初等数学研究丛书

立体几何

四川人民出版社

初等数学研究丛书

立 体 几 何

四川省数学会普及工作委员会主编
竹　　篱　　编　　著

四 川 人 民 出 版 社
一九八四年・成都

初等数学研究丛书《立 体 几 何》

四川人民出版社出版　　　　（成都盐道街三号）
四川省新华书店发行　　　　国营五二三厂印刷

开本 787×1092 毫米　1/32 印张 8.25　字数 173 千
1984 年 12 月第一版　　　1984 年 12 月第一次印刷
印数：1—18,000 册

书号：7118·820　　　　定价：0.85 元

内 容 简 介

本书共三章，分别讲述空间两直线、直线与平面、平面与平面的位置关系，平行射影、多面角、轨迹、多面体和旋转体，简单的球面几何与球面三角等。内容安排是在六年制重点高中立体几何课本的基础上作了适当的扩充、加深与提高。编写中，努力做到讲解循序渐进，文字深入浅出，并注意逻辑推理的严谨性。使具有中学数学水平的读者，均可顺利阅读本书。书末附有习题解答或提示，以便自学。

本书可供中学数学教师教学参考，也可作为师范院校学生的课外阅读材料，中学生的提高读物，还可作为师范院校，进修院校开设中学数学课程的参考资料。

前　言

“精简、增加和渗透”是中学数学教学大纲中提出的一条原则。在这原则下，以传统数学为形，现代数学为实，实现中学数学内容的现代化，是当前我们面临的重要课题。四川省数学会普及工作委员会主编了一套“初等数学研究丛书”，邀请了四川师范学院数学系中学数学教研组同志从事编写工作，我觉得很有意义。这对中学数学教师和师范院校学习数学的学生，用现代数学的观点和方法来研究传统数学内容，可供参考。

编好这样的小册子，不是一件很容易的事。这套“初等数学研究丛书”自然还会有一些缺点，我相信在广大教师和学生的帮助下定会使它逐步完善的。

我希望有更多的数学普及小册子问世。

四川省数学会理事长　**柯　召**

一九八三年一月

目　次

第一章　直线与平面

1.1　立体几何的定义及其有关公理

我们将那些作为定义其他概念的基础而它们本身并不加以定义的概念称为原始概念亦称基本概念。

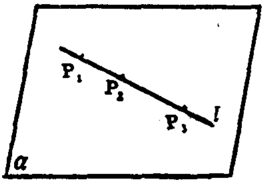
在我们这个课程里，所用到的基本概念分为两类：其中一类称为“点”、“直线”、“平面”，也叫做基本对象；而另一类则是指其基本对象彼此间存在一些关系称基本关系用文字来表示是“属于”、“在……之间”、“合同”。例如，点 A 属于直线 l，记作 $A\in l$；点 A 不属于平面 α，记作 $A\notin\alpha$……等等，特别地将直线 l 属于平面 α，记作 $l\subset\alpha$；直线 l 不属于平面 β，记作 $l\not\subset\beta$，又“属于”的同义语是“在……之上”。

定义 1.1　空间里具有某种基本关系的点、直线、平面或其部分的集合，叫做空间图形。

定义 1.2　研究空间图形的大小、形状，位置关系等几何性质的学科称为立体几何学。

在平面几何公理、定义及定理的基础上，经过人们长期的实践，总结出只有增添以下四条公理才能适应立体几何的逻辑推理并满足空间图形研究的需要。

公理 1　如果一条直线上的两点在一个平面上，那么这条直线上的所有点都在这个平面上（图 1.1）。



（图 1.1）

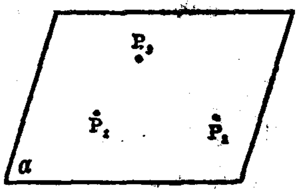
本公理的题设部分是：P_1和P_2是属于直线l上两已知点，P_3是属于直线l上任一点。又P_1和P_2亦是属于平面α上的两点。

本公理的结论部分是：P_3属于平面α，（这是不加证明地肯定了这一结论的正确性）。

定义 1.3 若直线a上的所有点皆在平面α上时，则称直线a在平面α上（即有$a\subset\alpha$），或换一句意义相同的话说，平面α通过直线a，记作$\alpha\supset a$。

公理 2 经过不在同一直线上的三点，有且只有一个平面(图1.2)。

〔推论 1〕经过一条直线和这条直线外的一点，有且只有一个平面（图 1.3 甲）。

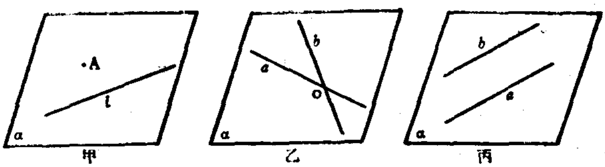


（图 1.2）

〔推论 2〕经过两条相交直线，有且只有一个平面（图 1.3 乙）。

定义 1.4 共面且不相交的空间两直线，称为平行线。

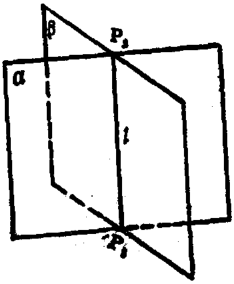
〔推论 3〕经过两条平行直线，有且只有一个平面（图 1.3 丙）。



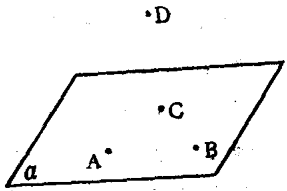
（图 1.3）

公理 3 若两平面有一个公共点，则它们必还有过此公

共点的一条公共直线，并且此两平面的一切公共点皆在这条公共直线上（图 1.4）。



（图 1.4）

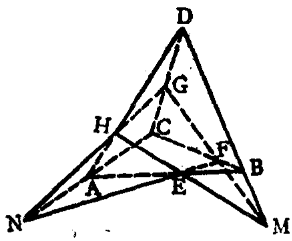


（图 1.5）

公理4 至少存在着四个点，不在一个平面上（图1.5）。

定义 1.5 不全在同一平面内的若干线段，首尾相接，并且最后一条的尾端与最初一条的首端重合，这样组成的图形叫做空间多边形，其不相邻两点所连之线段，称为空间多边形的对角线。

例 1 顶点分别在空间四边形各边上的平面四边形的对边如果相交，其交点必在空间四边形的对角线上(图 1.6)。



（图 1.6）

已知：A, B, C, D为空间四边形之四点，一平面四边形 $EFGH$ 的四个顶点 E, F, G, H 分别在 AB, BC, CD, DA 上，又HE 与 GF 相交于 M,记作 $HE\cap GF=M$, 又 $FE\cap GH=N$, 而CA 与 DB 为空间四边形 $ABCD$ 的 两对角线。

求证：$M\in DB$, $N\in CA$.

证明：$HE\cap GF=M\Longrightarrow$

$$\Longrightarrow\left\{\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}HE\in\text{平面 }ABD\\M\in HE\end{array}\right\}\Longrightarrow M\in\text{平面 }ABD\\\quad\text{平面 }ABD\cap\text{平面 }CBD=BD\\\left.\begin{array}{l}GF\in\text{平面 }CBD\\M\in GF\end{array}\right\}\Longrightarrow M\in\text{平面 }CBD\end{array}\right\}\Rightarrow M\in BD.$$

同理可证 $N\in CA$。

例 2　如图1.6，已知：A、B、C、D 为空间四边形之四点，一平面与其各边 AB，BC，CD，DA 分别交于 E，F，G，H，又 $HE\cap GF=M$，

求证：$\dfrac{AE}{EB}\cdot\dfrac{BF}{FC}\cdot\dfrac{CG}{GD}\cdot\dfrac{DH}{HA}=1$。

证明：从$\triangle ABD$和直线 HM 应用梅耐劳斯定理（平几定理），

有 $\dfrac{AE}{EB}\cdot\dfrac{BM}{MD}\cdot\dfrac{DH}{HA}=1$。　　(1)

又从$\triangle CBD$和直线 GM 再应用梅耐劳斯定理，

有 $\dfrac{DM}{MB}\cdot\dfrac{BF}{FC}\cdot\dfrac{CG}{GD}=1$。　　(2)

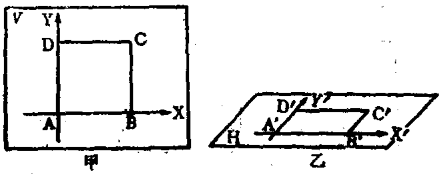
(1)与(2)两式相乘即有　$\dfrac{AE}{EB}\cdot\dfrac{BF}{FC}\cdot\dfrac{CG}{GD}\cdot\dfrac{DH}{HA}=1$。

1.2　平面图形的画法

虽然我们不能在平面上表达出空间图形的真实结构，但是我们可以根据空间图形在阳光照射（平行投影）下在地平面上的影迹来勾画出空间图形的直观形象，这种直观图尽管极大地歪曲了空间图形的本来面目。例如，在任意的投射方向下，线段的长短，角度的大小，面积的大小……等等业已

改变，可喜的是它仍保留了空间图形本身原有的某些性质（我们称为不变性质）。例如点仍然变成点，直线（只要它不与投射方向平行）仍变成直线，并且点和直线的从属关系仍保留了下来，还有直线的平行性以及平行线段的比（当它们不与投射方向平行又它们所在平面也不与投射方向平行时），亦保持不变，我们就是利用这些不变性质为依据来指导自己从事空间图形直观图的图法，同样地我们仍是以这些不变性质为准则来检验他人关于空间图形直观图的画法是否正确，至于为什么以上那些是不变性质，只有留待以后平行射影这一节再来详细研究。当然，为了突出直观图的立体感，直观图上虚实线的正确描绘亦是非常重要的而不可忽视，画虚实线的准则是，能见者画实线，有面遮挡者画虚线。

在立体几何中，通常我们用平行四边形来表平面。但有时也用三角形，平面多边形或其他平面图形来表示平面。当平面是水平面时，我们约定其平行四边形较长的一边一定要画成是水平线，较短的一边为较长的一边之半，并且此平行四边形的锐角画成45°（图1.7乙）。

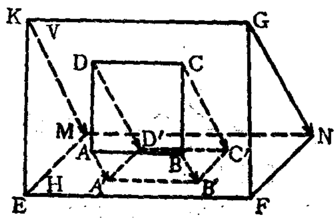


（图 1.7）

要画空间图形的直观图，首先要学会画空间里任一平面图形在某一平面（例如水平面 H）上的射影图，通常我们在该平面图形例如正方形 $ABCD$ 所在平面 V 上选定一水平直线为横轴 x 轴，建立直角坐标系 XAY（图 1.7甲）此时边 AB 在 x 轴上，求出正方形 $ABCD$ 各点之坐标。又在水平面 H 上（图 1.7 乙）以任一水平线为 x' 轴，设 A'

为属于 x' 轴上任一点，过 A' 按反时针方向作 $45°$ 角引出 y' 轴，从而建立以 $x'A'y'$ 的斜角坐标系，然后我们按以下原则来求出边长为 a 的正方形 $ABCD$ 各点 $A(0,0)$、$B(a,o)$、$C(a,a)$、$D(o,a)$ 在水平面 H 中的斜角坐标系 $X'A'Y'$ 下的对应各点 A'，B'，C'，D' 来，其原则是 $A(o,o)$、$B(a,o)$、$C(a,a)$、$D(o,a)$ 各点的横坐标取原长，但是，它们各点的纵坐标皆取其长度的一半而得到在斜角坐标系 $X'A'Y'$ 下 $A'(o,o)$，$B'(a,o)$，$C'\left(a,\ \frac{a}{2}\right)$，$D'\left(o,\ \frac{a}{2}\right)$ 各点的坐标，从而 A'，B'，C'，D' 各点也相应地被给定出来。

常常听到有人这样地说："我们相信此时的 A'，B'，C'，D' 的确能被给定出来，但是四边形 $A'B'C'D'$ 果真是正方形 $ABCD$ 的平行射影吗？如果是，那么此时平面 V 与平面 H 的相对位置应如何确定？再有太阳光的投射方向又怎样寻求呢？"



（图 1.8）

我们正是为了回答以上同志的提问而持地为他们画好了（图 1.8），这时正方形 $ABCD$ 所在平面 V 为矩形 $EFGK$，又边 GF 是垂直于 H 面而水平面 H 则是平行四边形 $EFNM$，且 $\angle EFN=135°$，又 $FN=\frac{1}{2}FG$，从而确定了平面 V 即为与水平面 H 成垂直的正面，此时阳光的投射方向即为 $\overrightarrow{GN}$。希提问的同志仔细看图与思考并用圆规直尺量一量，他们就会更加确信无疑了，值得提出的是以上我们的叙述是在现实

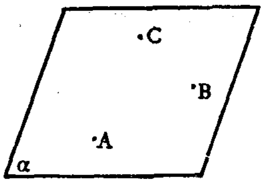
笛卡儿三维空间来说的，而我们的图 1.8 是反映此叙述的轴测投影直观图，所以垂直于水平面 H 的边 GF 是画成与水平线 EF 成直角的铅垂线，今后，我们凡是画水平面 H 的垂线仍沿引这一规定处理。

1.3 关于立体几何的作图题

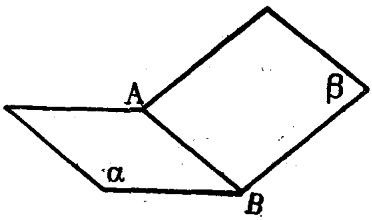
所谓在空间完成立体几何的作图题，就是指把它们归结为有限次的应用下面四种基本作图题，而且认为这些基本作图题是已经解决的，今后我们经常引用，而不作新的说明。

基本作图题 1　通过不共线的已知三点作一平面（图 1.9）。

基本作图题 2　求两已知相交平面的交线（图 1.10）。



（图 1.9）



（图 1.10）

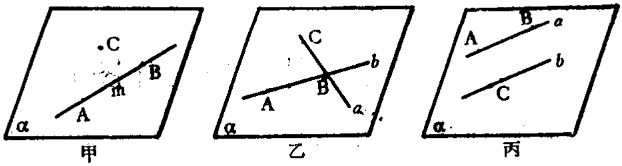
基本作图题 3　在已知平面内，用直尺和圆规作平面图形。

基本作图题 4　任意取一点在或不在已知直线上，在或不在已知平面上，任意取一直线过或不过已知点，在或不在已知平面内，任意取一平面过或不过已知点，过或不过已知直线。

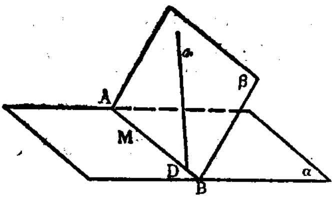
作图题 1.1　求作一平面，通过一条直线及线外一点；

或通过两条相交直线；或通过两条平行直线。

提示：（如图 1.11，甲，乙，丙）利用公理 2 及其三个推理。



（图 1.11）



（图 1.12）

作图题 1.2 求作已知平面 α 和不在这平面内的已知直线 a 的公共点（图 1.12）。

提示：在 α 上任取一点 M，若 $M\in a$，则作图业已解决，若 $M\notin a$，则由直线 a 和点 M 决定一平面 β，则有

$$\left.\begin{array}{l}M\in\alpha\\ M\in\beta\end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\alpha\cap\beta=AB,\\ M\in AB.\end{array}\right.$$

设 $AB\cap a=D$，则 D 合于所求。

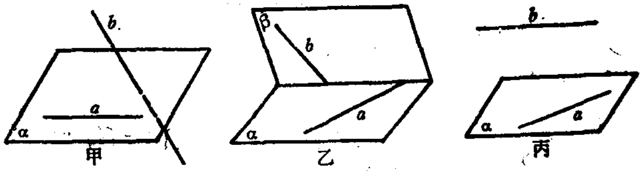
当 $a\parallel AB$ 时，本题无解。

1.4 空间两直线

1.4.1 空间两直线的位置关系

定义 1.6 设有两直线 a 和 b，若不存在任何平面能同时通过 a，b 两直线，则称此两直线 a 与 b 为异面直线.（或称为不共面两直线或称为交错两直线）如图 1.13 所示，

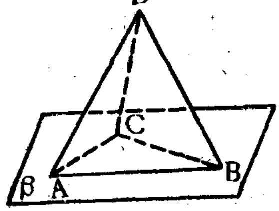
空间两直线的位置关系有：



（图1.13）

不共面（称不共面两直线），
共　面 无公共点（称平行），
有公共点 仅有一个公共点（称相交），
不止一个公共点（称重合）。

例　和两条异面直线 AB，CD 同时相交的两直线 AC,BD 一定是异面直线（图 1.14）。



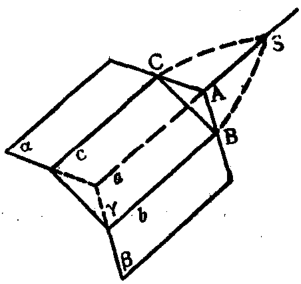
（图 1.14）

提示：用反证法，若 AC 与BD 共面 β，则因 A，B，C，D 都在 β 上，故 $AB\subset\beta$，又 $CD\subset\beta$，此与 AB 和 CD是两条异面直线相矛盾，故 AC 和 BD 只能是异面直线。

1.4.2 平行直线

定理 1.1　如果两个相交平面分别通过两条平行直线，那么它们的交线平行于这两条直线。

已知：$b\parallel c$，$b\subset\beta$，$c\subset\alpha$，又 $\alpha\cap\beta=a$（图 1.15）。



（图 1.15）

求证：$b\parallel a$，$c\parallel a$。

证明：因直线 $b\parallel c$，故由 b 与 c 确定一平面 r，又直线

c 与直线 a 共面 α，若 $c\neq a$，则有 $c\cap a=S$。

$$\text{故有}\left.\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}\left.\begin{cases}S\in c\\ c\subset r\end{cases}\right\}\Rightarrow S\in r\\ \qquad\beta\cap r=b\\ \left.\begin{cases}S\in a\\ a\subset\beta\end{cases}\right\}\Rightarrow S\in\beta\end{array}\right\}\Rightarrow S\in b\\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad S\in c\end{array}\right\}\Rightarrow c\cap b=S,$$

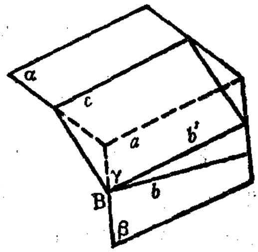
此与 $b\parallel c$ 相矛盾，故只能有 $c\parallel a$，同理可证 $b\parallel a$，

定理 1.2 两直线都平行于第三直线，则它们自已也互相平行。

已知：$c\parallel a$，$b\parallel a$（图1.16）。

求证：$c\parallel b$。

证明：(1) 若a，b,c三直线在同一平面上，则由平面几何定理，易知结论成立。



（图 1.16）

(2) 若 a，b，c 三直线不共面，则由 $c\parallel a$ 推出 c 与 a 确定一平面 α，又由 $b\parallel a$ 推出 b 与 a 确定一平面 β，设 B 为在直线 b 上任一点，推出 c 与 B 确定一平面 γ，设 $r\cap\beta=b'$，推出 $B\in b'$，则由定理 1.1 推出 $b'\parallel c$，且有 $b'\parallel a$ 又 $b\parallel a$，此与平行公理矛盾，故只能有直线 b 与直线 b' 重合，所以有 $c\parallel b$。

〔推论〕两条平行线间的平行线段相等。

例 1 已知：在空间四边形 $ABCD$ 中，E，G，F,H 分别为四边 AB，BC，CD，DA 的中点，又 P，S 分别为其两对角线 AC，BD 的中点（图 1.17）。

求证：EF，GH，PS 三线段相交于一点，且皆被此点所平分。