解析幾何題類分析

冷世俊
周尚启 主编

南海出版公司

解析幾何題類分析

主　编　冷世俊　周尚君

副主编　安茂杰　张淮毅　秦炳强

编　委　陈志友　陈桂华　许振华
杨公松　张元明　[illegible]英
刘德金　陈国华　常典兵
艾素梅　田治平　张　镒
李顺廷

主　审　杨燕钧

南海出版公司

1991年·海口

解析几何题类分析

主　编　冷世俊
周尚启

装帧设计　英　华

南海出版公司出版发行
山东省临沂市第二印刷厂印刷

850×1168毫米　32开本　16.3印张　400千字
1991年9月第1版　1991年9月第1次印刷
印数：1—5000

ISBN 7—80570—632—8/G·170

定价：7.00元

前　言

编写这本书，是我们多年来的愿望，目的有三条：（1）帮助在职的广大中学数学教师进行再学习，以期不断提高教学能力；（2）为在校的数学专业的大学生提供一份辅助读物；（3）为讲授“解析几何”的同仁们提供一本参考书。

“解析几何”是由初等数学转入高等数学的桥梁，现行中学数学教材就有平面解析几何，高校数学专业又把解析几何列入基础课程，任何一位中学数学教师都应当通晓这门课。鉴于在职中学教师时间紧缺的情况，本书在分章分节概述基本内容的同时，对基本题目都进行了详细地分析和解答，中学教材中薄弱的参数方程、极坐标、坐标变换、二次曲线方程的化简等部分都着力地进行了强化，这对于完善中学教师的“解析”知识，提高教师的授课能力是极为有益的。任何一位中学数学教师有此书相佐，都可以在较短时间内，顺利地读完“解析几何”这门基础课。

本书题目甚丰，解法多样，又载有为数甚多的难题，在解答难题的过程中又注意使用了“矢量”的手段。在校大学生以此书相佐学习“解析几何”，必将丰富和扩展几何知识，获得许多新颖的解题方法，有利于提高思维能力和解题的技能技巧。

对于讲授“解析几何”的同仁，这也是一本适宜的参考书，因为它方便备课，选例信手可取。

本书筛选了全国仅见的所有“解析几何”教材中的题目，进行了分类、整理，分析、详解，难易兼备，可与所有《解析几何》版本相配套。对于初学“解析几何”者，可略去较难的部分。如劈锥形、二次曲线及二次曲面方程的不变量等。

由于本书编写时间仓促，水平有限，文中难免存有缺点、错误，恭请读者批评指正。

编　者

1991年9月

目　录

第一章 矢量与坐标

§1.1 矢量的概念

既有大小又有方向的量叫做矢量，也称向量或矢，用有向线段表示，记为$\overrightarrow{AB}$（A表始点，B表终点），也可表为$\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{x}$、$\vec{y}$．矢量的长度叫做模，记为$|\overrightarrow{AB}|$或$|\vec{a}|$等等。模为0的矢量称为零矢，记为$\vec{0}$．模为1的矢量称为单位矢量。矢量$\vec{a}$的单位矢量记为$\vec{a^0}$，且$\vec{a^0}=\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$。方向相同或相反的矢量叫做平行矢量，也称共线矢量。若$\vec{a}$与$\vec{b}$平行，则记为$\vec{a}//\vec{b}$．方向互相垂直的矢量称为垂直矢量。若$\vec{a}$与$\vec{b}$垂直，则记为$\vec{a}\perp\vec{b}$．$\vec{0}$与任何矢量平行，也与任何矢量垂直。模相等且方向相同的矢量叫做相等矢量。若$\vec{a}$与$\vec{b}$相等，则记为$\vec{a}=\vec{b}$．模相等，方向相反的矢量叫做相反矢量，$\vec{a}$的相反矢量记为$-\vec{a}$．显然$\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{BA}$．三个或三个以上的矢量平行于同一个平面，则称它们是共面矢量，零矢量与任何共面的矢量组共面，共线的矢量组必共面。

本书所用矢量均系自由矢量，即一个矢量可以在空间自由平移，不计较始点的位置。

1 下列情形中矢量的终点各构成什么图形？

(1) 把空间中一切单位矢量归结到共同的始点；

(2) 把平行于某一平面的单位矢量归结到共同的始点；

(3) 把平行于某一直线的一切矢量归结到共同的始点；

(4) 把平行某一直线的一切单位矢量归结到共同的始点。

答 (1) 单位球面；(2) 单位圆；(3) 直线；(4) 两个相距为 2 的点。

2 设点 O 是正六边形 $ABCDEF$ 的中心，在矢量 $\overrightarrow{OA}$、$\overrightarrow{OB}$、$\overrightarrow{OC}$、$\overrightarrow{OD}$、$\overrightarrow{OE}$、$\overrightarrow{OF}$、$\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{BC}$、$\overrightarrow{CD}$、$\overrightarrow{DE}$、$\overrightarrow{EF}$ 和 $\overrightarrow{FA}$ 中，哪些矢量是相等的？

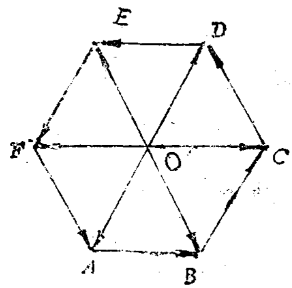

图 1

答 $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{EF}$，$\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{FA}$，$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{OE}=\overrightarrow{CD}$，$\overrightarrow{OF}=\overrightarrow{DE}$．

3 设在平面上给了一个四边形 $ABCD$，点 K、L、M、N 分别是边 AB、BC、CD、DA 的中点，求证 $\overrightarrow{KL}=\overrightarrow{NM}$。当 $ABCD$ 是空间四边形时这等式是否成立？

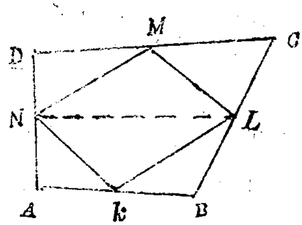

图 2

证 连结 AC，在 $\triangle ABC$ 中，$KL//AC$，且 $KL=\frac{1}{2}AC$，

$\therefore\ \overrightarrow{KL}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$．同理

$\overrightarrow{NM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$．$\therefore\ \overrightarrow{KL}=\overrightarrow{NM}$．

这个结论对于空间四边形也成立。

4 设 $ABCD-EFGH$ 是一个平行六面体。在下列各对矢量中，找出相等的矢量和互为相反的矢量。

(1) $\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{CD}$；(2) $\overrightarrow{AE}$、$\overrightarrow{CG}$；(3) $\overrightarrow{AC}$、$\overrightarrow{EG}$；(4) $\overrightarrow{AD}$、$\overrightarrow{GF}$；(5) $\overrightarrow{BE}$、$\overrightarrow{CH}$．

答　相等矢量有(2)，(3)，(5)；互为相反的矢量为(1)，(4)。

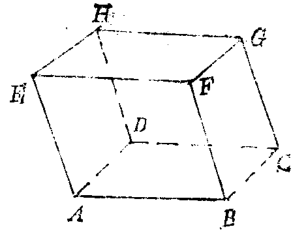

图 3

5　设$\triangle ABC$和$\triangle A'B'C'$分别是三棱台$ABC—A'B'C'$的上、下底面，试在矢量$\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{BC}$、$\overrightarrow{CA}$、$\overrightarrow{A'B'}$、$\overrightarrow{B'C'}$、$\overrightarrow{C'A'}$、$\overrightarrow{AA'}$、$\overrightarrow{BB'}$、$\overrightarrow{CC'}$中找出共线矢量和共面矢量。

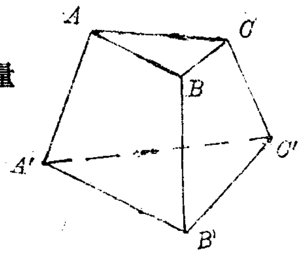

图 4

答　共线矢量组：$\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{A'B'}$，$\overrightarrow{BC}$与$\overrightarrow{B'C'}$，$\overrightarrow{CA}$与$\overrightarrow{C'A'}$；共面矢量组：$\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{BC}$、$\overrightarrow{CA}$、$\overrightarrow{A'B'}$、$\overrightarrow{B'C'}$与$\overrightarrow{C'A'}$；$\overrightarrow{AA'}$、$\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{BB'}$与$\overrightarrow{A'B'}$；$\overrightarrow{BB'}$、$\overrightarrow{B'C'}$、$\overrightarrow{CC'}$与$\overrightarrow{BC}$；$\overrightarrow{CC'}$、$\overrightarrow{CA}$、$\overrightarrow{AA'}$与$\overrightarrow{C'A'}$。

6　如图(5) 在长方体的相对平面中，哪些对角线成相等向量？哪些成相反向量？

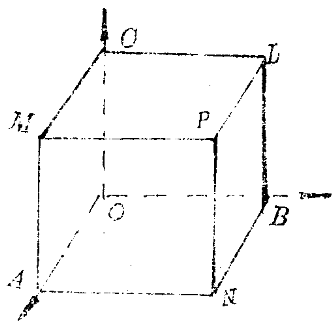

图 5

答：相等向量：$\overrightarrow{OL}=\overrightarrow{AP}$，$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{BP}$，$\overrightarrow{ON}=\overrightarrow{CP}$，$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{CB}$，$\overrightarrow{NL}=\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{LM}=\overrightarrow{BA}$；相反向量：$\overrightarrow{OL}=-\overrightarrow{PA}$，$\overrightarrow{OM}=-\overrightarrow{PB}$，$\overrightarrow{ON}=-\overrightarrow{PC}$，$\overrightarrow{MN}=-\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{NL}=-\overrightarrow{CA}$，$\overrightarrow{LM}=-\overrightarrow{AB}$。

7　回答下列问题

（1）如果$\vec{a}$、$\vec{b}$共线，$\vec{b}$、$\vec{c}$也共线。矢量$\vec{a}$、$\vec{c}$是否也共线？

（2）如果$\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$三矢共面，$\vec{c}$、$\vec{d}$、$\vec{e}$三矢也共面，矢量$\vec{a}$、$\vec{c}$、$\vec{e}$是否也共面？

（3）如果矢量$\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$中$\vec{a}$、$\vec{b}$共线，矢量$\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$是否共面？

（4）如果矢量$\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{CD}$共线，在什么条件下，$\overrightarrow{AC}$、$\overrightarrow{BD}$也共线？

答　（1）若$\vec{b} \neq \vec{0}$，则$\vec{a}$与$\vec{c}$共线；若$\vec{b}=\vec{0}$，则不能断定；（2）$\vec{a}$、$\vec{c}$、$\vec{e}$不一定共面；（3）$\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$共面；（4）若A、B、C、D四点共线时；$\overrightarrow{AC}$、$\overrightarrow{BD}$共线，或当A、B、C、D四点不共线，但$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$时，$\overrightarrow{AC}$、$\overrightarrow{BD}$也共线。

§1.2　矢量加法、数乘矢量

1.矢量加法的法则

已知矢量$\vec{a}$与$\vec{b}$．在空间任取一点O，作$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，以$\overrightarrow{OA}$、$\overrightarrow{OB}$为邻边作平行四边形$OACB$，则$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\vec{a}+\vec{b}$，这就是矢量加法的平行四边形

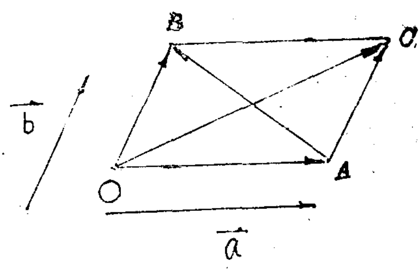

图　6

法则；$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}$，这是矢量的三角形法则；

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$，这是矢量的减法法则

2.矢量加法的运算律

交换律：$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$；

结合律：$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$。

3.数乘矢量

实数λ与矢量$\vec{a}$的乘积是一个矢量，记作$\lambda\vec{a}$，其模是$|\lambda\vec{a}|=|\lambda||\vec{a}|$；$\lambda\vec{a}$的方向，当$\lambda>0$时，与$\vec{a}$相同，当$\lambda<0$时，与$\vec{a}$相反。

显然，$\vec{a}=|\vec{a}|\vec{a}^0$；矢量$\vec{a}$与非零矢量$\vec{b}$共线的充要条件（以后充要条件以符号$\Longleftrightarrow$表示）是存在一个唯一的实数$\lambda$，使$\vec{a}=\lambda\vec{b}$。

4.数乘矢量的运算律

结合律：$\lambda(\mu\vec{a})=(\lambda\mu)\vec{a}$

分配律：$\lambda(\vec{a}+\vec{b})=\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}$，$(\lambda+\mu)\vec{a}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{a}$

8 要使下列各式成立，矢量$\vec{a}$ $\vec{b}$应满足什么条件？

(1) $|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}-\vec{b}|$； (2) $|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}|+|\vec{b}|$；

(3) $|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}|-|\vec{b}|$； (4) $|\vec{a}-\vec{b}|=|\vec{a}|+|\vec{b}|$；

(5) $|\vec{a}-\vec{b}|=|\vec{a}|-|\vec{b}|$； (6) $|\vec{a}+\vec{b}|>|\vec{a}-\vec{b}|$。

答 (1) $\vec{a}\perp\vec{b}$； (2) $\vec{a}$与$\vec{b}$同向； (3) $\vec{a}$、$\vec{b}$反向且$|\vec{a}|\geqslant|\vec{b}|$； (4) $\vec{a}$、$\vec{b}$反向； (5) $\vec{a}$、$\vec{b}$同向且$|\vec{a}|\geqslant|\vec{b}|$； (6) $0\leqslant(\widehat{\vec{a},\vec{b}})<\frac{\pi}{2}$。

9 证明 $-(\vec{a}+\vec{b})=-\vec{a}-\vec{b}$。

证 $-(\vec{a}+\vec{b})=-1(\vec{a}+\vec{b})=(-1)\vec{a}+(-1)\vec{b}$

$=-\vec{a}-\vec{b}$。

10 试解下列各题：

(1) 化简 $(x-y)(\vec{a}+\vec{b})-(x-y)(\vec{a}-\vec{b})$；

(2) 已知 $\vec{a}=\vec{e_1}+2\vec{e_2}-\vec{e_3}$，$\vec{b}=3\vec{e_1}-2\vec{e_2}+2\vec{e_3}$，求 $\vec{a}+\vec{b}$，$\vec{a}-\vec{b}$ 和 $3\vec{a}-2\vec{b}$；

(3) 从矢量方程组 $\begin{cases} 3\vec{x}+4\vec{y}=\vec{a}, \\ 2\vec{x}-3\vec{y}=\vec{b}. \end{cases}$ 解出矢量 $\vec{x}$，$\vec{y}$。

解 (1) $(x-y)(\vec{a}+\vec{b})-(x-y)(\vec{a}-\vec{b})=2(x-y)\vec{b}$。

(2) $\vec{a}+\vec{b}=4\vec{e_1}+\vec{e_3}$；$\vec{a}-\vec{b}=-2\vec{e_1}+4\vec{e_2}-3\vec{e_3}$；$3\vec{a}-2\vec{b}=-3\vec{e_1}+10\vec{e_2}-7\vec{e_3}$。(3) $\vec{x}=\frac{1}{17}(3\vec{a}+4\vec{b})$，$\vec{y}=\frac{1}{17}(2\vec{a}-3\vec{b})$。

11 绘图验证下面的等式

(1) $\dfrac{\vec{a}+\vec{b}}{2}+\dfrac{\vec{a}-\vec{b}}{2}=\vec{a}$；

(2) $\dfrac{\vec{a}+\vec{b}}{2}-\dfrac{\vec{a}-\vec{b}}{2}=\vec{b}$。

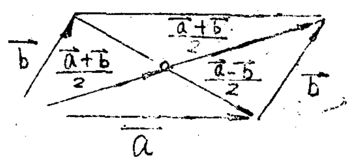

图 7

12 已知四边形 $ABCD$ 中，$\overrightarrow{AB}=\vec{a}-2\vec{c}$，$\overrightarrow{CD}=5\vec{a}+6\vec{b}-8\vec{c}$，对角线 AC、BD 的中点分别为 E、F，

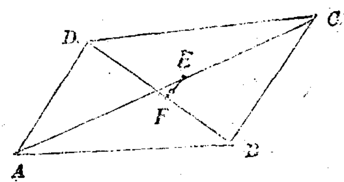

图 8

求 $\overrightarrow{EF}$。

解法(一) 如图(8)

$$\overrightarrow{EF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{DB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB})$$

$$=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB})=\frac{1}{2}(\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{AB})$$

$$=\frac{1}{2}(5\vec{a}+6\vec{b}-8\vec{c}+\vec{a}-2\vec{c})=3\vec{a}+3\vec{b}-5\vec{c}.$$

解法(二) 如图(9)取AD之中点G,联EG、GF,则有$\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{EG}+\overrightarrow{GF}$

$$=\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$$

$$=\frac{1}{2}[(5\vec{a}+6\vec{b}-8\vec{c})+(\vec{a}-2\vec{c})]$$

$$=3\vec{a}+3\vec{b}-5\vec{c}.$$

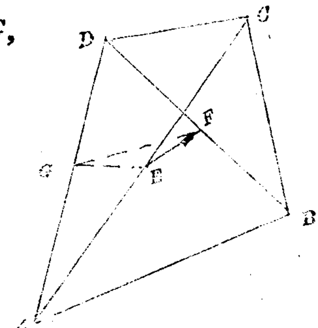

图 9

13 设$\overrightarrow{AB}=\vec{a}+5\vec{b}$,

$\overrightarrow{BC}=-2\vec{a}+8\vec{b}$,

$\overrightarrow{CD}=3(\vec{a}-\vec{b})$,证明 A、B、D三点共线.

证 $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=(\vec{a}+5\vec{b})+(-2\vec{a}+8\vec{b})+(3\vec{a}-3\vec{b})=2\vec{a}+10\vec{b}=2(\vec{a}+5\vec{b})=2\overrightarrow{AB}$,又$\overrightarrow{AD}$、$\overrightarrow{AB}$有公共始点$A$, ∴ A、B、D三点共线。

14 在四边形$ABCD$中,$\overrightarrow{AB}=\vec{a}+2\vec{b}$,$\overrightarrow{BC}=-4\vec{a}-\vec{b}$,$\overrightarrow{CD}=-5\vec{a}-3\vec{b}$。证明$ABCD$为梯形.

证 $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=(\vec{a}+2\vec{b})+(-4\vec{a}-\vec{b})+(-5\vec{a}-3\vec{b})=-8\vec{a}-2\vec{b}=2(-4\vec{a}-\vec{b})=2\overrightarrow{BC}$。

$\therefore$ $\overrightarrow{AD}//\overrightarrow{BC}$，但$\overrightarrow{AD}\neq\overrightarrow{BC}$，故$ABCD$是梯形。

15 证明三个两两不平行的矢量$\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$可以构成一个三角形（每个矢量的始点重合于另外两个矢量中的一个矢量的终点）的$\Longleftrightarrow$是$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$。

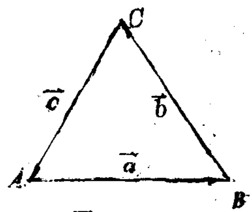

图 10

证 必要性：如图（10），如果矢量$\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$构成了一个三角形，由矢量和的定义知，$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$。

充分性：如图（10），作$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{BC}=\vec{b}$，$\overrightarrow{CD}=\vec{c}$，若$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$，则有$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$，说明$A$、$D$两点重合，所以$\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$三个矢量可以构成一个三角形。

16 证明三角形的三个中线矢量可以构成一个三角形。

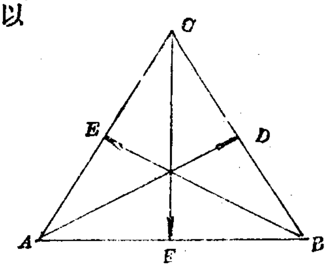

图 11

证 $\because$ $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF}$

$=(\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC})+(\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CA})$

$+(\overrightarrow{CA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB})$

$=\frac{3}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA})=\frac{3}{2}\cdot\vec{0}=\vec{0}$。

$\therefore$ 三条中线矢$\overrightarrow{AD}$、$\overrightarrow{BE}$、$\overrightarrow{CF}$可以构成一个三角形。

17 设L、M、N是$\triangle ABC$三边之中点，O是任意一点，求证：$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OL}+\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}$。

证 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$

$=\overrightarrow{OM}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{ON}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{OL}$

$+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{OL}$

$+\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA})$

$=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{OL}$.

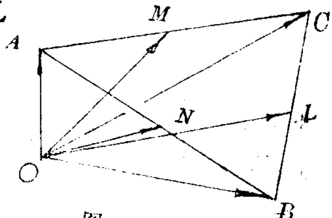

图 12

18 如图（13），从直角三角形的直角顶A作高线AD，沿AB的力其数值是$\frac{1}{|\overrightarrow{AB}|}$，沿$AC$的力其数值是$\frac{1}{|\overrightarrow{AC}|}$，则其合力将沿$AD$且其数值为$\frac{1}{|\overrightarrow{AD}|}$.

证 $|\overrightarrow{AP}|=|\overrightarrow{AB}|^{-1}$，$|\overrightarrow{AQ}|=|\overrightarrow{AC}|^{-1}$，$\overrightarrow{AP}$与$\overrightarrow{AQ}$的合力是$\overrightarrow{AR}$，则由勾股定理，得：

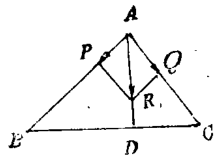

图 13

$$|\overrightarrow{AR}|=\sqrt{|\overrightarrow{AP}|^2+|\overrightarrow{AQ}|^2}$$

$$\sqrt{\frac{1}{|\overrightarrow{AB}|^2}+\frac{1}{|\overrightarrow{AC}|^2}}=\frac{|\overrightarrow{BC}|}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|}.$$

但 $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|=\frac{1}{2}|\overrightarrow{BC}||\overrightarrow{AD}|$，

$\therefore$ $|\overrightarrow{AR}|=\frac{1}{|\overrightarrow{AD}|}$. 又 $\operatorname{tg}(\angle RAP)=\frac{|\overrightarrow{AQ}|}{|\overrightarrow{AP}|}=\frac{|\overrightarrow{AB}|}{|\overrightarrow{AC}|}$

$=\operatorname{tg}(\angle ACB)=\operatorname{tg}(\angle BAD)$，故$\overrightarrow{AR}$与$\overrightarrow{AD}$重合，因此合力$\overrightarrow{AR}$将沿$AD$，且其值是$|\overrightarrow{AD}|^{-1}$

19 设M是平行四边形$ABCD$的中心，O是任意一点，证明 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=4\overrightarrow{OM}$。

证 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=(\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{MA})+(\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{MB})+(\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{MC})+(\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{MD})=4\overrightarrow{OM}+(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MD})=4\overrightarrow{OM}$.

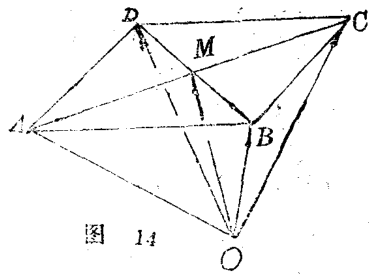

图 14

20 在平行六面体 $ABCDEFGH$ 中，证明 $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{AH}=2\overrightarrow{AG}$。

证 $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DH}=(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DH}+\overrightarrow{HG})+(\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{FG})=\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{AG}=2\overrightarrow{AG}$.

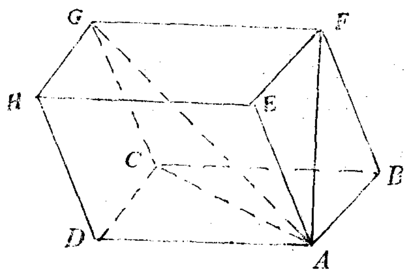

图 15

（注意：$\overrightarrow{HG}=\overrightarrow{DC}$，$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{FG}$）。

21 用矢量法证明，梯形两腰中点的连线平行于上、下底边，并且等于它们长度和的一半。

证 如图(16)，E、F为两腰之中点，

$$\overrightarrow{EF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}, \qquad ①$$

$$\overrightarrow{EF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}, \qquad ②$$