21世纪高等教育系列规划教材

21SHIJI GAODENG JIAOYU XILIEGUIHUA JIAOCAI

高等数学

ADVANCED MATHEMATICS

主　编　辛小龙

副主编　曹吉利　马保国　陈斯养　薛利敏

郝华宁　阎恩让　李红文

上册

西北大学出版社

NORTHWEST UNIVERSITY PRESS

高等数学

ADVANCED MATHEMATICS

21 世纪高等教育系列规划教材

高 等 数 学

上 册

主　审　刘新平　熊必璠
主　编　辛小龙
副主编　曹吉利　马保国　陈斯养　薛利敏
　　　　郝华宁　阎恩让　李红文

西北大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学　上册/辛小龙主编. —西安:西北大学出版社,
2005.8

ISBN 7—5604—1965—8

Ⅰ.高...　Ⅱ.辛...　Ⅲ.高等数学—高等学校—教
材　Ⅳ.O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2004)第087260号

高等数学　上册

主　　编　辛小龙

出版发行　西北大学出版社
地　　址　西安市太白路229号
邮政编码　710069
购书电话　(029)88303313　88302590
经　　销　陕西省新华书店
印　　刷　陕西向阳印务有限公司印刷

开　　本　787毫米×960毫米　1/16开本
印　　张　19.25
字　　数　340千字
版　　次　2005年8月第2版　2005年8月第1次印刷
书　　号　ISBN 7—5604—1965—8/O·121
定　　价　23.00元

前　言

数学是研究客观世界数量关系与空间形式的科学.随着现代科学技术和数学科学的发展,"数量关系"和"空间形式"具备了更加丰富的内涵和更加广泛的外延.现代数学内容更加丰富,方法更加综合,应用更加广泛.数学不仅是一种工具,而且是一种思维模式;不仅是一种知识,而且是一种素养;不仅是一种科学,而且是一种文化,能否运用数学观念定量思维是衡量民族科学文化素质的一个重要标志.数学教育在培养高素质科学技术人才中具有其独特的、不可替代的重要作用.

高等学校理工综合类专业本科生的高等数学是必修的重要基础理论课.通过该课程的学习,应使学生获得一元函数微积分及其应用、多元函数微积分及其应用、无穷级数与常微分方程等方面的基本概念、基本理论、基本方法和运算技能,为今后学习各类后续课程和进一步扩大数学知识面奠定必要的数学基础.在传授知识的同时,要努力培养学生进行抽象思维和逻辑推理的思维能力、综合运用所学知识分析问题解决问题的能力和较强的自主学习能力,逐步培养创新精神和创新能力.此外,随着我国改革开放和经济社会的发展,我国高等教育事业也有了长足发展,特别是大学扩招,变原来的"精英教育"为大众教育,引起了生源的变化.所有这些都对大学数学教学改革和教材建设提出了新的要求.

多年来,我国也出现了许多优秀的大学高等数学教材.然而,现有的大多数教材比较适合工科院校的学生.面对扩招以后大学生源质量的变化,特别是对综合类、师范类院校的学生,这些教材都有明显的局限性,不适合这些院校的学生学习.因而编写一本以理工综合类院校学生为主要对象的高等数学教材是非常必要的,所以我们编写了本教材,力争本教材能够适合目前高等教育的现状,适合新世纪人才培养的要求,成为反映数学教学改革新思路、新方法,具有自己的特色的大学数学教材.

本教材是按照高等院校理工综合类本科专业学习本课程都应达到的基本要求编写的,其中带 * 号的条目是为某些相关专业选用的,也是对选用专业学生的基本要求.各院校根据自身情况,在达到基本要求的基础上,还可以提出一些较高的或特殊的要求.

参加本教材编写的学校有西北大学、陕西师范大学、延安大学、西安石油大学、陕西理工学院、宝鸡文理学院、咸阳师范学院、渭南师范学院、解放军第二炮

兵工程学院，共 9 所院校，总负责是西北大学辛小龙教授.

对于本教材的编写，我们进行了充分的准备工作，由西北大学数学系和西北大学出版社组织以上参编单位的专家教授召开了数次教材编写研讨会，讨论了教材编写大纲、教材主要内容和教材编写特色，使得教材的编写工作有分工、有合作，有条不紊地进行.本教材的主编是西北大学的辛小龙教授，副主编是陕西理工学院的曹吉利教授、延安大学的马保国教授、陕西师范大学的陈斯养副教授、渭南师范学院的薛利敏副教授、西安石油大学的郝华宁教授、宝鸡文理学院的阎恩让教授和第二炮兵工程学院的李红文副教授，编写成员与分工如下：西安石油大学的郝华宁教授（第 1 章）、咸阳师范学院的张永锋（第 2 章）、渭南师范学院的薛利敏（第 3，4 章）、延安大学的马保国教授（第 5 章）、陕西师范大学的陈斯养（第 6 章）、陕西理工学院的曹吉利教授（第 7，8 章）、第二炮兵工程学院的李红文（第 9 章）、西北大学的辛小龙教授（第 10 章）、西北大学的薛西峰（第 11 章）、宝鸡文理学院的阎恩让（第 12 章）.另外，西北大学的荔炜编写了上、下册的附录.由辛小龙教授完成统稿、改写及校对工作；陕西师范大学的刘新平教授和西北大学的熊必璠教授对全书进行了审定.

本教材作为陕西省 21 世纪高等教育规划教材正式出版，是教育改革的产物.在此，我们感谢西北大学教务处、西北大学数学系和陕西师范大学、延安大学、西安石油大学、陕西理工学院、宝鸡文理学院、咸阳师范学院、渭南师范学院、解放军第二炮兵工程学院等院校的领导对本教材的出版所给予的鼎力支持，感谢刘新平教授和熊必璠教授详细审阅了本教材并提出了许多宝贵意见，感谢邢志栋教授、陈思养教授参加了教材编写研讨会并提出了许多有益的建议.我们特别感谢西北大学出版社和李宝宁编辑，由于他们的指导和帮助才使本书顺利与读者见面.

新世纪大学数学的教学改革是一项紧迫而艰巨的工作.我们虽然已经尽力想把本教材编写好，但由于水平有限，缺点和错误乃至问题一定在所难免，诚请读者批评指正.

编　者

2005 年 8 月

本书所用数学符号及其含义

N	自然数集合
N^{+} 或 N_{+}	正整数集合
Z	整数集合
Q	有理数集合
R	实数集合
C	复数集合
ϕ	空集
$\forall x$	对一切 x
$\exists x$	存在 x
$\in$	属于
$\bar{\in}$ 或 $\notin$	不属于
$\subset$	含于
$\supset$	包含
$\cap$	交集
$\cup$	并集
$\backslash$	差集
$\lvert a \rvert$	a 的绝对值
$n!$	n 的阶乘，即 $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot n$
$(2n)!!$	$2n$ 的双阶乘，即 $2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \cdots \cdot (2n)$
$(2n-1)!!$	$(2n-1)$ 的双阶乘，即 $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (2n-1)$
$\binom{\alpha}{n}$	即 $\dfrac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}$（$\alpha$ 为实数）
$\binom{n}{k}$ 或 C_n^k	二项系数（从 n 个元素中每次取出 k 个元素所有不同组合的总数）即 $\dfrac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot k}$

$\sum$	总和
$\prod$	连乘
%	百分比
∞	无穷大
[ ]	方括号,表示其中数的整数部分
{ }	花括号,表示其中数的分数部分
° ′ ″	度,分,秒(例 21°23′18″)
$\overset{\frown}{AB}$	弧
π	圆周率
$\because$	因为
$\therefore$	所以
$\lg x$	以 10 为底的对数(称为常用对数)
$\ln x$	以 e 为底的对数(称为自然对数)
e	自然对数的底
e^x 或 $\exp x$	指数函数(以 e 为底)
$\Gamma(\zeta)$	伽马函数($\Gamma-$ 函数)
$\beta(p,q)$	贝塔函数($\beta-$ 函数)
$\nearrow(\searrow)$	单调上升(单调下降)
$\rightarrow$	收敛于,趋于
sup	上确界
inf	下确界
max	最大
min	最小
$\triangle x$	x 的有限增量

目 录

第一章　函数、极限与连续

高等数学与初等数学有什么不同?答案是两者的研究对象不同.初等数学研究的对象基本上是常量,即不变的量,而高等数学则是专门研究变量的数学.物质世界中各种变量之间的相互依赖关系,就是所谓的函数关系.在高等数学中,函数是最重要的基本概念之一,本章我们将以中学的有关知识为基础,讨论函数及其有关问题.

第一节　函数

一、集合

1. 集合与元素

集合(简称集):称具有某种特定性质的对象的整体为集合.一般用大写字母 $A,B,C,\cdots$ 表示集合.

元素:组成集合的对象叫做集合的元素.一般用小写字母 $a,b,c,\cdots$ 表示集合的元素.通常用 $x \in A$ 表示元素 x 是集合 A 的元素,读作"x 属于 A". $x \notin A$ 表示 x 不是集合 A 的元素,读作"x 不属于 A".

集合的常见表示方法有以下三种.

列举法:列出集合中所有的元素,并用花括号括起来.如由元素 $a_1,a_2,\cdots a_n$ 组成的集合 A,可记作:$A=\{a_1,a_2,\cdots a_n\}$.

描述法:把集合中元素所具有的共同属性描述出来,用 $A=\{x \mid x$ 具有性质 $P\}$ 表示集合 A 中满足性质 P 的元素 x 的全体.如 $R^{+}=\{x \mid x>0\}$ 表示全体正数构成的集合.

图示法:用文氏图来表示集合的方法称为图示法.

我们把含有有限个元素的集合称为有限集,把含有无限个元素的集合称为无限集,把不含有任何元素的集合称为空集,记为 ϕ.

2. 集合间的关系和运算

集合的包含是指集合 A 中的元素必为集合 B 的元素,我们称集合 A 是 B 的子集,或 A 被 B 包含,记作 $A \subset B$.

若集合 A 是集合 B 的子集，且集合 B 亦是集合 A 的子集，即 $A \subset B$ 同时 $B \subset A$，则称集合 A 与 B 相等，记作 $A = B$.

设 A,B 是两个集合，则称集合 $\{x \mid x \in A$ 或 $x \in B\}$ 为集合 A 与 B 的并，记为 $A \cup B$；称集合 $\{x \mid x \in A$ 并且 $x \in B\}$ 为集合 A 与 B 的交，记为 $A \cap B$；称集合 $\{x \mid x \in A$ 并且 $x \notin B\}$ 为集合 A 与 B 的差（或余集），记为 $A - B$.

集合的并和交的概念可推广到有限个或无限个集合上，如：

$\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n = \{x \mid x \in A_k, k$ 为某个自然数$\}$，

$\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n = \{x \mid x \in A_k, k$ 为任意自然数$\}$.

3. 常量与变量

在某一变化过程中保持不变的量我们称之为常量，通常记作 $a,b,c,\cdots$.

而在某一变化过程中始终变化的量，或可取不同的值的量我们称之为变量，通常记作 $x,y,\cdots$.

我们将具有方向、原点、长度单位的直线叫数轴. 数轴上的点与实数可以建立一一对应关系.

4. 数集

以某些数为元素的集合我们称之为数集. 通常我们用 N 表示正整数集，用 Z 表示整数集，用 Q 表示有理数集，用 R 表示实数集. 它们之间的关系为：$N \subset Z \subset Q \subset R$.

区间是较常见的一类实数集. 设 a,b 都是实数，且 $a < b$.

闭区间是指集合 $A = \{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}$，记作 $[a,b]$. 如图 1-1.

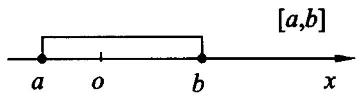

图 1-1

开区间是指集合 $A = \{x \mid a < x < b\}$，记作 (a,b). 如图 1-2.

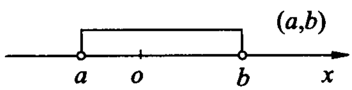

图 1-2

半开区间是指集合 $A = \{x \mid a \leqslant x < b$（或 $a < x \leqslant b$）$\}$，记作 $[a,b)$（或 $(a,b]$）. 如图 1-3.

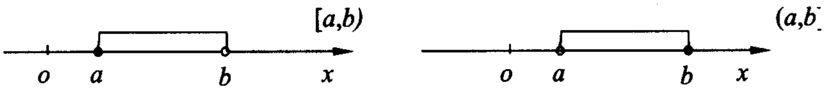

图 1-3

无限区间是指集合 $A=\{x\mid -\infty<x<+\infty\}$，通常记作 $(-\infty,+\infty)$，同理可定义无限区间 $(-\infty,b)$，$(-\infty,b]$，$(a,+\infty)$，$[a,+\infty)$ 等. 图 1-4 是无限区间 $(-\infty,b]$ 和 $(a,+\infty)$ 的图示.

图 1-4

点 a 的 δ 邻域是指以点 a 为中心，长度为 2δ 的开区间，记作

$$N(a,\delta)=U(a,\delta)=\{x\mid |x-a|<\delta\}=(a-\delta,a+\delta).$$

点 a 的 δ 空心邻域是指不包含中心点 a 的邻域，记作

$$\mathring{N}(a,\delta)=\mathring{U}(a,\delta)=\{x\mid 0<|x-a|<\delta\}$$

二、函数

定义 1 设 x,y 是两个变量，且变量 x 在某个数集 D 中取值. 如果当变量 x 在 D 中任意取定一个值时，变量 y 总按照一定的法则，有确定的取值和它对应，则称 y 为 x 的函数. 记作 $y=f(x)$.

我们称 x 为自变量，y 为因变量，x 的变化范围为函数 $y=f(x)$ 的定义域，通常记为 $X,D,\cdots$；y 的变化范围称为函数 $y=f(x)$ 的值域，记为 $Y,K,\cdots$.

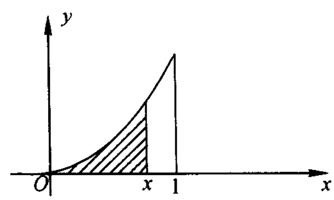

图 1-5

如考虑函数 $y=x^2,x\in[0,1]$，则由曲线 $y=x^2$ 和 x 轴所围成图形的面积 S，就会随 x 的取值不同而取不同的值，见图 1-5. 所以，面积 S 是 x 的函数，即 $S=S(x)$.

1. 关于函数定义的几点说明

函数定义的全部实质在于定义域和函数关系（确定的法则）. 判断两个函数是否相同的关键，就是看它们的定义域和函数关系是否一样.

(1) 定义域：即自变量的取值范围，它可由实际问题来决定，如圆的面积 S 是半径 r 的函数，即 $S=f(r)=\pi r^2$，其定义域为 $r>0$；亦可由数学表达式的数学意义来确定，如 $y=f(x)=\sqrt{1-x}$，则其定义域为 $x\leqslant 1$.