

# 信号检测的统计理论

99

U48

英 C. 赫 尔 斯 屈 朗 著 陈 宗 隲 等 译

# 信号检测的统计理论

〔英〕C. 赫尔斯屈朗 著

陈宗隲等 译



上海科学技术出版社

## 內 容 提 要

本书詳細論述从随机噪声中檢測雷达和通信信号的数学理論。全书共十一章。首先介紹信号、綫性滤波器和随机噪声的理論，其次叙述假設檢驗及其在檢測問題中的各种应用，討論了設計一个最佳檢測系統的方法，分析了这种系統的虛警概率和发现概率。最后讲述了参数估計理論及其在信号的参数估計，信号的分辨以及随机信号的檢測問題中的应用。书末附有两篇附录，对本书中用到的积分变换和概率論的基本概念作了扼要的叙述。本书可供无綫电通信和雷达专业的工程师以及对信号檢測感兴趣的数学工作者作为教学或参考用书。

STATISTICAL THEORY OF SIGNAL DETECTION

Carl. W. Helstrom

Pergamon Press • 1960

信号檢測的統計理論

陈宗鸞 陆志剛 鞠德航 魏鍾銓 金震淮 譯

---

上海科学技术出版社出版 (上海瑞金二路 450 号)

上海市书刊出版业营业許可證出 093 号

---

商务印书館上海厂印刷 新华书店上海发行所发行

开本 850×1156 1/32 印張 10 12/32 排版字数 274,000

1965 年 6 月第 1 版 1965 年 6 月第 1 次印刷

印数 1-1,500

統一书号 13119·607 定价(科六) 1.60 元

## 序 言

在雷达和通信技术中，信号检测常应用统计的假设检验理论，本书想为应用这一理论作初步介绍。我们试图将本书写成一种中间课程，希望它对数学家和工程师两者都有用。为了前者，我们打算提供统计判决理论在信号检测问题中的应用而不把雷达和通信实践中的许多技术细节去加重他们的负担。为了后者，我们介绍统计判决理论而略去数学方面的细致讨论，这种讨论往往会使内容不受欢迎。工程师也许不大注意理论的实际内容而渴望一两个线路图。数学家也许会反对对严谨的理论的损害，并且会指出某些地方被过于简化（特别是，经过慎重考虑已经去掉的随机性的概念）。虽然如此，我们的目的是想对每一方面都能提供有关这一课题的若干了解，使各人都能根据自己的目的来使用这本书。

本书的大部分内容应为数学、电工或物理等专业的一年级研究生所易于理解。根据需要，也引入了一些象积分方程、特征函数和 Gram-Charlier 级数等特殊内容。为了对基本理论有简要的了解，可阅读开头的四章，并略去以下章节：第 I 章的第 3, 4, 5, 6 节；第 II 章的第 5 节；第 IV 章的第 5 节。第一次阅读时可以跳过注有星号的各节。

每一章的末尾可以找到适当的参考文献。但这里并不企图提供完整的文献，因为已经有一些足够详尽的文献资料\*）。我们特别提出下列书刊可供参考：Middleton-Van Meter 的文章从数学上阐明判决理论在信号检测问题上的应用。关于噪声理论的详尽处理我们建议读者去参看最近（1958 年）出版的“随机信号与噪声理论导论”一书 [W. B. Davenport and W. L. Root, “An Introduction to the Theory of Random Signals and Noise”]。关于判决

理論的广泛而基础性的討論,可以参考“博弈与判决”一书 [R. D. Luce and H. Raiffa, “Games and Decisions”, 1957].

---

\*) 关于介紹文献的資料可参考:

1. Chessin, P. L., “A Bibliography on Noise”, Trans. I.R.E., **IT-1**, 15 (Sept. 1955).

2. Green, P. E. Jr., “A Bibliography of Soviet Literature on Noise, Correlation, and Information Theory”, Trans. I.R.E., **IT-2**, 91 (June 1956).

3. Middleton, D., Van Meter, D., “Detection and Extraction of Signals in Noise from the Point of View of Statistical Decision Theory”, J. Soc. Ind. Appl. Math., (I) **3**, 192 (1955); (II) **4**, 86 (1956).

4. Stumpers, F. H. L. M., “A Bibliography of Information Theory-communication Theory-Cybernetics”, Trans. I.R.E. **PGIT-2** November 1953; 1st suppl., **IT-1**, September 1955; 2nd suppl., **IT-3**, June 1957; 3rd suppl., June 1960.

5. P. Elias, A. Gill, R. Price, N. Abrason, P. Swerling, and L. Zadeh, “Progress in information theory in the U. S. A. 1957~1960” I.R.E. Trans. of Information Theory 1961, 7, No. 3, p. 128~153, Part III.

# 目 录

## 序 言

<b>第 I 章 信号与滤波器</b> .....	1
I.1 信号与频谱 .....	1
I.2 滤波器 .....	4
I.3 窄带信号 .....	10
I.4 窄带滤波器 .....	13
I.5 测不准关系 .....	16
I.6 滤波器的综合 .....	20
<b>第 II 章 噪声</b> .....	25
II.1 随机过程和它们的分布 .....	25
II.2 功率谱 .....	30
II.3 噪声的物理根源 .....	36
II.4 Gauss 分布 .....	43
II.5 窄带噪声 .....	46
<b>第 III 章 假设检验</b> .....	52
III.1 信号检测与统计学 .....	52
III.2 用一次测量的简单假设的检验 .....	54
III.3 用多次测量的简单假设的检验 .....	65
III.4 假设的序贯检验 .....	72
<b>第 IV 章 已知信号的检测</b> .....	77
IV.1 白 Gauss 噪声中的检测 .....	77
IV.2 匹配滤波器 .....	84
IV.3 有色噪声中的检测 .....	87
IV.4 积分方程的解 .....	99
IV.5 一个双择制通信系统 .....	110
<b>第 V 章 随机相位信号的检测</b> .....	117
V.1 复合假设的检验 .....	117

V.2	未知相位信号的检测	128
V.3	未知相位信号的可检测性	135
V.4	未知振幅和相位的信号的检测	141
V.5	未知振幅、相位和到达时间的信号	143
<b>第 VI 章</b>	<b>用多次观察的检测</b>	<b>149</b>
VI.1	检测系统	149
VI.2	多次观测的虚警概率和发现概率	153
VI.3	Gram-Charlier 级数	158
VI.4	多次观测的信号可检测性	161
<b>第 VII 章</b>	<b>估计理论</b>	<b>167</b>
VII.1	信号参数的估计	167
VII.2	Bayes 估计	168
VII.3	充分估计与有效估计	174
VII.4	最大似然估计	176
<b>第 VIII 章</b>	<b>信号参数的估计</b>	<b>182</b>
VIII.1	信号到达时间的估计	182
VIII.2	估计出的到达时间的方差	188
VIII.3	从多次观察估计到达时间	192
VIII.4	信号到达时间与载频的估计	199
VIII.5	估得的到达时间和载频的方差	206
<b>第 IX 章</b>	<b>未知到达时间的信号的检测</b>	<b>212</b>
IX.1	最大似然检测	212
IX.2	未知到达时间的信号的检测	221
IX.3	最大似然系统的虚警概率和发现概率	224
IX.4	未知到达时间和载频的信号的检测	236
<b>第 X 章</b>	<b>信号分辨</b>	<b>239</b>
X.1	分辨问题	239
X.2	分辨参数	247
X.3	到达时间不确定的信号的分辨	254
X.4	杂波中信号的检测	258
<b>第 XI 章</b>	<b>随机信号</b>	<b>266</b>
XI.1	随机信号的检测	266
XI.2	随机信号的最佳检测器	274

XI.3	随机信号检测的虚警概率和发现概率	282
XI.4	总结	296
附录 A	积分变换	301
附录 B	概率论	309
索引		319



# 信号与滤波器

## 1. 信号与频谱

雷达是用来发现远处目标如飞机和舰艇的一种设备，这种发现是依靠发出去一束束电磁能并检测出从目标反射回来的回波而实现的。一个典型的雷达系统首先有一个发射机，它产生几个厘米波长的电磁能，并且周期性地将这种能量以振幅很大、宽度很小的脉冲通过一个产生窄波束的天线发送出去。其次，有一个与天线相联的接收机，调谐好能检取并放大从近处或远处目标反射回来的一部分电磁波能量。从远处一个飞机上反射回来的回波能量是很小的；它与目标至天线间的距离的四次方成反比。如果回波不被来自接收机周围和接收机本身的干扰或随机性“噪声”所混淆，则回波能量很小这件事不会成为检测最远距离目标的一种障碍，因为回波可由接收机放大到所需要的倍数。由于要求检测尽可能远的目标，要设计出能从噪声中侦察出最微弱回波的接收系统，研究回波信号和特性是有用的。这个最佳检测问题就成为本书的主要研究课题。关于实际雷达系统结构的详细情况，读者可以参阅这方面许多著作中的任何一本，本章末的文献中列出了一部分这方面的著作。

在通信系统中也会发生从噪声中检测微弱信号的问题，因为这种系统必须用有限的功率将消息传送到很远的距离。如果信息是象通常一样用电脉冲的形式发送出去，则在接收机处的情况和雷达系统中的十分相似，而我们将要研究的方法对于获得一种尽可能可靠的通信也是有用的。类似的检测问题发生在物理学的其他分支中，在那里，有必要在不可避免的背景噪声中去测量非常

小的电压和电流。

在这一章里，我們將复习一下描述信号和描述进行信号变换的滤波器的各种方法。下一章将討論干扰，引入适宜于这方面的統計方法。然后将从統計假設檢驗的类推中来定义一个檢测系統所要达到的目的，从此再探討达到这些目的的方法。

我們可以把信号看成是在接收机內某一点上变化着的电流或电压，并用一个時間函数  $s(t)$  来描述，目前我們將假定  $s(t)$  是精确已知的。我們將主要研究脉冲形式的信号，这种信号在某起始时刻  $t_0$  以前是零：

$$s(t) = 0, \quad t < t_0,$$

而当時間趋于无穷时，它趋于零：

$$s(t) \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty.$$

我們假設这些脉冲信号是平方可积的，即量

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} [s(t)]^2 dt \quad (1.1)$$

是有限的。例如，如果  $s(t)$  是  $R$  欧姆电阻器两端的电压，則电阻器內的电流  $s(t)/R$ ，是時間的一个函数，而消耗在电阻上的能量是

$$\int_{-\infty}^{\infty} [s(t)]^2 dt / R = E / R.$$

于是上述平方可积的假設就意味着信号所消耗的能量是有限的。

一个信号脉冲也可以用它的 Fourier 变换或頻譜  $S(\omega)$  来描述， $S(\omega)$  是这样定义的<sup>1)</sup>：

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-i\omega t} dt. \quad (1.2)$$

对于平方可积的信号，譜函数总是存在，而且它本身也是平方可积的；实际上，我們有下列有用的公式[見附录 A，方程(A.9)]：

<sup>1)</sup> 在本书里，我們把变量  $\omega$  称为頻率。它的单位是弧度/秒，它是一个以赫芝为单位的、通常称为“頻率”的量的  $2\pi$  倍。我們这样做可以使得  $2\pi$  这个因子在印刷排字方便的地方出现在公式中，而同时仍保留通常熟悉的頻率的概念。变量  $\omega$  有时也称为角頻率(pulsatance)。这里只需要 Fourier 变换理論中一些最基本的知識；在附录 A 中提供了这些内容，其中还列出了这方面的参考文献。

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |S(\omega)|^2 d\omega / 2\pi. \quad (1.3)$$

我們可以用 Fourier 反变换从譜  $S(\omega)$  恢复信号形状

$$s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) e^{i\omega t} d\omega / 2\pi. \quad (1.4)$$

这个公式是将信号表示为許多个頻率為  $\omega$ , 复振幅為  $S(\omega)$  的正弦振蕩  $e^{i\omega t}$  的迭加. 因为  $s(t)$  总是实数, 所以譜函数就受条件  $S(-\omega) = S^*(\omega)$  的限制, 其中星号(\*)表示复共轭. Fourier 积分是熟知的 Fourier 級数的推广, 而 Fourier 級数是将一个周期函数表示为可数无穷多个正弦和余弦函数的和, 这些正弦和余弦函数的頻率是  $2\pi/T$  的整倍数,  $T$  是这个函数的周期. 我們可以把 (1.4) 式中的积分理解为当  $T$  变为很大时发生的, 因为这时正弦函数分量的数目变为不可計数的无穷多个了.

常用的信号形式是持續時間為  $T$  的矩形脉冲:

$$\begin{aligned} s(t) &= A, & 0 < t < T, \\ s(t) &= 0, & t < 0, t > T. \end{aligned} \quad (1.5)$$

在一个电路里, 将一个与电池串联的开关按上  $T$  時間就能得到这种脉冲信号. 这个信号的頻譜是

$$S(\omega) = A(1 - e^{-i\omega T}) / i\omega. \quad (1.6)$$

对这一情形将 (1.4) 的反变换算出是有益的; 附录 A 中扼要地介紹了这种分析.

信号的頻譜如果只在  $\omega = 0$  附近的頻率範圍內显著地不等于零, 則这类信号常称为視頻信号; 它們与某些高频振蕩占优势的信号有显著的差别. 这个术语起源于雷达和电视技术, 在那里, 視頻信号加在阴极射綫示波器的偏轉板上, 从而得出可見的图象. 这样一种視頻信号的頻譜範圍可以用它的帶寬来測量. 帶寬有几种定义. 如果頻譜在  $-\infty < \omega < \infty$  範圍內具有单个峰值, 則根据对称性, 这个峰值一定在  $\omega = 0$  处. 于是帶寬有时就定义为“半功率”点之間的時間隔; 即帶寬是  $2\omega_1$ , 而  $|S(\omega_1)|^2 = \frac{1}{2} |S(0)|^2$ . 另一个定义是: 帶寬等于頻譜的均方根偏差  $\Delta\omega$ :

$$\Delta\omega = \sqrt{\bar{\omega}^2}, \quad \bar{\omega}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 |S(\omega)|^2 d\omega / \int_{-\infty}^{\infty} |S(\omega)|^2 d\omega.$$

有一类信号，它的频谱集中在两个窄而对称的尖峰内，一个尖峰在频率  $\omega = \Omega$  附近，另一个在频率  $\omega = -\Omega$  附近，当两个尖峰的宽度与  $\Omega$  相比是很小时，我们称这一类信号为**窄带信号**。这种信号在本书中很重要，我们将在本章以后几节讨论。

## 2. 滤波器

在我们将要研究的系统中，信号是由所谓**滤波器**的器件来进行变换的。一般地说，滤波器是一个电网络，它具有一对输入端和一对输出端。它可能包含有电阻、电感、电容、电子管、继电器或其他元件。当我们把一个随时间变化的电压或“输入信号”， $s_i(t)$ ，施加在输入端时，我们就在输出端测出称为“输出信号”的电压  $s_o(t)$ 。滤波器可以由所有可能成对的输入和输出信号的集合来定义；用记号表示为  $\langle s_i(t) \rightarrow s_o(t) \rangle$ 。在这一节里，我们将简略地叙述滤波器的一些性质。

对于所有实际的滤波器，有这样一个限制，即在输入开始以前，它们是不能对输入响应的；亦即，如果在  $t < t_0$  时  $s_i(t) = 0$ ，则在  $t < t_0$  时  $s_o(t) = 0$ 。另一个限制是滤波器的输出在所有时刻总是有限的。不包含能源的滤波器称为**无源的**；否则就称为**有源的**。一个电子管放大器就是一个有源滤波器；一个变压器则是一个无源滤波器。元件不随时间变化的滤波器有这样的性质：如果  $\langle s_i(t) \rightarrow s_o(t) \rangle$  是一对输入和输出，则对于任一实数  $a$ ， $\langle s_i(t+a) \rightarrow s_o(t+a) \rangle$  也同样是输入和输出。这称为**时间不变的或平稳的滤波器**。

**线性滤波器**是一类重要的滤波器。一个线性滤波器的输出总是输入的线性变换，这就是说，如果  $\langle s_i^{(1)}(t) \rightarrow s_o^{(1)}(t) \rangle$  和  $\langle s_i^{(2)}(t) \rightarrow s_o^{(2)}(t) \rangle$  是两对输入和输出，则对所有的  $A$  和  $B$  的值，

$$\langle As_i^{(1)}(t) + Bs_i^{(2)}(t) \rightarrow As_o^{(1)}(t) + Bs_o^{(2)}(t) \rangle$$

也是一对可能的输入和输出。对于任意个数的输入和输出的线性

組合, 这个关系同样是成立的。

一个线性平稳滤波器可以看成把输入  $s_i(t)$  按如下方式进行变换:

$$s_o(t) = \int_0^{\infty} K(\tau) s_i(t-\tau) d\tau. \quad (2.1)$$

函数  $K(\tau)$  称为滤波器的脉冲响应。如果输入是一个很尖锐的脉冲, 它可以用一个发生在时刻  $t=0$  的 Dirac  $\delta$ -函数来表示:  $s_i(t) = \delta(t)$ , 则滤波器的输出是  $s_o(t) = K(t)$ 。任一输入信号可按下列公式表为  $\delta$ -函数脉冲的线性组合:

$$s_i(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s_i(t') \delta(t-t') dt'.$$

根据线性滤波器的定义, 输出信号应该是延迟了的脉冲响应  $K(t-t')$  的同一线性组合:

$$\begin{aligned} s_o(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} s_i(t') K(t-t') dt' \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} K(\tau) s_i(t-\tau) d\tau. \end{aligned}$$

由于滤波器不可能在输入以前就响应, 所以对于  $\tau < 0$ ,  $K(\tau) = 0$ ; 我们就得到(2.1)。对于一个包含有耗损能量的元件如电阻器等的无源滤波器, 脉冲响应最后应趋于零, 所以当  $\tau \rightarrow \infty$  时,  $K(\tau) \rightarrow 0$ 。一个典型的滤波器可能具有象图 I.1 所示的脉冲响应。

线性滤波器的作用可以看成是对输入从过去的  $\tau$  秒起始并乘以权函数  $K(\tau)$  在过去一段时间上的积分, 如图 I.2 所示。在那

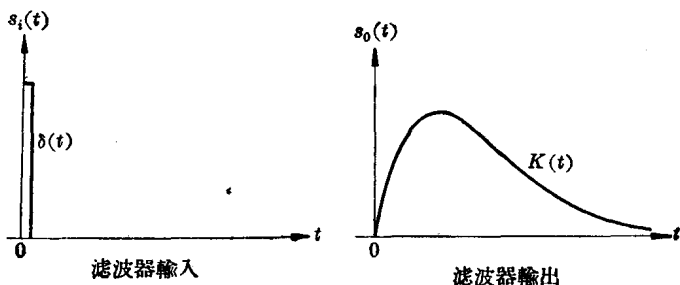


图 I.1 滤波器的脉冲响应

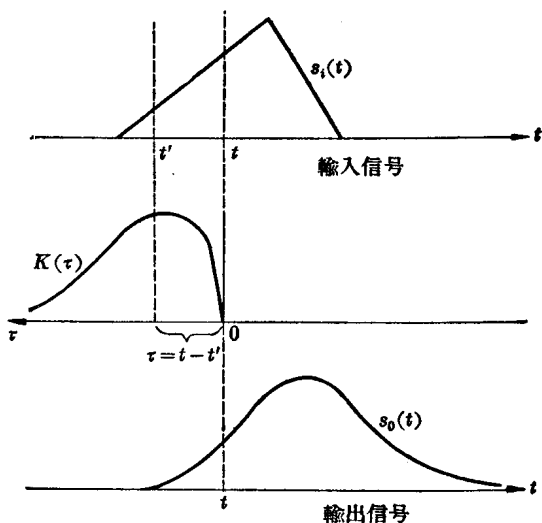


图 1.2 线性滤波器的作用

个图上,  $t$  时刻的输出值是由  $s_i(t')$  和  $K(t-t')$  的对应纵坐标值相乘并且积分而得出:

$$s_o(t) = \int_{-\infty}^t K(t-t') s_i(t') dt' \quad (2.2)$$

这一公式与 (2.1) 式等效. 当时间继续下去时, 权函数  $K(\tau)$  向右移动, 继续作用在输入信号  $s_i(t)$  的新的部分. 在本节的余下部分, 我们主要将处理线性平稳滤波器. 这方面更详细的讨论, 读者可参阅 Gardner 和 Barnes (1942) 以及 Guillemin (1953) (1957) 诸人的著作<sup>1)</sup>.

脉冲响应的 Fourier 变换称为滤波器的转移函数, 并用  $Y(\omega)$  表示之:

$$Y(\omega) = \int_0^{\infty} K(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau, \quad (2.3)$$

$$K(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} Y(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega / 2\pi.$$

(对于有些滤波器, 可以把输入看成是电压而输出看成是电流, 在

<sup>1)</sup> 每章末可以找到的参考文献都注明了出版日期, 并且按出版日期次序排列.

这种情况  $Y(\omega)$  就称为**导纳**；如果输入是电流而输出是电压，则它是**阻抗**。在目前讨论中，这些差别并不重要。）如果输入是频率为  $\omega$  的时间的复函数  $e^{i\omega t}$ ，则滤波器的输出是  $Y(\omega)e^{i\omega t}$ ，这可将输入代入(2.1)并应用(2.3)而得到证明。Fourier 积分

$$s_i(t) = \int_{-\infty}^{\infty} S_i(\omega) e^{i\omega t} d\omega / 2\pi$$

表示任何一个输入信号是许多个这种复正弦函数的迭加，这些复正弦函数的振幅由频谱  $S_i(\omega)$  给出。由线性滤波器的定义，输出信号的频谱  $S_o(\omega)$  应该由下式给出：

$$S_o(\omega) = Y(\omega) S_i(\omega). \quad (2.4)$$

应用 Fourier 变换的卷积定理[附录 A, 方程(A.8)], 从(2.1)可以立刻得到这个结果。我们注意到，由于脉冲响应  $K(\tau)$  是  $\tau$  的实函数，因而转移函数  $Y(\omega)$  应满足条件

$$Y(-\omega) = Y^*(\omega).$$

对于  $\tau < 0$ ，取积分围线在复平面的下半平面内(参看附录 A)，就能算出积分：

$$K(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} Y(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega / 2\pi.$$

所以，在  $\tau < 0$  时  $K(\tau) = 0$  这个事实意味着转移函数  $Y(\omega)$  在那个区域没有奇点。利用这样一个规则：一个积分的绝对值小于或等于被积函数绝对值的积分，我们可以更精确地来描述复函数  $Y(z)$  在  $\text{Im} z < 0$ <sup>1)</sup> 时的性质。于是得到

$$\begin{aligned} |Y(z)| &= |Y(\omega + iy)| = \left| \int_0^{\infty} K(\tau) e^{-i\tau(\omega + iy)} d\tau \right| \\ &\leq \int_0^{\infty} |K(\tau)| e^{y\tau} d\tau < \underset{\tau}{\text{Max}} |K(\tau)| \int_0^{\infty} e^{y\tau} d\tau \\ &= \frac{1}{|y|} \underset{\tau}{\text{Max}} |K(\tau)|, \quad y = \text{Im} z < 0, \end{aligned}$$

条件是  $|K(\tau)|$  在区域  $0 < \tau < \infty$  内为有限，而这正是实际滤波器的情況。这个结果也表明在区域  $\text{Im} z < 0$  内不能包含函数  $Y(z)$  的

1) “Re  $z$ ” = 复数  $z$  的实部， $\text{Im} z = z$  的虚部。

奇点。

最常见的线性滤波器是由电阻、电感和电容，或称为“集总”电路元件的网络所组成。在电路理论的书籍中证明了这样一种滤波器的转移函数  $Y(\omega)$  总是  $\omega$  的一个有理函数；即，它是一个分式，分子分母都是  $\omega$  的有限次的多项式。由于各元件与接线之间不可避免地有电容，所以一个实际的滤波器不可能无衰减地让很高的频率通过，这种衰减随着频率的提高而增大：对于实数的  $\omega$ ，当  $\omega \rightarrow \pm\infty$  时， $|Y(\omega)| \rightarrow 0$ 。所以一个由集总参数元件组成的滤波器，它的  $Y(\omega)$  的分母上的多项式的次数至少要比分子的次数大一次。

作为一个例子，考虑图 I.3 的简单滤波器。如图所示，如果输入和输出信号是从两端测量到的电压，则根据初等电路理论，我们有

$$Y(\omega) = \frac{-i/\omega C}{R - i/\omega C} = \frac{1}{1 + i\omega RC}. \quad (2.5)$$

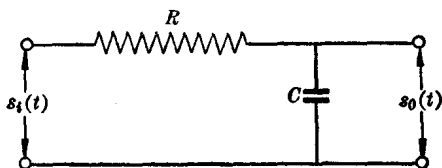


图 I.3 RC 滤波器

容易证明，这样一个滤波器的脉冲响应是一个衰减的指数函数：

$$K(\tau) = \mu e^{-\mu\tau}, \quad \mu = 1/RC, \quad \tau > 0, \quad (2.6)$$

它具有“时间常数”  $(1/\mu) = RC$ 。如果输入是 (1.5) 那样的矩形脉冲，则输出是

$$\begin{aligned} s_o(t) &= A(1 - e^{-\mu t}), & 0 < t < T, \\ s_o(t) &= A(e^{\mu T} - 1)e^{-\mu t}, & t > T, \end{aligned} \quad (2.7)$$

此处  $T$  是输入脉冲的持续时间。这个输出信号表示在图 I.4 中。根据 (1.6)，(2.4) 和 (2.5)，这个输出信号的频谱是

$$S_o(\omega) = A \frac{1 - e^{-i\omega T}}{i\omega(1 + i\omega RC)}, \quad (2.8)$$



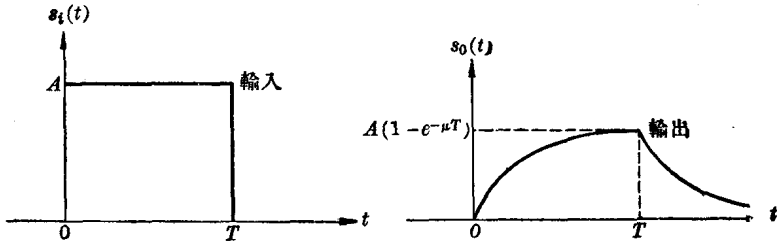


图 1.4 RC 电路的矩形脉冲输入

而取这个表达式的 Fourier 变换就可得到  $s_0(t)$ ; 但在基本公式 (2.1) 或 (2.2) 中, 利用 (2.6) 的脉冲响应, 却要更容易些。

对于比图 1.3 更复杂一些的网络, 确定脉冲响应的步骤是相似的。首先, 用标准的方法找出转移函数  $Y(\omega)$ : 当输入端有一交流电压  $e^{i\omega t}$  时, 求出输出端的电压; 这两个电压之比就是  $Y(\omega)$ 。然后用 Fourier 变换得到脉冲响应, 如 (2.3) 所示。由于一个集总参数网络的  $Y(\omega)$  是  $\omega$  的有理函数, 确定出  $Y(\omega)$  的分母的根  $\omega_j$ ; 就可得到这个反变换; 这些根称为滤波器转移函数的“极点”。如果没有重根, 就可以用部分分式的方法把  $Y(\omega)$  写成如下形式:

$$Y(\omega) = \sum_j A_j / (\omega - \omega_j). \quad (2.9)$$

于是脉冲响应为

$$K(\tau) = i \sum_j A_j e^{i\omega_j \tau}, \quad \tau > 0. \quad (2.10)$$

(当出现重根时, 就会得到稍为复杂一些的形式。) 这个分析有时利用变量为  $p = i\omega$  的 Laplace 变换来进行。所包含的数学内容是相同的; 只是从一个不同的方向来考察平面  $z = \omega + iy$ 。

非线性滤波器曾由 Zadeh (1953) 及其他一些人作过分类并讨论过。最简单的是这样一种滤波器, 它的输出  $s_0(t)$  是输入的某种单调函数:  $s_0(t) = F[s_i(t)]$ , 这里  $y = F(x)$  是非减的或非增的。非线性滤波器的可能种类是没有限制的, 还没有一种单一的方法可以用来分析所有这种滤波器。