



生命科学交叉研究丛书

张建树 管 忠 于学文 编著

混沌生物学 (第二版)

Chaos in Biology

 科学出版社
www.sciencep.com

🔗 生命科学交叉研究丛书

混沌生物学

(第二版)

张建树 管 忠 于学文 编著

科学出版社

北 京

内 容 简 介

混沌是继相对论、量子力学之后 20 世纪科学的第三次革命。本书从生态学中最简单的虫口模型谈起,深入浅出地介绍了在生命科学中通向混沌的倍周期分岔、阵发混沌和准周期道路,以及混沌的基本特征、判别和解析分析方法,特别介绍了在生态学、生物化学、分子生物学、流行病学及生物学相关领域的研究成果及应用,并对混沌控制的机制和方法及在生物学中的意义进行了描述。

本书涵盖面广,内容翔实,深入浅出,可作为对此研究方向感兴趣人员的高级科普读物,也可供从事生物、医学、物理、化学及相关专业的师生和研究人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

混沌生物学/张建树,菅忠,于学文编著.—2 版.—北京:科学出版社,2006

(生命科学交叉研究丛书)

ISBN 7-03-016109-2

I. 混… II. ①张…②菅…③于… III. 混沌学:生物学 IV. Q-05

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 090742 号

丛书策划:马学海 庞在堂/责任编辑:庞在堂 彭克里 席慧
责任校对:钟 洋/责任印制:钱玉芬/封面设计:王 浩

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

新蕾印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

1998 年 10 月第 一 版 陕西科学技术出版社

2006 年 1 月第 二 版 开本:R5(720×1000)

2006 年 1 月第一次印刷 印张:14

印数:1—2 500 字数:267 000

定价:39.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换〈环伟〉)

从 书 序

20 世纪初叶,生命科学研究领域涌入了一批物理学家、化学家和数学家等非生物学者,兴起了第一次数理化与生命科学交叉研究的潮流。这次学科交叉的结果使得生命科学出现了质的飞跃,从对生物个体的形态描述和分类等传统生物学研究进入到以物理和化学手段研究生物分子为核心的实验生物科学阶段。

在这个现代生命科学的形成期中,许多重要的生物学观点、理论和研究方法都是源于非生物学的研究者。例如,美国理论化学家鲍林利用量子力学方法,揭示了氢键和离子键等“弱键”的本质,提出了弱键在蛋白质空间结构中起着重要的作用,并由此发现了蛋白质的基本结构单元—— α 螺旋和 β 折叠结构。此外,鲍林还通过研究镰刀形贫血首次提出了“分子病”的概念,这一概念随后成为生物医学领域的基石。最值得一提的是奥地利物理学家薛定谔,这位量子力学理论的重要人物在 20 世纪 40 年代写下了《生命是什么》一书,从物理学的角度对生命现象进行了阐述,提出了“遗传密码”这一分子生物学的基本概念。随后,英国物理学家克里克和美国生物学家沃森一起揭示了遗传物质的基本物理结构——DNA 双螺旋,并提出了分子生物学的核心理论——遗传信息流动的“中心法则”。《生命是什么》一书不仅吸引了众多的物理学和化学研究者进入生命科学领域,而且使生物学家意识到生命与非生命没有本质上的不同,它们都遵循着统一的物理和化学规律,可以通过物理或化学的方法进行研究,从而为分子生物学奠定了理论基础。

在 21 世纪之交,随着人类基因组计划的实施和各门学科的发展,生命科学领域又一次迎来了生命科学与数理化、计算机科学、信息科学等多学科交叉的潮流。当前,在生命科学的研究领域,正涌现出许多新兴的交叉学科,如生物信息学、计算生物学、化学生物学和系统生物学等。这些新兴的交叉学科为深入和完整地认识复杂生物系统和生命现象提供了更为有力的研究工具,开辟了更为广阔的研究领域。

在这风起云涌之际,科学出版社联合了国内一批有志于推进生命科学交叉研究的学者和专家,计划在近几年内系统地推出一系列有关生命科学交叉研究方面的论著,有介绍新兴交叉学科的高级科普读物、有探索新方法和新技术的专著、有在多学科交叉领域自成一家之言的文章。该丛书的内容和体裁不拘一格,但求有助于传播和促进国内生命科学领域的多学科交叉研究。

吴家睿

中国科学院上海生命科学研究院

2005 年 11 月 21 日



第二版前言

混沌是继相对论、量子力学之后 20 世纪科学的第三次革命。它打破了各门学科间的壁垒，把思考者从相距甚远的领域带到了一起。现代知识由于混沌的发现而呈现全新的格局，混沌正在改变着整个科学的结构。

尽管混沌的发现应归功于美国气象学家洛伦茨，但是混沌理论的兴起还应追溯到生物领域率先提出的简单数学模型。混沌理论研究取得一定进展后，生物学成为除物理学之外的最早应用领域，获得了令人瞩目的成就。进入 21 世纪后，生物非线性动力学研究成为生命科学与数理科学交叉结合的重要生长点和研究热点，及时了解这一前沿领域的最新进展成为迫切需要。1998 年由陕西科学技术出版社出版了《混沌生物学》，初版问世已经 7 年，相关领域又有了很大发展。我们对原书进行全面修订，重新编撰了本书。本书进一步全面系统地阐述了国内外与生物科学相关的混沌研究的最新理论及其发展趋势。并且，对生物学中许多令人迷惑不解的现象给出了深刻而全新的解释，使我们对过去认识不到的问题有了新的认识，概念上有所突破。尤其是混沌理论已向生物医学某些公认的传统理论提出挑战，为疾病的预防和治疗提出了新机制和新方法。

本书从生态学中最简单的虫口模型谈起，深入浅出地介绍了在生命科学中常见的通向混沌的倍周期分岔、阵发混沌和准周期道路；混沌的基本特征、判别和解析分析方法，特别介绍了在生态学、生物化学、分子生物学、流行病学、神经学、心脏学等与生物学相关的诸多领域的国内外研究成果及其新进展，侧重在生物医学方面的应用。全书共分 9 章，内容仍为三大部分：第一部分为非线性和混沌的基本理论；第二部分为混沌在生物及相关领域的交叉研究和应用；第三部分为混沌控制及其在生命科学中的应用。由于非线性科学用到的数学知识相对较难，为了分散难点，循序渐进，易于理解，在章节上并未将各大部分严格划分，而是有所穿插，使其更具有可读性。

本书涵盖面广，图文并茂，资料丰富，内容翔实，可供从事生物、医学、物理、化学及其他有关专业的师生和研究工作者参考。特别是本书能使理工科科研人员了解生命科学与非线性科学交叉的研究现状，有利于启发他们选择新的学科生长点；能使生命科学领域的研究人员了解生物非线性动力学的基本概念和方法，有利于提高他们发现和认识生物非线性现象的观察和思维水平；有利于相关专业的大学生、研究生开拓和启迪思维，提高他们对前沿交叉学科的认识。

本书的修订出版在生命学科交叉研究丛书编辑委员会的指导和科学出版社的



大力支持下得以付诸实现，谨在此致以衷心感谢！

我们还借此机会对西安交通大学湛垦华教授、西安交通大学第一医院金辉教授、陕西社会科学院李万忍研究员的热情帮助表示衷心的感谢。

由于水平所限，本书的疏漏或错误之处在所难免，敬请读者批评指正，不吝赐教。

张建树

2005年8月于西安

第一版前言

混沌打破了各门学科的壁垒，把思考者从相距甚远的领域带到了一起。现代知识由于混沌的发现而呈现全新的格局。混沌正在改变着整个科学建筑的结构。

混沌是非线性动力学系统特有的一种运动形式，而生物体正是这样的高度非线性系统，所以生物系统多方面呈现混沌性态就是很自然的了。

尽管混沌的发现应归功于美国气象学家洛伦茨，但是混沌理论的兴起还应追溯到生物领域率先提出的简单数字模型。混沌理论研究取得一定进展后，生物学成为除物理学之外的最早应用领域，获得了令人瞩目的成就。近年来，生物学中一些令人迷惑不解的现象从混沌理论中找到了答案，尤其是混沌已向公认的某些医学原理挑战，为一些疾病的防治提出了新的机理和方法。

本书从生态学中最简单的虫口模型谈起，深入浅出地介绍了混沌的产生、基本特征以及在生态学、生物化学、分子生物学、流行病学、脑科学、心脏学等与生物学相关的诸多领域国内外研究成果及新进展，侧重点在生物医学方面的应用，可供从事生物、医学、物理、化学及其他有关专业师生或研究工作者参考。

本书选题策划和撰写过程中得到了西安交通大学系统科学与社会发展研究所所长湛垦华教授的悉心指导，陕西省社会科学院李万忍研究员对书稿进行了十分仔细地审阅，在此对他们表示由衷地感谢。在本书编撰过程中还得到了西北大学生物系孙连魁教授的热情帮助。西安医科大学第一临床医学院金辉教授提供和查找资料，并对相关部分进行了审阅。谨在此一并表示诚挚的谢意。

由于时间仓促和水平所限，虽经再三推敲，疏漏甚或错误之处恐亦难免，诚恳希望读者指正。

张建树

1998年7月

《生命科学交叉研究丛书》

编委会

编委会主任

吴家睿

编委会副主任 (按姓氏笔画排列)

丁建东 马学海 李逸平 胡 钧 贺 林

编委会委员 (按姓氏笔画排列)

丁建东 复旦大学高分子科学系

马大为 中国科学院上海有机化学研究所

马红儒 上海交通大学物理系、Bio-X 生命科学研究中心

马学海 科学出版社

王 炜 南京大学物理系

古宏晨 上海交通大学纳米中心

刘曾荣 上海大学非线性研究中心

江晓原 上海交通大学科学技术史与科学哲学系

李逸平 上海市科学技术委员会, 中国科学院上海生命科学研究院

吴家睿 中国科学院上海生命科学研究院

何建华 上海原子核所应用物理研究所

陈宜张 第二军医大学

胡 钧 上海交通大学 Bio-X 生命科学研究中心

赵国屏 中国科学院国家基因研究中心, 中国科学院上海生命科学研究院

赵建龙 中国科学院上海微系统与信息研究所

贺 林 上海交通大学 Bio-X 生命科学研究中心

徐宇虹 上海交通大学药学院、Bio-X 生命科学研究中心

徐学敏 上海交大学生命科学技术学院、Bio-X 生命科学研究中心

韩 斌 中国科学院植物生理生态研究所, 中国科学院国家基因研究中心

傅继梁 第二军医大学, 同济大学医学与生命科学部

臧敬五 第二医科大学, 中国科学院上海生命科学研究院, 上海交通大学医学院健康科学中心研究所

目 录

丛书序

第二版前言

第一版前言

1 从虫口看混沌	1
1.1 混沌——20 世纪科学的第三次革命	1
1.2 对初始条件的敏感依赖性	4
1.3 虫口模型的启示	6
1.4 虫口模型的进一步讨论	13
2 混沌的特征	19
2.1 李雅普诺夫指数	19
2.2 分岔	26
2.3 阵发混沌	33
2.4 奇异吸引子	37
2.5 分维	45
3 生态学中的混沌	55
3.1 种群消长中的混沌	55
3.2 时滞种群模型中的混沌	57
3.3 捕食者-猎物模型中的混沌	59
4 流行病学中的混沌	66
4.1 流行病学与混沌	66
4.2 某些传染病感染率的简单模型	68
4.3 流行病的 SEIR 模型	71
4.4 谱分析与相空间重构法	75
4.5 某些流行病的混沌特性	80
4.6 严重急性呼吸综合征 (SARS)	86
4.7 免疫中的混沌	88
5 神经系统中的混沌	94
5.1 神经元及其生理基础	94
5.2 神经元动力学系统	96
5.3 脑电混沌态	104

5.4	可兴奋细胞的混沌	111
5.5	生物神经网络的混沌	118
6	心脏节律的混沌	124
6.1	心电图各波的形成及其意义	124
6.2	心室纤维性颤动	127
6.3	毕勒-路特模型	130
6.4	从准周期到混沌	132
6.5	位相转移函数法研究心脏搏动	141
6.6	心律变异的新视角	149
6.7	$[Ca^{2+}]_i$ 浓度变化诱发心脏起搏细胞的混沌	155
7	生物化学中的混沌	158
7.1	受迫布鲁塞尔振子的振荡与混沌	158
7.2	糖酵解中的混沌	164
7.3	过氧化酶反应中的混沌	167
8	DNA 和蛋白质分子的混沌态	171
8.1	DNA 分子的双螺旋结构	171
8.2	混沌的解析分析方法	175
8.3	激光诱导 DNA 分子混沌态的唯象模型	180
8.4	DNA 分子在调制激光作用下的混沌行为	183
8.5	激光诱导 DNA 分子混沌态的量子模型简介	186
8.6	蛋白质的混沌态	188
9	混沌控制及其应用	193
9.1	混沌控制方法简介	193
9.2	心脏混沌控制	196
9.3	脑电信号混沌控制	198
9.4	混沌及其控制的生物学意义	199
	主要参考文献	202
	附录	205
I	非线性微分方程的解及其稳定性	205
II	线性稳定性分析	207
III	奇点分类	209

从虫口看混沌

1.1 混沌——20 世纪科学的第三次革命

20 世纪以其灿烂的科学发现和技术进步而载入史册，人类已经迈进了科学技术更加蓬勃发展的 21 世纪。回顾这历史上光辉的百年，却有学者甚至宣称，20 世纪的科学只有 3 个理论将被人们永远铭记，这就是相对论、量子论和混沌论，把混沌誉为 20 世纪科学的第三次革命，正如一位物理学家所说：“相对论排除了绝对空间和时间的 I. 牛顿（Newton）幻觉；量子论排除了对可控测量过程的牛顿迷梦；混沌论则排除了 P. 拉普拉斯（Laplace）的可预见性的狂想。”在这三大革命中，混沌革命不仅适用于大到宇宙天体和小到微观粒子，而且适用于我们看得见、摸得到的世界，适用于和人自己同一尺度的对象，因而是一次范围更为广泛的革命。混沌，带着古老传说的神秘和当代科学前沿的探索，正不胫而走，引起了越来越多的关注。某些思想（那些我们现在称为混沌的思想）确实改变了人们认识事物的方式。

混沌研究的进展，正在消除对统一的自然界的决定论和概率论两大对立描述体系间的鸿沟，使复杂系统的理论建立在“有限性”这更符合客观实际的基础之上。不言而喻，生物系统也正是这样的复杂系统。只要我们对世界的观测和描述是有限的，那么预测的不确定性就是原则上不可消除的。这是系统的复杂性对处理信息所加的原则性限制。

混沌是非线性动力系统所特有的一种运动形式，其理论基础可追溯到 19 世纪末创立的定性理论，但真正得到发展是在 20 世纪 70 年代以后，尤其是 80 年代以后，混沌的研究渐成燎原之势。

早在 19 世纪末, 数学家 J. 阿达玛 (Hadamard) 在一个称为负曲率流形上的测地学流的 (哈密顿) 动力系统中, 发现了现在称为混沌的“普遍敏感性”。同一时期, 法国数学家 J.H. 庞加莱 (Poincare) 也认识到由阿达玛所发现的这一现象的重要性, 同时认识到牛顿力学具有内在随机行为, 而且不少数学家用证明和实例补充了庞加莱的论点。他研究过一般三体运动问题, 并且清楚, 在一些条件下其解可成为难以处理的耦合形式。20 世纪初的 1903 年, 庞加莱从动力系统和拓扑学的全局思想出发, 指出可能存在的混沌特性, 从而成为世界上最先了解存在混沌可能性的人。

早期的混沌发现并没有对科学产生持久的影响。这一新的思想被遗忘, 并不得不在很久以后再被独立发现。阿达玛和庞加莱的工作, 由于 A.N. 柯尔莫哥洛夫 (Kolmogorov)、E. 洛伦茨 (Lorenz)、S. 斯梅尔 (Smale)、R. 梅 (May)、M.J. 费根鲍姆 (Feigenbaum) 等许多人的贡献, 才取得直到今天未曾间断的进步。

1954 年, 前苏联概率论大师柯尔莫哥洛夫在探索概率论起源过程中注意到了哈密顿 (Hamilton) 函数中微小变化时条件周期运动的保持, 该思想为如下结论奠定了基础: 不仅耗散系统有混沌, 而且保守系统也有混沌。1960 年前后, 柯尔莫哥洛夫与 V.I. 阿诺尔德 (Arnold) 及 J. 莫泽 (Moser) 深入研究了哈密顿系统中的运动稳定性, 得出了著名的 KAM 定理 (以三人名字的首字母命名)。该定理为揭示哈密顿系统中 KAM 环面的破坏以及混沌运动奠定了基础。1963 年, 美国气象学家洛伦茨在《大气科学》杂志上发表了《决定性的非周期流》一文, 指出在气候不能精确重演与长期天气预报者无能为力之间必然存在着一种联系, 这就是非周期性 with 不可预见性之间的联系。他还认为一串事件可能有一个临界点, 在这一点上, 小的变化可以放大为大的变化。这些研究清楚地描述了“对初始条件的敏感依赖性”这一混沌的基本性质。这就是所谓著名的“蝴蝶效应”, 它来自洛伦茨一次科学演讲, “一只蝴蝶在巴西扇动翅膀, 可能会在得克萨斯引起一场龙卷风”。然而, 混沌却意味着这种临界点比比皆是, 它们无孔不入, 无时不在。在天气这样的系统中, 对初始条件的敏感性乃是各种大小尺度的运动互相纠缠所不能逃避的后果。

1975 年中国学者李天岩和美国数学家 J. 约克 (Yorke) 发表了《周期 3 蕴含混沌》的著名论文, 被认为是混沌的第一次正式表述。“chaos”一词也自此正式使用。后来, 李天岩和约克的工作在许多方面得到了推广, 如有人指出“周期 $\neq 2$ 蕴含混沌”。混沌学的兴盛, 应追溯到生物学。生物、生态学领域中的问题是复杂的, 若用线性方法来解决, 只能靠增加变量来应付复杂性。科学家们试图采用新的方法——简单的非线性数学模型来克服困难。那些卓有贡献的代表人物应属澳大利亚出生的美国天才科学家 R. 梅 (May)。梅在物理、数学方面功底深

厚，且青春年华时已小有名气，他本可以在上述领域轻取一席之地，但当时萌发于生物学领域内的混沌学所独有的洞察力使之着迷而叹服，他毅然放弃了自己的专长，在生物学中另辟蹊径。由于他的天赋，加上他多学科的坚实根底，改行后短短的数年后，他又成为生物、生态、医学领域中混沌理论的重要代表。1976年梅在《自然》杂志上发表了《具有极复杂动力学的简单数学模型》一文，它向人们表明了混沌理论的惊人信息：简单的确定论数学模型竟然也可以产生貌似随机的行为。

1977年，第一次国际混沌会议在意大利召开，标志着混沌科学的诞生。1978年，美国物理学家费根鲍姆在《统计物理学杂志》上发表了关于普适性的论文《一类非线性变换的定量的普适性》，轰动了世界。正是普适性的研究使混沌科学确定起自己坚固的地位。

20世纪80年代，混沌科学又得到进一步发展。1980年，波兰出生的美国数学家B.B. 芒德布罗（Mandelbrot）用计算机绘制了第一张以他名字命名的芒德布罗集的图像，这是一张五彩缤纷、绚丽无比的混沌图像。此后，又有一些科学家也投入到分形流域的边界研究中，做出了精美绝伦的混沌图像，使混沌图像成为精致的艺术品，拓展了混沌科学的一个重要应用领域。芒德布罗于1982年出版了《大自然的分形几何》，被誉为分形几何的宣言书，使分形迈入科学之林，也为混沌的描述提供了工具。因而分形几何又有“混沌几何学”的美名。

1983年加拿大物理学家L. 葛拉斯（Glass）发表了著名论文《计算奇异吸引子的奇异程度》，掀起了计算时间序列的热潮。1986年中国科学家徐京华在世界上第一个提出了3种神经细胞的复合网络，并证明它存在混沌。

到了20世纪90年代，混沌科学与其他科学互相渗透。混沌打破了各门学科的界限。由于它是关于系统整体性质的科学，它把思考者们从相距甚远的各个领域带到了一起。科学曾经一度陷入专业化越来越细的危机。由于混沌，专业化的过程戏剧性地倒过来了。在各门学科专门知识不断增加的同时，各门学科又都强烈朝着综合方向前进，科学的世界观也发生了变化。20世纪90年代，国家将高校开设的专业进行大刀阔斧的调整，拓宽专业面，就足以说明这一点。

混沌研究得以迅速发展，实应归功于计算机技术的日新月异。近20多年来，大容量高速度计算机，特别是计算机绘图技术的应用，是混沌赖以发展的重要基础。借助逼真的电脑模拟和电视技术，人们已能通过屏幕观察到一个系统动态的演进与复杂的混沌效应。惊喜之余，人们开始将许多以往捉摸不定的现象，试图用混沌效应予以解释，所涉及的领域从生物、生态、医学、物理、化学、天文到经济等，甚至将触角伸进了艺术与思想的范畴。而混沌应用方面发展最快的领域还属生物医学领域。尤其是对混沌控制和应用的研究，使20世纪90年代到21

世纪的混沌研究进入了一个新的历史时期。

混沌从 19 世纪末发现，后被遗忘，又重新发现，深入研究，整整经过了一个世纪。如何评估混沌当今在生物和数学、物理、天文等主要领域的状况。著名混沌学家 D. 吕埃勒 (Ruelle) 给我们做了回答，他说“如果要用历史的观点来评估混沌，我想对这门学科细分很重要。在物理学和数学中，在我看来巨大的兴奋期或许已经结束。混沌导致了数学领域的一些重要结果。对物理学也可以做出类似的评价。……有关物理学和数学中的新思想的出现，有可能导致混沌的再度复兴，但我认为最令人兴奋的时期已经过去。目前就天文学而言，我们今天听说这一领域正处于令人激动的时期。至于生物学，令人激动的时期就要来临。为什么？出现一个将动力系统概念应用到生物学的激动人心的时期是显然的，因为在生物学中有那么多的准周期或振荡现象。很显然，从动力系统的观点来仔细研究是十分有益的，并能产生一些重要结果。只是因为从方法论的观点来看，这一问题是十分困难的，要获得重要结果我们必须要有耐心。”

1.2 对初始条件的敏感依赖性

我们常常将一些相互联系（或相互作用）的客体组成的集合称为一个**系统**。这些客体，既可以是自然界中的一些物质，如气体、液体、固体、化合物、生物的各部分或整体，也可以是国家、组织、群体和经济结构或抽象事物。系统的长期行为对初始条件的敏感依赖性混沌运动的本质特征。如前所述，这也就是人们当今常说的所谓“蝴蝶效应”。我们中国人常说“差之毫厘，失之千里”和“千里之堤，溃于蚁穴”，讲的也是这个道理。在西方，控制论的创立者 N. 维纳 (Wiener) 引用过一首民谣对这种情况做了特别生动的描述：

钉子缺，蹄铁卸；
蹄铁卸，战马蹶；
战马蹶，骑士绝；
骑士绝，战事折；
战事折，国家灭。

马蹄铁上缺了根钉子本是一件微不足道的事，但经过逐级放大后，竟然导致了整个国家灭亡这种灾难性的后果。蝴蝶效应这个形象的比喻把对初始条件的敏感依赖性这一概念讲得活灵活现，惟妙惟肖，入木三分。

在牛顿的旗帜下前进的科学家们，事实上还挥动着另外一面旗帜，上面写道：只要近似地知道了一个系统的初始条件和理解了自然定律，就可以计算系统的近似行为。这一假定其实存在于科学的哲学核心里，就像一位理论家喜欢对学生们讲的一段话：“西方科学的基本思想是，当你试图解释地球表面一张台球桌

上的运动时,完全不必考虑另一个星系里某个行星上一片树叶的飘落。极小的影响是可以忽略的。事物的行为方式有一种收敛性,任意小的影响是不会放大成为任意大的效果的。”从经典科学的角度讲,近似和收敛的信念是很有根据的,它确曾起过作用。1910年确定哈雷彗星位置的小误差,只会对预言它1986年的回归产生小小的误差。对于今后几百万年,这一误差也永远是小的。计算机为宇宙导航也遵守同一假定,近似准确的输入导致近似准确的输出。全球天气预报的先驱者们也是这样做的。

众所周知,动力系统的行为或运动轨道决定于两个因素:一个是系统的运行演化规律,在数学上就是动力学方程;另一个就是系统现在的状态,数学上称为初始条件。一个确定性系统在给定了运动方程之后,如果满足利普希茨(Lipschitz)条件,则根据“存在唯一性”定理,轨道唯一地取决于初始条件。通过一个初值有且只有一条轨道。这就是系统行为或轨道对初值的依赖性。按照经典力学观点,轨道对初值的依赖是不敏感的。就是说,从两个相邻近的初值引出的两条轨道始终相互接近,彼此在空间偕游并行。设 $f(x_0)$ 代表从初值 x_0 出发的轨道, Δx 记初值的一个小改变量,对应的轨道为 $f(x_0 + \Delta x)$,那么只要 Δx 足够小,两条轨道的小偏离 $|f(x_0) - f(x_0 + \Delta x)|$ 也将足够小,这叫做初值的小改变引起轨道的小偏离。这也是微分学思想的核心,它主导了科学思维达300年之久。可以严格证明,一切线性系统对初值的依赖都是不敏感的,某些非线性系统也具有这种特性。一个系统如果其历史和未来完全由某一指定时刻的状态(初态)所确定,则称其为确定性系统。动力系统就是要研究一个确定性系统的状态随时间变化的规律。长期以来,人们实际上默认一切确定性系统都是不敏感地依赖于初值的。

但是,混沌研究改变了这一观点。处在混沌状态的系统,运动轨道将敏感地依赖于初始条件。从两个极邻近的初值出发的两条轨道,在短时间内似乎差距不大,但在足够长的时间以后,必然呈现出显著的差别来。当然这里所说的时间足够长在不同的系统有所不同,彼此的差别可能很大。从长期行为看,初值的小改变在运动过程中不断被放大,导致轨道发生巨大的偏差,以至在相空间中的距离要多远就有多远(自然不能超出相空间许可的尺度范围)。这就是系统长期行为对初值的敏感依赖性。

我们还是来看看被誉为混沌之父的洛伦茨1961年冬天一个具有历史意义的计算机实验吧。洛伦茨当时用的是一台Royal McBee LGP-30型真空管计算机,其速度大约每秒作一次的迭代。那个时代的计算机,用现代的眼光来看,自然是简陋而笨重的。在他计算机的存储器中,每个数保持6位10进制,如0.506127。输出时为了节约空间,只打印3位:0.506。洛伦茨输入的是这些较短的经过四舍五入的数字,他假定这1/1000的误差不会有什么影响。这是合理

的假定。如果气象卫星能以 $1/1000$ 的精确度测定洋面的温度，操作人员就会认为运气不错了。洛伦茨把天气简化为一组决定性方程，用计算机进行数值求解。给出一个特定的起点，天气每一次都应当准确地按同一种方式发展。给出一个稍有不同的起点，天气的发展也应稍有不同。比如说，小小的数值不过相当于一阵小风，自然会自行消失或互相抵消，而不致改变任何重要的大范围的天气特点。然而，在洛伦茨的这一特定的方程组中，小误差却引起了灾难性的后果。为了更仔细地观察几乎相同的天气模拟是怎样分道扬镳的，他把一条输出曲线摹绘到透明纸上，然后再覆盖到另一条曲线上，看看它们是怎样彼此分开的。他发现天气变化同上一一次的模式迅速偏离，不到几个“月”时间，所有相似之处都已消失无遗（图 1-1），其原因就在于蝴蝶效应，或者说对初始条件的敏感依赖性。

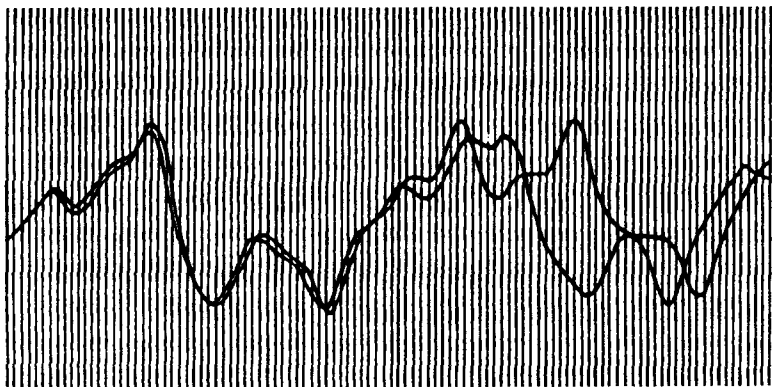


图 1-1 两组天气模式分道扬镳
(此图引自洛伦茨 1961 年的打印结果)

对一个实际系统，由于无法避免的内部涨落和外部环境的噪声的影响，初始状态的微小差别总是无法避免的，从而混沌对初始状态这种敏感依赖性必然导致运动的不确定性。

1.3 虫口模型的启示

1.3.1 逻辑斯谛映像

系统的性质或特征由一些所谓状态变量所表征，例如，粒子的坐标和动量，热力学中的温度、压强和体积，化合物的浓度和人口的密度等。动力学系统就是要研究一个确定性系统的状态变量随时间变化的规律。对一个确定性系统的变化规律，有许多刻画的方式，既可以是状态变量变化的微分方程、积分方程，也可以是状态变量的差分方程。这些方程既可以是线性的，也可以是非线性的，但实

际问题中大多数都是非线性的。简单地说,一个动力学系统若无法用已知道的数学方式来表示它的运动形式,则称其为**不可积系统**,反之则为**可积系统**^①。在一切可能的动力学系统中,到底有多少是不可积分的?数学家 L.L. 西格尔(Siegel)等人在 20 世纪 40 年代已给出了答案:不可积的系统俯拾皆是,多不胜数,而可积可解的系统却如凤毛麟角。

非线性问题的研究是极其困难的,直到目前,尚无完全系统的类似于傅里叶(Fourier)变换那样的处理方法,更多的是集中了典型范例的研究和做某些定量分析。传统的力学教科书实际只讲解在力学系统中稀如凤毛麟角的特例,即可积,甚至可解的简单系统,而完全没有论及更典型的、更普遍的不可积系统,从而也影响了人们的观念,好像确定论和概率论描述之间存在着不可逾越的鸿沟,现在我们知道,只要确定性的系统稍微复杂一些,它就会表现出随机行为。牛顿力学具有内在随机性。简单系统也可能产生非常复杂的动力学行为。

我们来探讨一个简单而又典型的生态问题:构造一种昆虫数目变化的数学模型,这种模型通常称之为“虫口模型”。

假定有某种昆虫,每年夏季成虫产卵后全部死亡,第二年春天每个虫卵孵化成一只虫子,其间没有代际交叠。设第 n 年的虫口数目为 x_n ,每只成虫平均产卵 a 个,这样年复一年地重复下去,一般规律可以写成

$$x_{n+1} = ax_n \quad (1-1)$$

这是一个线性差分方程,容易求得

$$x_n = x_0 a^n \quad (1-2)$$

式中: x_0 是起始年度的虫口数目。我们看到,只要 $a > 1$,即每只虫子平均产卵数多于 1 个,虫口数目就会按指数上升,用不了许多年,整个地球就要虫满为患。相反,如果 $a < 1$,则意味着虫口数目按指数规律减少,最终当 $n \rightarrow \infty$ 时, $x_0 \rightarrow 0$ 。于是这种昆虫就会在若干年后灭绝。

为了使读者对以后的叙述用到的一些数学术语易于理解,对式(1-2)所描述的模式从比较数学化的观点讨论一下。 x_0 是个任意数,特别是当 x_0 是映射中一个不动点,也就是其轨道为 $x_n = x_0$,且与 n 无关。当 $|a| > 1$ 时,式(1-2)的 x_n 按指数规律增长,而当 $|a| < 1$ 时, x_n 按指数规律减少,最终当 $n \rightarrow \infty$ 时, $x \rightarrow 0$,这意味着轨道被引向不动点 $x_0 = 0$ 。我们称这样的 x_0 为当 $-1 < a < 1$ 时的吸引子。很明显,此种情况下,不动点是稳定的,因为从略微偏离不动点的某处出发,任何轨道都会逐渐接近于它。对于 $|a| > 1$ 的情况,运动轨道永远是发散的。而在这种情况下,不动点是不稳定的,称这样的点为**排斥点**或**排斥子**。不管轨道的初始点如何接近排斥点,经过足够长的时间,轨道总会远离。

① 关于可积与不可积系统的确切定义可参阅张建树等编著《理论力学》,科学出版社,2005。