农林类高职高专基础课系列教材

高等数学（上册）

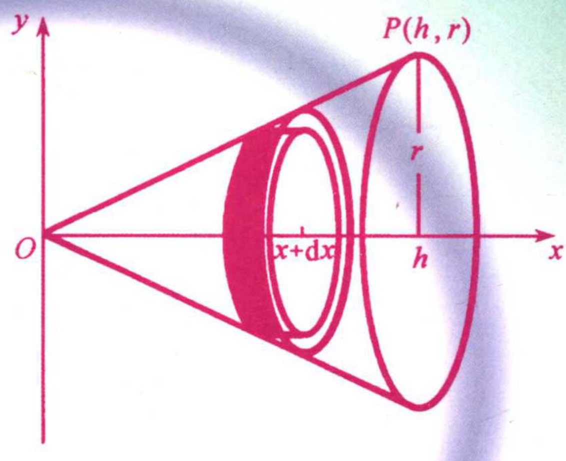
谢厚桂　徐文智　张青娥　主编

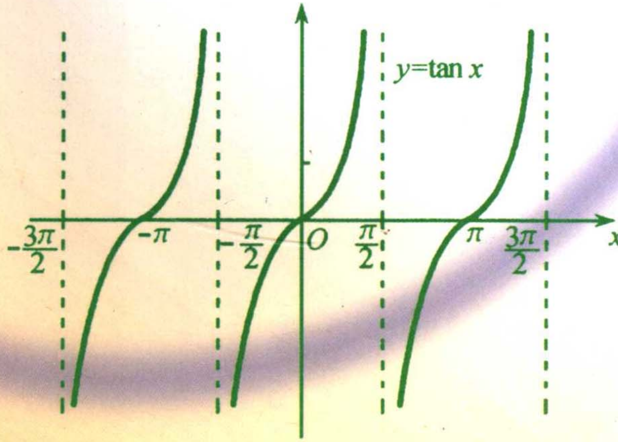
$$\int \cos x\,\mathrm{d}x = \sin x + C$$

$$\int \tan x\,\mathrm{d}x = -\ln|\cos x| + C$$

$$\int \cot x\,\mathrm{d}x = -\ln|\sin x| + C$$

$$\int \sec^2 x\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x = \tan x + C$$





中国林业出版社

农林类高职高专基础课系列教材

高 等 数 学

（上册）

谢厚桂　徐文智　张青娥　主编

中国林业出版社

图书在版编目（CIP）数据

高等数学．上册/谢厚桂，徐文智，张青娥主编．—北京：中国林业出版社，2003.8
农林类高职高专基础课系列教材
ISBN 7-5038-3513-3

Ⅰ．高… Ⅱ．①谢…②徐…③张… Ⅲ．高等数学—高等学校：技术学校—教材
Ⅳ．013

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2003）第 066977 号

出版 中国林业出版社（100009 北京西城区刘海胡同 7 号）
E-mail：cfphz@public. bta. net. cn 电话：66184477
发行 中国林业出版社
印刷 北京林业大学印刷厂
版次 2003 年 8 月第 1 版
印次 2003 年 8 月第 1 次
开本 787mm×960mm 1/16
印张 20.25
字数 364 千字
印数 1～5000 册

定价 28.00 元

前　言

本书是根据“教育部关于高职、高专的培养目标”及“高职、高专数学课程”教学大纲所规定的高等数学的内容和要求，本着数学“服务专业，必须够用”的原则，为实施素质教育，培养数学创新能力，在原编高职（高专）用《高等数学》讲义试用两年的基础上，进一步修订而编写的。

本书的特点是：知识结构合理，内容安排恰当，语言叙述通俗、简练；重点阐述数学知识和数学方法；全书理论推导过程从简，注重数学知识的实用性和能力训练。此外，每节都配有一定数量的习题，可供学生练习和巩固所学知识之用。为了便于读者更好地学习高等数学，使教学有一定的梯度，本书另配备了《高等数学学习指导（上册）》，可帮助学生巩固知识、提高技能。

本书共分九章。其中第一至六章为一元函数微积分，第七至九章为微分方程、空间解析几何初步及多元函数微积分。使用时各学校可根据学时和专业特点适当删减。全书习题均附有答案。同时，书末还附有基本积分表、希腊字母表以备学生查阅。

本书覆盖面广，使用范围大。本书可作为农林类或综合类高等职业学校、成人高校、高等专科学校及本科院校举办的二级职业技术学院专科或本科的教学用书，也可作为“专升本”的自学高等数学的参考用书。

本书由谢厚桂、徐文智、张青娥主编。参加本书编写的有：山东农业大学科技学院谢厚桂（第一、二章、第三章第六、七节）、耿相月（第三章第一至五节），福建林业职业技术学院郑瑞根（第四章），河南科技大学林业职业学院张青娥、张宾子（第五、六章），甘肃林业职业技术学院徐文智、辛永清（第七、八章）；山东农业大学科技学院郝建民（第九章）。全书最后由谢厚桂修改、编纂、定稿。另外，山东农业大学科技学院王志武、李均、张勤英参加了部分章节的编写。

本书在编写过程中参考了国内外同行的有关著作和研究成果，并得到了山东农业大学科技学院、河南科技大学林业职业学院、甘肃林业职业技术学院和福建林业职业技术学院教务处以及山东农业大学信息工程学院数学系有关专家的大力支持，该书的出版还得益于中国林业出版社的精心策划和通力合作，在

此一并表示衷心的感谢。

本书尽管经过多次补充、修改，但我们深知还有许多不完善之处，有待进一步探索，敬请读者不吝赐教。

编 者

2003年8月

目　　录

第一章　函　数 …… (1)
　第一节　变量与函数 …… (1)
　　习题 1-1 …… (10)
　第二节　初等函数 …… (11)
　　习题 1-2 …… (17)
第二章　极限与连续 …… (18)
　第一节　数列的极限 …… (18)
　　习题 2-1 …… (22)
　第二节　函数的极限 …… (23)
　　习题 2-2 …… (27)
　第三节　极限的运算法则、两个重要极限 …… (28)
　　习题 2-3 …… (35)
　第四节　无穷小量、无穷大量 …… (35)
　　习题 2-4 …… (40)
　第五节　函数的连续性 …… (41)
　　习题 2-5 …… (47)
　第六节　闭区间上连续函数的性质 …… (48)
　　习题 2-6 …… (49)
第三章　导数与微分 …… (51)
　第一节　导数的概念 …… (51)
　　习题 3-1 …… (57)
　第二节　函数和、差、积、商的求导法则 …… (58)
　　习题 3-2 …… (60)
　第三节　反函数的导数、复合函数的求导法则 …… (61)
　　习题 3-3 …… (65)
　第四节　高阶导数 …… (66)
　　习题 3-4 …… (69)
　第五节　隐函数、参数方程确定的函数的导数 …… (69)
　　习题 3-5 …… (73)

第六节 函数的微分 …… (74)
习题 3-6 …… (80)
第七节 导数在经济分析中的应用 …… (81)
习题 3-7 …… (84)
第四章 微分中值定理与导数应用 …… (85)
第一节 中值定理 …… (85)
习题 4-1 …… (90)
第二节 洛必达（L'Hospital）法则 …… (91)
习题 4-2 …… (95)
第三节 泰勒（Taylor）公式 …… (96)
习题 4-3 …… (98)
第四节 函数的单调性与极值 …… (99)
习题 4-4 …… (106)
第五节 曲线的凹凸与函数作图 …… (107)
习题 4-5 …… (112)
第五章 不定积分 …… (114)
第一节 不定积分的概念及其性质 …… (114)
习题 5-1 …… (119)
第二节 换元积分法 …… (120)
习题 5-2 …… (127)
第三节 分部积分法 …… (128)
习题 5-3 …… (131)
第四节 几种可以积出的函数类 …… (131)
习题 5-4 …… (137)
第五节 积分表的使用 …… (137)
习题 5-5 …… (138)
第六章 定积分 …… (140)
第一节 定积分概念 …… (140)
习题 6-1 …… (145)
第二节 定积分的性质、中值定理 …… (145)
习题 6-2 …… (149)
第三节 微积分基本公式 …… (149)
习题 6-3 …… (155)
第四节 定积分的换元法 …… (156)

习题 6-4 …… (160)
第五节　定积分的分部积分法…… (161)
习题 6-5 …… (163)
*第六节　广义积分、Γ-函数 …… (163)
习题 6-6 …… (169)
第七节　定积分的应用…… (170)
习题 6-7 …… (177)
第七章　微分方程 …… (179)
第一节　微分方程的基本概念…… (179)
习题 7-1 …… (182)
第二节　一阶微分方程…… (183)
习题 7-2 …… (192)
第三节　可降阶的高阶微分方程…… (193)
习题 7-3 …… (197)
第四节　二阶常系数线性微分方程…… (197)
习题 7-4 …… (205)
第八章　空间解析几何简介 …… (207)
第一节　空间直角坐标系…… (207)
习题 8-1 …… (208)
第二节　向量、向量的加减法及数乘向量…… (208)
习题 8-2 …… (212)
第三节　向量的坐标表示…… (212)
习题 8-3 …… (215)
第四节　两向量的数量积与向量积…… (216)
习题 8-4 …… (220)
第五节　曲面及其方程…… (221)
第六节　平面及其方程…… (222)
第七节　常用的二次曲面…… (224)
习题 8-7 …… (225)
第九章　多元函数微积分 …… (226)
第一节　多元函数…… (226)
习题 9-1 …… (232)
第二节　偏导数与全微分…… (233)
习题 9-2 …… (248)

第三节 二元函数的极值……………………………………………… (251)

习题 9-3 ……………………………………………………… (259)

第四节 二重积分……………………………………………………… (260)

习题 9-4 ……………………………………………………… (273)

附录一 习题参考答案……………………………………………… (275)

附录二 简单积分表………………………………………………… (302)

主要参考文献………………………………………………………… (313)

第一章 函　　数

初等数学的主要研究对象是常量及其运算。17世纪笛卡尔(Descartes)把变量引入数学后，对数学产生巨大影响，使数学从研究常量的初等数学进一步发展到了研究变量的高等数学。微积分是高等数学的主要内容，它是研究变量之间的依赖关系即函数关系的一门科学。本章将在中学已有知识的基础上，介绍函数的定义、简单特性，并进一步学习分段函数、复合函数、初等函数等重要概念。

第一节　变量与函数

一、常量与变量

我们在观察自然现象以及研究问题或从事生产和技术的过程中，总会遇到许多量，这些量一般可分为两类：一类是在过程进行中不断变化的，也就是可以取不同数值的量，这种量叫变量；另一类是在过程进行中保持不变的量，这种量叫常量。

例如，一个物体作匀速直线运动，那么时间与位移的大小都是变量，而速度却是常量。又如，一个金属圆环由于热胀冷缩，在受热的过程中，圆环的直径与周长在不断变大，冷却时却又不断地变小，因此直径与周长都是变量，但在整个过程中，周长与直径之比却是始终不变，是一个常量，就是圆周率$\pi=3.1415926\cdots$。

应当注意，在研究一些特定现象时，同一个量在这一现象中是常量，而在另一个现象中却是变量。例如速度在匀速运动中是常量，在匀变速运动中又是变量。另外还要注意变量与常量的相对意义。一个量是变量还是常量要根据具体情况具体分析。例如，气温的变化会引起机器上轴的热胀冷缩，如果引起的轴的变化极小，而这种变化对机器精度的影响又微不足道，那么为了研究问题的方便，我们宁可把它作常量处理；但对于一些精密的机器上的轴，既使是轴长的变化很微小，也会影响机器的精度，这时就应把它作为变量来处理。

通常用$a,b,c,\alpha,\beta\cdots$等字母来表示常量；用字母$x,y,z,u,v\cdots$等字母来表示变量。

二、区间、邻域

1. 区 间

区间是用得较多的一类数集。设 a 和 b 是两个实数且设 $a<b$,数集

$$\{x|a<x<b\}$$

称为开区间,记作(a,b) 即

$$(a,b)=\{x|a<x<b\}$$

a 和 b 称为开区间的端点,这里 $a\notin(a,b)$,$b\notin(a,b)$。数集

$$\{x|a\leqslant x\leqslant b\}$$

称为闭区间,记作$[a,b]$ 即

$$[a,b]=\{x|a\leqslant x\leqslant b\}$$

这里 $a\in[a,b]$,$b\in[a,b]$

类似地可定义

$$[a,b)=\{x|a\leqslant x<b\}$$

$$(a,b]=\{x|a<x\leqslant b\}$$

区间$[a,b)$、$(a,b]$都称为半开半闭区间。

以上这些区间称为有限区间。数 $b-a$ 称为区间的长度。从数轴上看,这些有限区间是长度为有限的线段,用图 1-1 表示如下:

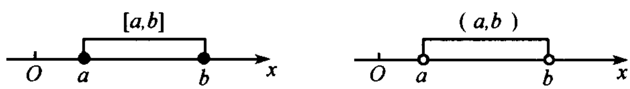


图 1-1

此外还有无限区间,引进记号$+\infty$(正无穷大)及$-\infty$(负无穷大),则可类似地表示无限区间。

$$[a,+\infty)=\{x|x\geqslant a\}$$

$$(a,+\infty)=\{x|x>a\}$$

$$(-\infty,b]=\{x|x\leqslant b\}$$

$$(-\infty,b)=\{x|x<b\}$$

全体实数的集合 R,记作$(-\infty,+\infty)$,即 $R=(-\infty,+\infty)$,它也是无限区间,如图 1-2。

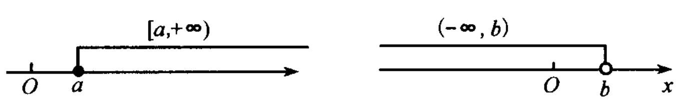


图 1-2

2. 邻 域

邻域是个经常用的概念。以点 a 为中心的任何开区间称为点 a 的邻域，记作 $U(a)$。

设 a,δ 为两个实数，且 $\delta>0$，满足不等

$$|x-a|<\delta$$

的全体实数 x 组成的集合

$$\{x \mid |x-a|<\delta\}=(a-\delta,a+\delta)$$

就称为点 a 的 δ 邻域，记作 $U(a,\delta)$，即，

$$U(a,\delta)=\{x \mid |x-a|<\delta\}$$

实事上，不等式 $|x-a|<\delta$ 即为 $a-\delta<x<a+\delta$
所以 $U(a,\delta)=\{x \mid a-\delta<x<a+\delta\}=(a-\delta,a+\delta)$。

因此点 a 的 δ 邻域 $U(a,\delta)$ 就是开区间 $(a-\delta,a+\delta)$，即是以点 a 为中心，δ 为半径的开区间。如果把 $U(a,\delta)$ 的中心 a 去掉，即开区间 $(a-\delta,a)\cup(a,a+\delta)$ 就称为点 a 的 δ 去心邻域(图 1-3)，记作 $U^0(a,\delta)$ 即

图 1-3

$$U^0(a,\delta)=\{x \mid 0<|x-a|<\delta\}=(a-\delta,a)\cup(a,a+\delta)$$

三、函 数

在研究某一自然现象或实际问题的过程中，总会发现问题中的变量都不是独立变化的，它们之间往往存在着依赖关系，变量之间的这种依存关系，即为数学上的函数关系。

定义 设 x 和 y 是互相联系着的两个变量，D 是一个给定的数集。如果对每一个数 $x\in D$，变量 y 按照某种对应法则，总有确定的数值与之对应，则称变量 y 是变量 x 的函数，记作 $y=f(x)$。称数集 D 为这个函数的定义域，x 叫自变量，y 叫因变量，f 表示由 x 确定 y 的对应法则。

当自变量 x 取数集 D 的任一数值 x_0 时，与 x_0 对应的 y 的数值叫做 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的函数值，记作 $f(x_0)$ 或 $y|_{x=x_0}$。

当 x 遍取 D 中的所有数值时，对应的函数值的全体组成的集合：

$$W=\{y \mid y=f(x),x\in D\}$$

称为函数 $y=f(x)$ 的值域。

由函数的定义可知，函数的定义域和对应法则是决定函数的二大要素。其中对应法则是决定函数的核心要素。为了表示不同的函数，除了用 $f(x)$ 表示以外，还可以用 $\varphi(x)$，$g(x)$，$F(x)$，$\psi(x)$ 等来表示不同的函数。两个函数当且仅当只有

定义域和对应法则完全相同时，这两个函数才算是相等的函数。例如：$y=\lg x^3$ 与 $y=3\lg x$ 就是相同的函数；而 $y=\lg x^2$ 与 $y=2\lg x$ 就不是相同的函数，因为它们的定义域不同。

在研究函数的定义域时，对于实际问题，定义域要符合问题的实际意义；对于不考虑实际意义而抽象地研究用算式表达的函数，其定义域就是自变量所能取的使算式有意义的一切实数值，例如函数 $y=\sqrt{1-x^2}$的定义域即为闭区间 $[-1,1]$，而 $y=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$的定义域为开区间 $(-1,1)$。

值的注意的是，如果自变量在定义域内任取一个数值时，对应的函数值只有一个，这样的函数叫单值函数，例如 $y=3x-2$ 就是单值函数，否则就叫多值函数，例如$y=\pm\sqrt{1-x^2}$就是多值函数。

今后如不特别声明，所研究的函数都是单值函数。

还应当指出，上述函数只指出了因变量 y 与一个自变量 x 的关系，但在实际问题中，往往要有二个以上的量之间的关系。我们把含有一个自变量的函数叫一元函数，而含两个或两个以上自变量的函数叫多元函数。例如矩形面积 A，与其两边 a、b 的关系即为 $A=ab$，显然面积 A 是二直角边长 a 与宽 b 的二元函数。再例如三角形面积 A，它的两条边 a、b 及其夹角 θ 的关系为 $A=ab\sin\theta$，所以 A 是 a、b、θ 的三元函数。

函数有三种表示方法，即公式法、图像法、表格法。但在用公式法表示函数时，有些函数在定义域的不同范围内，对应法则用不同的式子来表示，这样的函数叫分段函数。下面举几个常见的例子。

例 1 旅客携带行李乘飞机旅行时，行李的重量不超过 20 千克时不收费用，若超过 20 千克，每超过 1 千克收运费 a 元，试建立运费 y 与行李重量 x 的函数关系。

解 因为，当 $0\leqslant x\leqslant 20$ 时，运费 $y=0$，而当 $x>20$ 时，只有超过的部分 $x-20$按每千克 a 元收费，此时 $y=a(x-20)$，于是函数 y 可以写成：

$$y=\begin{cases}0 & 0\leqslant x\leqslant 20\\ a(x-20) & x>20\end{cases}$$

这样就建立了行李重量 x 与运费 y 之间的关系。

例 2 绝对值函数

$$f(x)=|x|=\begin{cases}x & x\geqslant 0\\ -x & x<0\end{cases}$$

的定义域 $D=(-\infty,+\infty)$，值域 $W=[0,+\infty)$，它的图形如图 1-4。

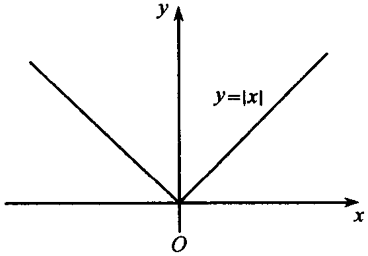


图 1-4

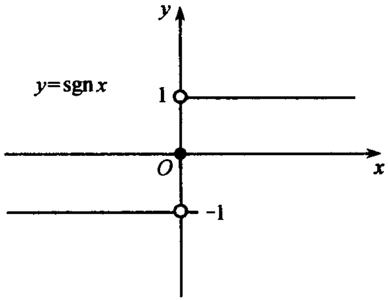


图 1-5

例 3　函数

$$y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1 & x>0\\0 & x=0\\-1 & x<0\end{cases}$$

称为符号函数。它的图形如图 1-5。

例 4　设

$$y=f(x)=\begin{cases}x^2 & 0\leqslant x\leqslant 1\\2x & 1<x\leqslant 2\end{cases}$$

求：①$f(x)$的定义域；②求 $f(\frac{1}{2})$、$f(1)$、$f(\frac{3}{2})$。

解　①$f(x)$的定义域为$[0,2]$；②当 $x\in[0,1]$时 $f(x)=x^2$，$\therefore f(\frac{1}{2})=(\frac{1}{2})^2=\frac{1}{4}$；$f(1)=1^2=1$；而当 $x\in(1,2]$时，$f(x)=2x$，$\therefore f(\frac{3}{2})=2\times\frac{3}{2}=3$。如图 1-6。

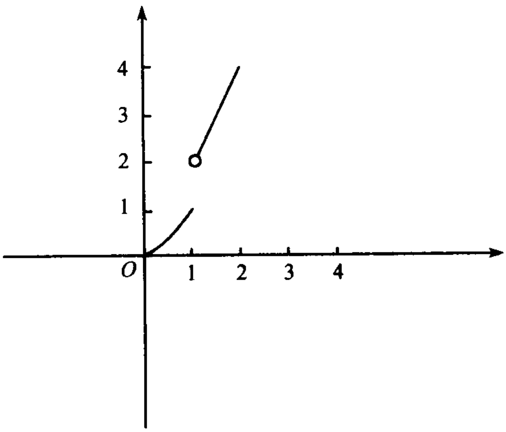


图 1-6

应当注意的是，我们切不能因为分段函数在不同的区间由不同的表达式来表示，就误认为是几个函数。

四、函数的几种特性

1. 函数的单调性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，区间 $I \subset D$，如果对于区间 I 上任意两点 x_1 及 x_2，当 $x_1 < x_2$ 时，恒有

$$f(x_1) < f(x_2)$$

则称函数 $f(x)$ 在区间 I 是严格单调增加的；如果对于区间 I 上任意两点 x_1 及 x_2，当 $x_1 < x_2$ 时，恒有

$$f(x_1) > f(x_2)$$

则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是严格单调减少的。单调增加、单调减少的函数统称为单调函数，区间 I 叫单调区间。

单调增函数的图形，表现为自左向右上升的曲线段；单调减少的函数的图形，表现为自左向右下降的曲线段，如图 1-7。

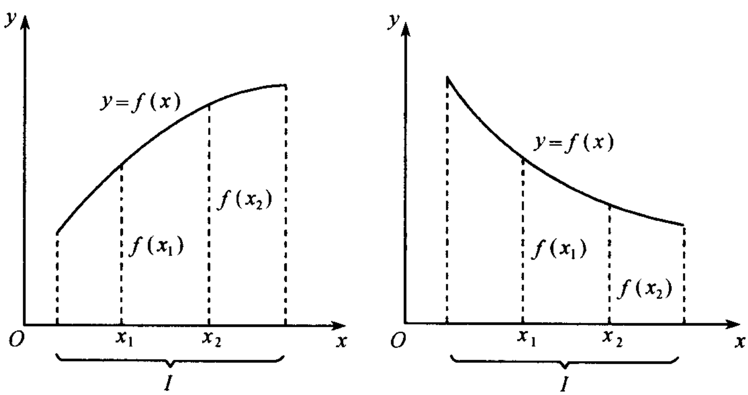


图 1-7

例如：函数 $f(x) = x^3$，在区间 $(-\infty, +\infty)$ 内是单调增加的函数。函数 $f(x) = x^2$ 在区间 $[0, +\infty)$ 上是单调增的，在区间 $(-\infty, 0]$ 上是单调减少的，但在区间 $(-\infty, +\infty)$ 内函数不是单调函数，如图 1-8。

2. 函数的奇偶性

设函数 $f(x)$ 的定义域 D 是关于原点对称的区间（即若 $x \in D$，则 $-x \in D$）。若对每一个 $x \in D$ 有

$$f(-x) = -f(x)$$

恒成立，则称 $f(x)$ 为奇函数。若对每一个 $x \in D$ 有

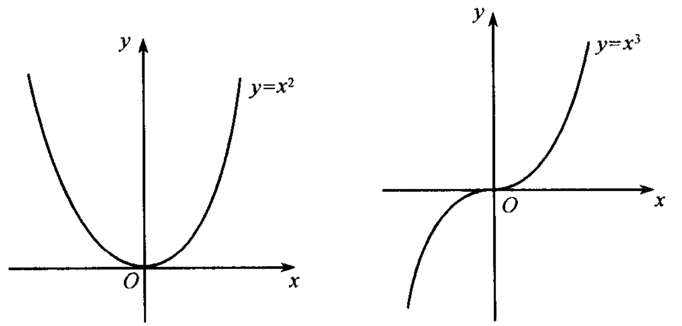


图 1-8

$$f(-x)=f(x)$$

恒成立，则称 $f(x)$ 为偶函数。

例如：$f(x)=x^2$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 内的偶函数，因为 $f(-x)=f(x)=x^2$ 在 $x\in(-\infty,+\infty)$ 内恒成立。又例如 $f(x)=x^3$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 内的奇函数，因为 $f(-x)=-f(x)=-x^3$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内恒成立。可以验证 $f(x)=x$，$f(x)=\sin x$，$f(x)=\mathrm{sgn}x$ 都是奇函数；而 $f(x)=\cos x$，$f(x)=1$ 等都是偶函数。

奇函数的图形关于原点对称，偶函数的图形关于 y 轴对称。图 1-9(a) 为偶函数，(b) 为奇函数。

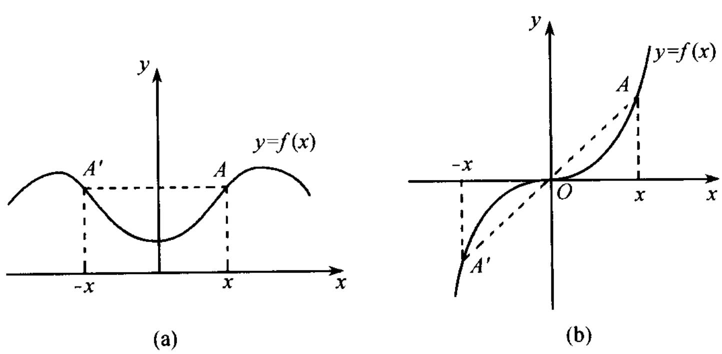


图 1-9

必须注意，不能说函数 $f(x)$ 非奇既偶或非偶既奇。如函数 $f(x)=x+1$，既不是奇函数也不是偶函数。又如 $f(x)=\sin x+\cos x$ 也是非奇非偶的函数。

3. 周期性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，若存在一个不为零的正常数 T，使得对任意的 $x\in D$，有 $x+T\in D$，且

$$f(x+T)=f(x)$$

恒成立，则称 $f(x)$ 为周期函数，T 称为 $f(x)$ 的一个周期。

若 T 为 $f(x)$ 的一个周期，则因 $f(x+2T)=f(x+T+T)=f(x+T)=f(x)$，故 $2T$ 也为 $f(x)$ 的一个周期，类似地可以说明 $KT(K=-1,K=-2,K=\pm3,K=\pm4,\cdots)$ 也为 $f(x)$ 的周期。因此周期函数的周期有无限多个。通常我们说周期函数的周期是指最小正周期。

例如 $f(x)=\sin x,g(x)=\cos x$ 都是以 2π 为周期的周期函数；而函数 $\tan x$，$\cot x$ 都是以 π 为周期的周期函数。

在几何上，周期函数在定义域内每个长度为 T 的区间上，函数图形有相同的形状，如图 1-10。

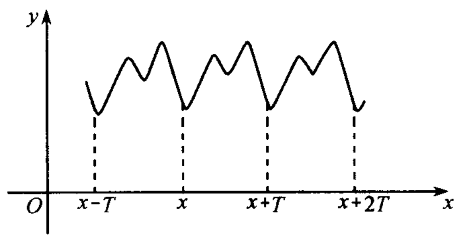


图 1-10

4. 有界性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，数集 $I\subset D$，如果存在常数 B，使得

$$f(x)\leqslant B$$

对任意的 $x\in I$ 都成立，则称函数 $f(x)$ 在 I 上有上界，且 B 称为 $f(x)$ 在区间 I 上的一个上界。如果存在常数 A，使得

$$f(x)\geqslant A$$

对任意的 $x\in I$ 都成立，则称函数 $f(x)$ 在 I 上有下界，且称 A 为 $f(x)$ 在区间 I 上的一个下界。如果存在常数 $M>0$ 使得

$$|f(x)|\leqslant M$$

对任意的 $x\in I$ 都成立，则称函数 $f(x)$ 在 I 上有界，也称函数 $y=f(x)$ 为区间 I 上的有界函数，且称 M 为 $f(x)$ 在区间 I 上的一个界。否则便是无界的。既若对任意 $M>O$，总存在 $x\in I$，使得，$|f(x)|>M$ 成立，则说 $f(x)$ 在 I 上是无界的。例如 $f(x)=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内，总有 $|\sin x|\leqslant1$ 成立，所以 $f(x)=\sin x$ 在 $x\in(-\infty,+\infty)$ 内是有界函数。又例如 $f(x)=\dfrac{1}{x}$，在 $x\in(1,2)$ 内是有界的，例如可取 $M=1$ 而使 $\left|\dfrac{1}{x}\right|\leqslant1$ 对一切 $x\in(1,2)$ 都成立，但 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在 $(0,1)$ 内是