亿分之一和 6 万分别为________、________.

4. 用四舍五入法对 2990000 取近似值，如果保留两个有效数字，那么 2990000≈________.

二、选择题

5. 在 -7，$\tan45^\circ$，$\sin60^\circ$，$\frac{\pi}{3}$，$-\sqrt{9}$，$(-\sqrt{3})^2$ 这六个实数中，有理数有（　　）个.

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

6. 下列命题中，正确的是（　　）

A. $(-2)^2$ 的平方根是 -2　　B. -1 的立方根是 -1

C. 0.2060 精确到千分位　　D. 无理数是指开方开不尽的数

7. 实数 a、b 在数轴上表示如图 1－1 所示. 那么，下列式子错误的是（　　）

A. $b>a$　　B. $|a|>|b|$

C. $-a<b$　　D. $-b>a$

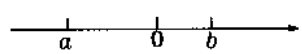


图 1－1

8. 下列四个命题：

（1）如果一个数的相反数等于它本身，那么这个数等于零.

（2）如果一个数的倒数等于它本身，那么这个数等于 1.

（3）如果一个数的算术平方根等于它本身，那么这个数等于 1.

(4) 如果一个数的绝对值等于它本身,那么这个数是正数.

其中正确的命题个数是 ( )

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

9. m 是实数,则 $|m|+m$ ( )

A. 可能是负数　　B. 不可能是负数

C. 必是正数　　D. 可能是正数也可能是负数

10. 现规定一种新的运算符"▲":$a▲b=a^b$,如 $3▲2=3^2=9$,则 $\frac{1}{2}▲3$ 是 ( )

A. $\frac{1}{8}$　　B. 8　　C. $\frac{1}{6}$　　D. $\frac{3}{2}$

体验中考

1. 写出 -1 和 0 之间的任意一个负数(-1 除外)______.

2. 两个不相等的无理数,它们的乘积为有理数,这两个数可以是______.

3. 已知 a、b 是有理数,且满足 $(a-2)^2+|b-3|=0$,则 $a^b=$______.

4. $\sqrt{10}$ 在两个连续的整数 a 和 b 之间,$a<\sqrt{10}<b$,则 a、b 分别是______.

5. 据苏州市红十字会统计,2004 年苏州市无偿献血者总量为 12.4 万人次,已 6 年保持全省第一.12.4 万这个数用科学记数法表示为______.

6. 某种感冒病毒的直径是 0.00000012 米,用科学记数法表示为______.

7. 观察下列各式,$1\times3=1^2+2\times1$,$2\times4=2^2+2\times2$,$3\times5=3^2+2\times3$,……请你将猜到的规律用自然数 $n(n\leqslant 1)$ 表示出来______.

8. 若 a、b 互为相反数,c、d 互为倒数,m 的绝对值为 2,求 $\frac{|a+b|}{3m^2+1}+6m-5cd$ 的值.

9. 实数 a、b 在数轴上的对应点如图所示:a 　0　b,求 $|2a-3b-\sqrt{18}|-|3b-2a+\sqrt{8}|$ 的值.

课时 2　实数(2)

典型剖析

例 1. 计算:$(-1\frac{1}{3})(-\frac{3}{4})+(-3)\div\frac{1}{2}-(-2)^3-\sqrt{4}$

分析: 此算式含有加、减、乘、除、乘方、开方运算,按运算顺序且注意符号就不难得出正确结果.

解:原式 $=\frac{4}{3}\times\frac{3}{4}+(-3)\times2-(-8)-2=1$.

点评: 实数运算的要点是掌握与实数有关的概念、性质以及运算法则、运算律等,各种运算均要把好符号关.

例 2. 计算:$\sqrt{3}\cos30^\circ-(-2)^{-1}+\frac{1}{2}\times(1-\sqrt{5})^0$

分析: 仔细分析算式的结构,可分成三角函数、负指数幂、零指数幂三部分,分别计算再相加.

解:原式 $=\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{-2}+\frac{1}{2}\times1=\frac{5}{2}$.

点评: 特殊角的三角函数值的识记及负指数幂、零次幂的正确转换是计算的关键.

例 3. 若 $a+b<0$,$a<0$,$b>0$,则 a、$-a$、b、$-b$ 的大小关系是 ( )

A. $a<-b<b<-a$　　　　B. $-b<a<-a<b$

C. $a<-b<-a<b$　　　　D. $-b<a<b<-a$

分析:本题考查实数大小比较法则的运用,特别要注意两个负数相比较,绝对值大的反而小.

解法一:可用特殊值法,由题意取 $a=-2$,$b=1$,则 $-a=2$,$-b=-1$.由 $-2<-1<1<2$ 知 B、C、D 不成立,故选 A.

解法二:可借助数轴,将满足条件的 a、b 在数轴上表示出来,再把 $-a$、$-b$ 表示出来,如图 1—2:

$\therefore a<-b<b<-a$

故选 A.

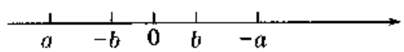


图 1—2

点评:特殊值法是解选择题的常用方法,解法二体现了数形结合思想.

例 4. 实数 a、b 在数轴上的位置如图 1—3 所示,那么化简 $|a-b|-\sqrt{a^2}$ 的结果是　(　　)

A. $2a-b$　　　　B. b

C. $-b$　　　　D. $-2a+b$

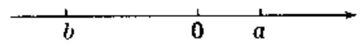


图 1—3

分析:根据实数 a、b 在数轴上的位置先判断 a、b 的符号及大小,然后再分别化简.

解:选 C.

点评:此类题型往往给出未知实数在数轴上的位置,然后对含有这些实数的代数式进行化简,除了要判断所给实数的大小关系外,对实数绝对值意义及算术平方根概念的正确理解也是解题的关键.

练兵平台

1. 将 $(\frac{1}{6})^{-1}$、$(-2)^0$、$(-3)^2$ 这三个数按从大到小的顺序排列为________________.

2. 如图 1—4 所示,以数轴的单位长度为边作一个正方形,以数轴的原点为圆心、正方形对角线长为半径画弧,交数轴正半轴于点 A,则点 A 所表示的数是________.

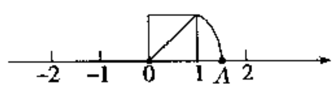


图 1—4

3. 计算:$\frac{1}{10\times11}-\frac{1}{11\times12}-\frac{1}{12\times13}-\frac{1}{13\times14}-\cdots-\frac{1}{19\times20}$

4. 计算:$(-\frac{1}{1})^{-1}+(-2)^2\times(\sqrt{5})^0-\sqrt[3]{-8}\div|2|$

5. 计算:$(-0.25)^{1991}\cdot4^{1991}+(-1)^{1998}+(-1)^{1999}$

6. 玩 24 点游戏,对下面一组数,请你给出运算符号,按有理数的加减乘除四则运算,使结果为 24.

(1) (2　4　7　11)____________.

(2) (3　10　5　12)____________.

体验中考

1. 当 $0<x<1$ 时,x^2、x、$\frac{1}{x}$ 的大小顺序排列是____________.

2. 规定一种新的运算:$a\triangle b=a\cdot b-a-b+1$.如 $3\triangle4=3\times4-3-4+1$,请比较大小:$(-3)\triangle4$ ________ $4\triangle(-3)$.

3. (昆明·2004)观察下列等式(式子中的"!"是一种数学运算符号)

$1!=1$,$2!=2\times1$,$3!=3\times2\times1$,$4!=4\times3\times2\times1$,…计算 $\frac{100!}{98!}=$________________.

4.(长沙·2004)探索规律：

$3^1=3$，个位数是3；$3^2=9$，个位数是9；$3^3=27$，个位数是7；$3^4=81$，个位数是1；$3^5=243$，个位数是3；$3^6=729$，个位数是9；……那么3^7的个位数字是________；3^{20}的个位数字是________.

5.(南京·2004)在1、1、-2这三个数中，任意两数之和的最大值是________.

6.(徐州·2004)计算：$2^0-(-\frac{1}{2})^{2}+2^2-\sqrt[3]{-27}$

7.(芜湖·2004)计算：$(\frac{1}{2})^{2}-2^3\times0.125+2005^0+|-1|$

§1.2 代数式和代数式的值

知识归纳

一、课标链接

1. 在现实情景中进一步理解用字母表示数的意义.
2. 能分析简单问题的数量关系，并用代数式表示.
3. 能解释一些代数式的实际背景或几何意义.
4. 会求代数式的值；能根据特定的问题查阅资料，找到所需要的公式，并会代入具体的值进行计算.

二、知识梳理

1. 用字母表示数、代数式的意义、列代数式.
2. 代数式的值的意义及其计算.

课时3 代数式和代数式的值

典型剖析

例1. 研究下列等式，请找出这些等式的规律，并用字母表示出来.

$1\times3+1=4=2^2$；$2\times4+1=9=3^2$；

$3\times5+1=16=4^2$；$4\times6+1=25=5^2$…

分析：要用字母表示等式的规律，必须找出已给等式数字之间的联系.分析等式可发现，左边均为两个相差2的自然数乘积与1的和，右边是一个自然数的平方，再抓住因数中的第一个自然数，把各个等式联系起来，不难发现等式的一般规律.

解：若用n表示第一个自然数，则第二个自然数为$(n+2)$，等式右边的自然数的平方可用$(n+1)^2$表示，所以这些等式的规律是$n(n+2)+1=(n+1)^2$.

点评：用字母表示数字规律的关键是要抓住具体的数字，分析等式间的内在联系，并用字母把这种规律抽象地表示出来.

例2. 列代数式，并求值.

(1)某公园的门票价格是：成人票每张10元，学生票每张5元.一个旅游团有成人x人、学生y人，那么该旅游团应付多少门票费？

(2)如果该旅游团有37个成人、15个学生，那么他们应付多少门票费？

分析：总门票费=成人票价格×成人数+学生票价格×学生数

解：(1) 旅游团应付的门票费是$(10x+5y)$元.

(2) 把$x=37$、$y=15$代入代数式$10x+5y$，得

$10\times37+5\times15=445$.

因此，他们应付445元.

点评：此题并不困难，我们不妨作进一步思考：代数式$10x+5y$还可以表示什么？如果用x(米/秒)表示小明跑步的速度，用y(米/秒)表示小明走路的速度，那么$10x+5y$表示他跑步10秒和走路5秒所经过的路程；如果用x和y分别表示1元和5角硬币的枚数，那么$10x+5y$就表示x枚1元硬币和y枚5角硬币共是多少角钱. 你还能举出其他例子吗？

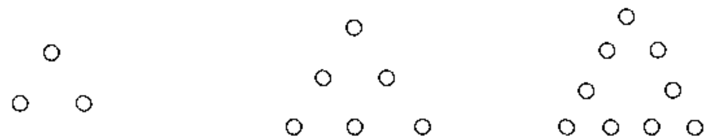
例3. 已知$a(a-1)+(b-a^2)=-7$，求$\frac{a^2+b^2}{2}-ab$的值.

分析：根据已知条件求不出a、b的值，只能把它当成整体，化简得$b-a=-7$，再把代数式变形为$\frac{(a-b)^2}{2}$得出结果.

解：$\frac{a^2+b^2}{2}-ab=\frac{(a-b)^2}{2}=\frac{49}{2}$.

点评：分别把已知及要求的代数式化简，然后整体代入，这是代数式求值的常用方法. 整体思想常常使某些较复杂的问题简单化. 整体代入就是根据不同的需要将问题中的某个部分看成一个整体，这样就把一个较复杂的代数式转化为简单的代数式了.

例4. 图1-5是由若干盆花组成的三角形图案，每条边(包括两个端点)有$n(n>1)$盆花，每个图案花盆的总数是S. 按此规律，推断S与n的关系式.



$n=2, S=3$　　$n=3, S=6$　　$n=4, S=9$

图1-5

分析：根据图形和各边的点数可列表如下：

图中每边上的点数n	图中的总点数S
$n=2$	$1+1+1=3\times1=3\times(2-1)$
$n=3$	$2+2+2=3\times2=3\times(3-1)$
$n=4$	$3+3+3=3\times3=3\times(4-1)$
$n=5$	$4+4+4=3\times4=3\times(5-1)$

从表中可以发现，在S这一栏中，唯一在变化的是括号内的被减数，而且和n这一栏中n的变化是同步的. 因此，括号中的被减数可以表示为n.

解：S与n的关系式：$S=3(n-1)(n>1)$.

点评：此类问题可把几种简单的情况列表分析，从特殊情况入手，归纳出一般结论.

练习平台

1. 请解释代数式$4a$的实际意义：________.

2. 如果$x^2+x-1=0$，那么代数式x^3+2x^2-7的值为　　(　　)

A. 6　　B. 8　　C. -6　　D. -8

3. 若 n 为正整数，且 $a^{2n}=5$，则 $2a^{6n}-4$ 的值为　（　）

A. 246　　B. 121　　C. 26　　D. 146

4. 如果 a 个人 b 天做 c 个零件，那么 b 个人用相同的速度做 a 个零件所需的天数是　（　）

A. $\frac{a^2}{c}$　　B. $\frac{c}{a^2}$　　C. $\frac{c^2}{a}$　　D. $\frac{a}{c^2}$

5. 已知下列等式① $1^3=1^2$；② $1^3+2^3=3^2$；③ $1^3+2^3+3^3=6^2$；④ $1^3+2^3+3^3+4^3=10^2$. 由此规律可知，第⑤个等式是________________.

6. 已知 $\frac{x-1}{x}=5$，则 $\frac{x^2+1}{x^2}=$________.

7. 某书每本定价 8 元，如果购买 10 本以上，则超过 10 本的部分每本打八折(原价的 80%).

(1) 填表：

购书数量(本)	1	2		11	12
付款金额(元)	8	16	80		

(2) 若一读者购该书时付款 208 元，则这位读者购该书多少本？

体验中考

1. (1) 化简：$(4a^2-3a)+(2+4a-a^2)-(2a^2+a)$

(2) 请选择一个你喜欢的数代替式中的字母 a，求出代数式的值.

2. 图 1－6 正方形的边长为 a，以各边为直径在正方形内画半圆，用含有 a 的代数式表示图中阴影部分的面积.

图 1－6

1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36

图 1－7

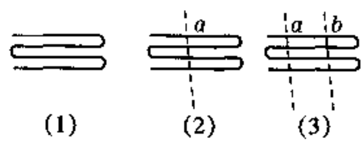


图 1－8

3. (河南・2005)将连续的自然数 1 至 36 按图 1－7 的方式排成一个正方形阵列，用一个小正方形任意圈出其中的 9 个数，设圈出的 9 个数的中心数为 a，用含 a 的代数式表示这 9 个数的和是________.

4. (河北・2005) 一根绳子弯曲成如图 1－8(1)所示的形状. 当用剪刀像图 1－8(2)那样沿虚线 a 把绳子剪断时，绳子被剪为 5 段；当用剪刀像图 1－8(3)那样沿虚线 $b(b/\!/a)$ 把绳子再剪一次时，绳子就剪为 9 段；若用剪刀在虚线 a、b 之间把绳子再剪 $(n-2)$ 次(剪刀的方向与 a 平行)，这样一共剪 n 次时绳子的段数是　（　）

A. $4n+1$　　B. $4n+2$　　C. $4n+3$　　D. $4n+5$

5. 中信通讯公司开设了两种通讯业务：①"全球通"用户交 30 元月租费，然后每通话 1 分钟，再付话费 0.35 元；②"快捷通"用户不交月租费，每通话 1 分钟，付话费 0.55 元(本题中通话均指市内通话).

(1) 按一个月通话 x 分钟计算，请你写出两种收费方式下客户应支付的费用.

(2) 某用户估计一个月内通话时间为 200 分钟，你认为选择哪种通讯业务较合算？

§1.3 整 式

知识归纳

一、课标链接

1. 了解整式的概念,会进行简单的整式的加、减运算;会进行简单的整式乘法运算(其中多项式相乘仅指一次式相乘).

2. 会推导乘法公式$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$、$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$,了解公式的几何背景,并能进行简单计算.

二、知识梳理

1. 整式的有关概念.
2. 合并同类项的法则以及去括号和添括号的法则,整式的加减法.
3. 幂的运算法则、乘法公式、整式的乘法运算法则.

课时 4 幂的运算 乘法公式

典型剖析

例 1. 计算:(1) $(\frac{1}{9})^{-2}\times3^{-4}$;(2) $(-0.75)^2\times(1\frac{1}{3})$;(3) $(-0.5)^7\times2^8$;(4) $(a^n)^2+(a^2)^n-a^n\cdot a^2$($n$ 为整数).

分析:(1) 本题是幂的乘法运算,用负整数指数幂的概念先把原式转化为同底数幂乘法,然后再运算.

(2) 本题是带着小数,分数的乘、除、乘方运算.先把小数化成分数,带分数写成假分数,然后再进行幂的运算.

(3) 底数是负数的幂的运算,在运算中首先处理好符号,然后计算.还要想办法把它变成同底数幂的乘法.

(4) 这是一种加、减、乘、乘方的多级别运算,按运算的顺序,即"先乘方,后乘除,再加减,有括号先做"来进行计算.

解:(1) 1;(2) $\frac{3}{4}$;(3) -2;(4) $2a^{2n}-a^{n+2}$(过程略).

点评:(1) 本题解题思路较多,关键是如何处理好负指数幂的概念,可化为以 9 为底的幂,可用倒数关系把指数负号转变成正号,也可利用$(\frac{b}{a})^{-n}=(\frac{a}{b})^n(a\neq0,b\neq0)$来改变指数的符号.(2) 代数运算中,通常把小数写成分数,带分数写成假分数,题中有负号首先解决符号问题,再进行运算,负数的偶次幂是正数.(3) 可以转换成以 2 或-2为底的同底数幂的乘法,也可逆用积的乘方法则进行计算.(4) 运算法则不能混淆,不是同类项不能合并.

例 2. 已知 $a^m=2$,$a^n=3$,求 a^{3m+2n}的值.

分析:由于 $a^{3m}=(a^m)^3$,$a^{2n}=(a^n)^2$,所求的代数式可利用同底数幂的乘法化成 a^{3m}与 a^{2n}的积,从而可以求值.

解:$a^{3m+2n}=a^{3m}\cdot a^{2n}=(a^m)^3\cdot(a^n)^2=2^3\times3^2=72$.

点评：逆用同底数幂的乘法与幂的乘方，是求代数式值时的常用方法之一.

例 3. 写出一个只含字母 x 的整式，要求：(1) 要使此整式有三项；(2) 此整式的值恒为负数.

分析：这是一道开放题，也是一道探索题. 由题设知结果要是三项式，且最好能配成完全平方式的相反数与一个负数的和的形式.

解：如 $-x^2+2x-2$，$-2x^2+4x-8$ 等.

点评：类似于此题的开放题一般有多种答案，一定要注意题目的要求，找出符合题意的答案.

例 4. 你能用图形验证 $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ 及 $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$ 吗?

分析：用图形验证完全平方公式，实际上就是阐述公式的几何背景，可以用几何图形面积法来解决.

解：在图 1－9 左图中，大正方形的面积是 $(a+b)^2$，它由两个小正方形和两个相等的长方形组成. 两个小正方形的面积分别是 a^2、b^2，长方形的面积是 ab，所以有等式 $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$.

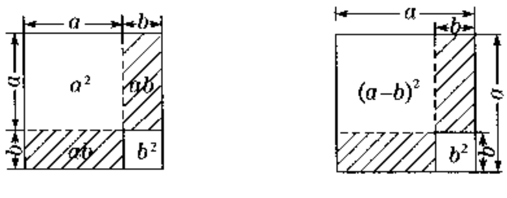


图 1－9

在图 1－9 右图中，大正方形的面积是 a^2，两个小正方形的面积分别是 $(a-b)^2$、b^2，两个相等的长方形面积都是 $(a-b)\cdot b$，于是有 $a^2=(a-b)^2+2(a-b)\cdot b+b^2$，即 $(a-b)^2=a^2-2(a-b)\cdot b-b^2=a^2-2ab+b^2$.

点评：这道题目通过把 $a+b$ 和 $a-b$ 看做两个正方形的边长，从而利用图形面积解决问题，让我们进一步感受到了"数形结合"的思想.

例 5. 计算：(1) $(-4a-1)\cdot(4a-1)$；(2) $(a+b+c)(a-b-c)$；(3) $(x+1)^2-5(1+x)(x-1)+4(x-1)^2$；(4) $(a^2-4)^2-2(a+2)(a-2)(a^2+4)+(a^2+4)^2$.

分析：(1)、(2)两题观察题型后可直接用平方差公式，(3)、(4)两题中分别含有多项式的加、减、乘等计算.

解：(1) 原式 $=[(-1)+4a]\cdot[(-1)-4a]=(-1)^2-(4a)^2=1-16a^2$；

(2) 原式 $=[a+(b+c)]\cdot[a-(b+c)]=a^2-(b+c)^2=a^2-b^2-c^2-2bc$；

(3) 原式 $=x^2+2x+1-5(x^2-1)+4x^2-8x+4=x^2+2x+1-5x^2+5+4x^2-8x+4=-6x+10$；

(4) 原式 $=(a^2-4)^2-2(a^2-4)(a^2+4)+(a^2+4)^2=[(a^2-4)-(a^2+4)]^2=(a^2-4-a^2-4)^2=(-8)^2=64$.

点评：① 运用乘法公式时，要对照公式的"格式"，分清哪个代数式是公式中的 a，哪个代数式是公式中的 b，注意"变元"或"换元"的实质；② 注意括号前的符号，括号前添负号，括号内各项都要变号；③ 在乘法运算中，有时一题有多种解题思路，应注意灵活选择计算过程，使计算正确简捷.

例 6. 已知：$(x+y)^2=8$，$(x-y)^2=2$，求 x^2+y^2 与 xy 的值.

分析：两个已知条件 $(x+y)^2=8$、$(x-y)^2=2$ 中都隐藏着所求的两个代数式 x^2+y^2、xy 的形式. 可以把所求的两个代数式当做两个未知数，用解方程(组)的方法来解决.

解：由 $(x+y)^2=8$，得 $x^2+2xy+y^2=8$　　①

由 $(x-y)^2=2$，得 $x^2-2xy+y^2=2$　　②

①＋②得 $2x^2+2y^2=10$，$x^2+y^2=5$

①－②得 $2xy+2xy=6$，$xy=\frac{3}{2}$

点评：根据所给条件，利用解方程(组)的方法是通常的思想方法.

练兵平台

一、选择题

1. 下列运算中，正确的是　　（　　）

A. $x^2+x^2=2x^4$　　B. $x^2+x^2=x^4$　　C. $x^2\cdot x^3=x^6$　　D. $x^2\cdot x^3=x^5$

2. 若单项式 $3xy^{2m+1}$ 与单项式 $-y^{3m-2}x$ 为同类项，则 m 的值为　　（　　）

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

3. 如图 1－10，阴影部分的面积用代数式表示，错误的是　　（　　）

A. $ac+bc-c^2$　　B. $(a-c)c+(b-c)c+c^2$

C. $a+b+2c+(a-c)+(b-c)$　　D. $ab-(a-c)(b-c)$

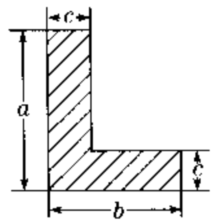


图 1－10

4. 计算 $2^{100}+(-2)^{101}$，所得结果是　　（　　）

A. -2　　B. -2^{100}

C. 2　　D. 2^{100}

5. 在(1) $(-1)^0=1$；(2) $(-1)^9=-1$；(3) $3a^{-2}=\frac{1}{3a^2}$；(4) $(-x)^5\div(-x)^3=-x^2$ 中，正确的式子有　　（　　）

A. 1 个　　B. 2 个　　C. 3 个　　D. 4 个

6. 现规定一种运算：$a*b=ab+a-b$，其中 a、b 为有理数，则 $a*b+(b-a)*b$ 等于　　（　　）

A. a^2-b　　B. b^2-b　　C. b^2　　D. b^2-a

7. 在下列各式中，与 $(2x-3y)$ 相乘，不能运用乘法公式的是　　（　　）

A. $(-3y-2x)$　　B. $(3y-2x)$　　C. $(-3y+2x)$　　D. $(2y+3x)$

8. 一个正方形的边长是 $a-\frac{1}{2}b$，它的面积是　　（　　）

A. $a^2-\frac{1}{4}b^2$　　B. $a^2+ab+\frac{1}{4}b^2$　　C. $a^2-ab+\frac{1}{4}b^2$　　D. $a^2-\frac{1}{2}ab+\frac{1}{4}b^2$

二、填空题

1. $a^3\div a\cdot\frac{1}{a}=$______.

2. $(-\frac{1}{5})^0\times10^{-3}=$______；$(1-\pi)^0\div(\frac{3}{4})^{-2}=$______.

3. 若 $9^{m+4}\times27^{m+1}\div3^{4m-8}=81$，则 $m=$______.

4. $(x-y)^{10}\div(y-x)^5\div(x-y)=$______.

5. (1) $(x-\frac{1}{2})^2=x^2+($______$)+\frac{1}{4}$；

(2) $(3a+$______$)^2=($______$)+6a+($______$)$；

(3) $($______$-\frac{1}{3}b)^2=($______$)-2ab+($______$)$；

(4) $(-2x+5)($______$)=25-4x^2$；

(5) $(a-b)^2=(a+b)^2+($______$)$.

体验中考

1. 直接写出结果：

(1) $(2x^2-y)(y+2x^2)=$______；

(2) $(2x+1)(2x^2-1)=$ ________;

(3) $(a+3)(a^2+9)(a-3)=$ ________;

(4) $ab(3a+2b)(3a-2b)=$ ________;

(5) 若 $x+y=5$，$xy=2$，则 $(x+y)^2=$ ________，$x^2+y^2=$ ________，$(x-y)^2=$ ________；

(6) 已知 $a(a-2)-(a^2-2b)=-4$，则 $\frac{a^2+b^2}{2}-ab=$ ________；

(7) 利用乘法公式计算 $2005\times2007-2006^2=$ ________；

(8) 两个正方形的边长的和为 a，边长的差为 b，那么这两个正方形的面积的差为________.

2. 计算：$[4^{-1}\times3\times(-\frac{2}{3})^{-2}]\div[5-(\frac{1}{2})^{-1}]$

3. 已知：$|x|=1$，$|y|=\frac{1}{2}$，求 $(x^{4})^{5\ 2}\ x^{3}y^{2}$ 的值.

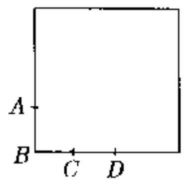


图 1－11

4. (南京·2004)如图 1－11，边长为 12 米的正方形池塘的周围是草地，池塘边 A、B、C、D 各有一棵树，且 $AB=BC=CD=3$ 米. 现用长 4 米的绳子将一头羊拴在其中的一棵树上. 为了使羊在草地上的活动区域面积最大，应将绳子拴在何处？

5. 计算：$(m+1)^2-5(m+1)(m-1)+3(m-1)^2$

6. 若 $1+2+3+\cdots+n=k$，求 $(x^ny)\cdot(x^{n-1}y^2)\cdot(x^{n-2}y^3)\cdots\cdot(xy^n)$ 的值.

7. 现有若干个边长为 a 的小正方形纸片，你能拼出一个新的正方形吗？多少个小正方形才能拼成一个新的正方形？用不同的方法表示新正方形的面积. 从不同的表示法中你发现了什么？

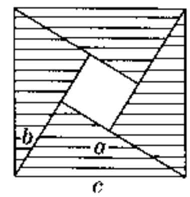


图 1－12

8. 用四个边长分别为 a、b、$c(0<b<a<c)$ 的直角三角形组成的大小两个正方形，如图 1－12(这个图叫勾股圆方图). 请你分别用 a、b 和 a、b、c 的代数式表示阴影部分的面积，猜一猜这两个代数式的关系，并看一下能得到什么结论.

课时 5　整式的乘法

典型剖析

例 1. 计算：(1) $2ab^2[3ab-4(ab+\frac{1}{2}a^2b)]$

(2) $3(x-2)(x-3)+2(x+5)(x-6)$

分析：对于整式的加、减、乘混合运算，先乘法，后加减，有括号一般先括号内再括号外做，最后合并同类项.

解：(1) 原式 $=2ab^2(3ab-4ab-2a^2b)=6a^2b^3-8a^2b^3-4a^3b^3=-2a^2b^3-4a^3b^3$；

(2) 原式 $=3(x^2-5x+6)+2(x^2-x-30)=3x^2-15x+18+2x^2-2x-60=5x^2-17x-42$.

点评：① 做乘法时多项式的每一项都要乘到，防止漏乘某项；② 去括号时要注意括号前的符号，防止漏变某项符号；③ 有同类项尽可能先合并，避免多次相乘；④ 两个二项式相乘，积一般为四项，如有同类项合并，也可以合并成三项或两项；可直接应用 $(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$ 公式.

例 2. 计算：(1) $(-2x^2)^3\cdot(-x^3)^3$；

(2) $(-x^3)^4-3x^9(2x)^3+2x^6\cdot8(x^3)^2$.

分析：本题是"同底数幂的乘法"、"幂的乘方"、"积的乘方"等的混合运算. 做题前，先观察，看清运算的性质. 两题都是先做"积的乘方"，再做"幂的乘方"，第(2)题要合并同类项.

解：(1) $8x^{15}$；(2) $-7x^{12}$(过程略).

分析：进行"同底数幂的乘法"、"幂的乘方"、"积的乘方"混合运算时要注意运算顺序，同时还要注意负数