·高等学校教学用书·

矿业运筹学

GAODENG XUEXIAO JIAOXUE YONGSHU

冶金工业出版社

高等学校教学用书

矿业运筹学

西安冶金建筑学院　桂中岳　编

冶金工业出版社

高等学校教学用书

矿 业 运 筹 学

西安冶金建筑学院　桂中岳　编

冶金工业出版社出版
（北京北河沿大街嵩祝院北巷39号）
新华书店总店科技发行所发行
冶金工业出版社印刷厂印刷
787×1092 1/16　印张13 3/4字数324千字
1989年11月第一版　1989年11月第一次印刷
印数00,001～2,450册
ISBN 7-5024-0583-6
TD·99（课）定价2.75元

前　　言

一九八〇年十二月在西安冶金建筑学院召开了有冶金、有色、煤炭、建材和化工等部门的十二所高校参加的“矿业系统工程”课程讨论会。会后，西安冶金建筑学院根据会议拟定的课程大纲于一九八一年五月编出了“矿业系统工程基础”讲义(上、下册)，并从该年起在本科生教学中使用。

自那时以来，我国的矿业系统工程和矿业教育事业都有了很大的发展。一九八五年四月冶金工业部教育司在北京钢铁学院主持修订了采矿工程专业教学计划，确定把“矿业运筹学”作为一门必修课程单独设立，并初步确定了这门课程应讲授的内容。这样，就迫切需要一本适于这门课程的教材。

这本教材是在编者总结从事这门课程的教学实践和听取了兄弟院校的宝贵意见后在原用讲义的基础上重新写成的。在此次编写中也参考和吸取了国内外有关教材的长处。

编写本教材的主要宗旨是在于结合矿业中的应用来介绍运筹学中几个主要分支的基本内容，而并不十分强调数学定理和各种算法的严格证明和推导。这是本书与其他运筹学教材的一个较大的不同之处。

本书除绪论外共分六章，即线性规划、整数规划、非线性规划、动态规划、图论与统筹方法、决策论。对每一种主要算法均给出了计算框图和算例，各章后都附有一定量的习题。

本书可作为高等工业院校矿业类专业的教材，也可作为其他工科专业“运筹学”课程的教材或教学参考书，对从事矿山设计、科研和生产管理等方面工作的工程技术人员也有一定参考价值。

本教材可供50～70学时使用，各校可根据课程时数，在内容上有所取舍。教学过程中还可安排一定量的习题课和编程、上机练习等。

本书由桂中岳编写。中国金属学会理事、中国金属学会采矿学会矿山系统工程学术委员会主任委员张永高教授、昆明工学院陈孝华教授、北京科技大学李国乔副教授、东北工学院张立群副教授和西安冶金建筑学院云庆夏教授等审阅了全书，提出了许多宝贵意见，在此，编者向他们表示衷心地感谢。

由于编者水平有限，书中缺点错误在所难免，恳切希望使用本教材的师生和读者提出批评和改进意见。

编　者

一九八八年六月

目　　录

绪　　论

矿业运筹学是为适应矿业科学技术的发展而新近设立的一门课程。它的主要内容是结合矿业中的应用来介绍运筹学的基本知识，因此，其核心是运筹学。但它又不同于一般的运筹学，因为其着眼点是强调在矿业中的应用。

“运筹”一词出自《史记·高祖本记》：“上（刘邦）曰：夫运筹帷幄之中，决胜于千里之外，吾不如子房（张良）。”这里所说的运筹即运用、筹划之意。我国古代记载很多事例，如齐王赛马、丁渭修皇宫和沈括运军粮等，都充分说明朴素的运筹思想在我国不仅早有产生，而且还在实践中有过实际应用。

“齐王赛马”说的是公元前四世纪的战国时期，齐威王和田忌赛马，双方各自出上、中、下三个等级的马各一匹。同一等级的马，齐王均比田忌的强。田忌采纳了谋士孙膑的主意，用下马对齐王的上马，用中马对齐王的下马，用上马对齐王的中马。结果田忌二胜一负，以劣胜优，赢得千金。这就是“对策论”的一个典型应用。

“丁渭修皇宫”说的是公元十世纪的北宋真宗时代，宰相丁渭主持失火后皇宫的修复工作。烧砖所用的土就取自皇宫前的大街，大街被挖后形成的沟引入了汴河水，用木筏和船把各种材料运到皇宫前，工程完工后又将拆下的废砖碎瓦回填入沟内，使大街重新修复。丁渭的这种组织施工的方法就是一种最优化方法。

“沈括运军粮”则更进一步说明了我国对运筹中的定量分析方法也有过先例。沈括是我国北宋时期著名的科学家，在他的名著“梦溪笔谈”中就有运用运筹思想来解决行军天数、士兵人数、民夫人数和军粮供应量这四者间定量关系的记载。虽然当时的计算还是很粗略的，但能由定性分析迈入定量分析不能不说是一个很大的进步。

虽然朴素的运筹思想及其应用在国内外的历史上都能找到不少事例，但运筹学形成一门学科则还是近四十多年来的事。

一般认为，运筹学是第二次世界大战期间在英国首先出现的。1940年8月英国曼彻斯特大学物理学家、诺贝尔奖获得者布莱克特（P.M.S.Blackett）教授领导了一个研究小组，取名为Operational Research（军事活动研究），这个小组成功地建立了反空袭雷达控制系统，解决了雷达与防空武器的最佳配置问题，对英国防空系统效率的提高作出了重要贡献。此后不久，在美国也建立了一个以麻省理工学院鲍尔斯（E.Bowels）教授为首的类似的小组，并取名为Operations Research（即译为现今的运筹学）。这些小组在第二次世界大战期间成功地解决了许多复杂的战略和战术问题。

第二次世界大战结束后，从事军事运筹的许多专家转入了民用部门，从而使运筹学得到了迅速发展，并逐步形成为一门独立的学科。尤其是自1946年世界上第一台电子计算机问世以来，随着计算机技术的发展和应用，运筹学如虎添翼，内容更为丰富，应用更加广泛。今天，可以这样说，运筹学已应用到国民经济的各个部门。

关于运筹学的定义至今还未统一。我国一般认为，运筹学是根据各种实际问题的要求，通过数学的分析和运算，对人力、物力、财力等资源进行统筹安排，以便为决策者提供有科学依据的最优选择的一门应用科学。

运筹学研究的范围十分广泛。可以这样说，凡涉及“最优化”的问题都属运筹学研究的对象，因而，运筹学的分支非常之多。以“运筹学国际文摘”为例，其技术分类就有50余种，其中比较成熟和常用的分支有：线性规划、整数规划、几何规划、目标规划、非线性规划、动态规划、图论、统筹方法、决策论、对策论、排队论、存贮论、马尔科夫决策规划和可靠性理论等。每个分支都有它本身的数学模型，并能有效地解决某一类最优化问题。

运筹学在矿业中的应用也有三十多年的历史，特别是1961年在美国亚里桑那大学召开了第一届“计算机或计算机技术和运筹学在矿业中的应用”（原文为Applications of Computers or Computer Techniques And Operations Research In The Mineral Industry，缩写为“APCOM”）国际会议❶以来，运筹学和计算机技术在地质、采矿、矿井建设和选矿工程等领域的应用都有了迅速发展，而且涉及到规划、设计、施工、生产、经营、管理和控制等各个方面。

与国外相比，我国在这一方面的起步较晚。虽然在六十年代初，曾经进行过一些探索，但由于“文革”而中断。自1976年以来，我国才全面开始了这一方面的研究和应用工作。目前，我国在运筹学和计算机技术在矿业中的应用方面已经取得了相当丰硕的成果，有的成果已接近或达到了国际较先进的水平，对我国矿业科学技术的发展起到了积极作用。

学习本课程的目的有二，一是为后续课程（主要是“矿业系统工程”）打下必要的基础；二是学习运筹学中提出问题、分析问题和解决问题的思路和方法，从而应用所学的运筹学知识来解决今后工作中可能遇到的各种实际问题。矿业系统工程是一门专业课，它是系统工程的一个分支。我国著名科学家钱学森同志在“系统思想和系统工程”一文中指出：“在科学技术的体系结构中，工程技术的理论基础是技术科学。……。什么技术科学是系统工程的共同理论基础呢？是运筹学。”运筹学既然是系统工程的共同理论基础，矿业运筹学则是矿业系统工程的共同理论基础。因此，只有认真学好本课程，才能学好矿业系统工程课。这个道理是显而易见的。

正如我们在绪论一开始就强调的，矿业运筹学与一般的运筹学又有不同，其着眼点是强调在矿业中的应用。基于这一认识，我们在今后课程内容的阐述中尽可能讲清楚各分支数学模型的建立及其特点，以及在实际应用中这类数学模型的求解思路和方法。至于一些数学定理的严格证明和推导则不是本课程所强调的，这种阐述方法对学习工程技术专业的学生来说，应当是完全可以接受的。

针对专业需要和课程时数，本教材共编写了六章，介绍运筹学的七个主要分支，即线性规划、整数规划、非线性规划、动态规划、图论、统筹方法和决策论。这些分支是矿业中应用最重要、最基本和最广泛的运筹学分支。

我们希望通过本课程的学习，能达到预期的目的，并取得较好的效果。

❶ APCOM国际会议的命名是1972年第十次年会时正式确定的。

第一章 线 性 规 划

线性规划（Linear Programming，缩写为LP）是运筹学中的一个重要分支。从四十年代创始以来，这一分支发展很快，在理论上日趋完整和成熟，在应用上也愈来愈广泛。目前，线性规划已在工业、农业、国防、交通、商业和管理等国民经济的各个领域都得到了广泛应用。

线性规划在矿业中的应用也占有重要地位。1973年美国采矿工程师协会（SME）编辑出版的“采矿工程手册”（Mining Engineering Handbook）对世界上23家应用计算机的采矿公司进行了统计，其中用线性规划来解决矿业中各种问题的就有15家。近年来的情况表明，线性规划在矿业中的应用更为扩大，解决的问题也愈来愈多，诸如配矿问题、运输问题、分配问题、采掘进度计划的编制问题以及资源的规划和合理利用问题等。

本章将分七节来介绍线性规划的主要内容。

第一节 线性规划的数学模型

一、线性规划数学模型的建立及其特征

对于一个给定的实际问题，若通过分析、试验等方法后，能够用一系列的数学算式把它完整确切地表示出来，那么，就把这些数学算式称为该实际问题的数学模型。显然，正确地建立数学模型是用数学方法定量求解的前提和关键。下面我们先通过几个实例来说明线性规划这类数学模型的建立过程及其特征。

例 1-1 某矿炸药厂生产两种矿用炸药：2号岩石铵梯炸药和3号露天铵梯炸药。若下月可提供给该厂的原料数量为：硝酸铵——400t；梯恩梯——44t；木粉——36t。这两种炸药的出厂价格分别为1200元/t和800元/t。问应如何安排生产才能使该厂下月的产值最高？

为建立此问题的数学模型，首先就要对问题仔细进行分析。要搞清已经给定了哪些条件？各条件间有什么样的关系？该问题所要求达到的目标是什么？……。

在此例中已给的条件有：

（1）产品种类：2号岩石铵梯炸药和3号露天铵梯炸药。根据这两个矿用炸药品种就可以知道它们所使用的原料及配比，如表1-1所示。

铵梯炸药

表 1-1

原料 \ 配比 \ 炸药品种	2号岩石铵梯炸药	3号露天铵梯炸药
硝酸铵	0.85	0.88
梯恩梯	0.11	0.03
木 粉	0.04	0.09

（2）下个月各种原料的供应量：硝酸铵——400t；梯恩梯——44t；木粉——36t。

（3）产品的出厂价格：2号岩石铵梯炸药为1200元/t；3号露天铵梯炸药为800元/t。

此例所要求达到的目标是：在给定的原料供应数量有一定限制的条件下，怎样安排两种产品的生产计划才能使该厂下月的产值最高。

在对问题进行分析的基础上，就可着手建立此问题的数学模型。为此：

设下月2号岩石铵梯炸药和3号露天铵梯炸药的生产量分别为x_1吨和x_2吨；设该厂下月的产值为Z元。

根据两种矿用炸药的原料配比和供应数量之间的关系可列出以下三个数学算式：

$$0.85x_1+0.88x_2\leqslant 400$$
$$0.11x_1+0.03x_2\leqslant 44$$
$$0.04x_1+0.09x_2\leqslant 36$$

由于产量不可能为负值，故有：

$$x_1\geqslant 0 \qquad\qquad x_2\geqslant 0$$

按题意每出厂一吨2号岩石铵梯炸药可得1200元，每出厂一吨3号露天铵梯炸药可得800元，则当下月这两种产品的生产量分别为x_1吨和x_2吨时，该厂的产值Z应为：

$$Z=1200x_1+800x_2$$

此例要求达到的目标是，在上述给定的条件下怎样安排下月的生产才能使该厂产值最高。具体地说，也就是求当x_1，x_2这两个变量取何值时才能使Z达到最大值。用“max”来表示最大，即可将此例所要求达到的目标写成下面的数学算式：

$$\max\ Z=1200x_1+800x_2$$

将上述诸数学算式汇集一起，则有：

$$\max\ Z=1200x_1+800x_2 \tag{0}$$
$$\text{s.t.}^{❶}\ 0.85x_1+0.88x_2\leqslant 400 \tag{1}$$
$$0.11x_1+0.03x_2\leqslant 44 \tag{2}$$
$$0.04x_1+0.09x_2\leqslant 36 \tag{3}$$
$$x_1,\ x_2\geqslant 0 \tag{4}$$

(0)～(4)式就是此例所建立的数学模型。

显然，类似于此例的实际问题是很多的。我们把这类问题统称为“有限资源的合理利用”问题。

例 1-2 某露天铁矿明年预定有14个出矿点，各出矿点采出矿石的平均品位、最大年产量和单位开采成本如表1-2所示。已经确定该矿明年的矿石年产量为120万t，选厂要求入选的原矿平均品位不低于45%。问怎样规划明年各出矿点的产量才能使总开采成本最低？

我们仿照例1-1的方法，对该问题进行仔细分析后，可设x_1，x_2，……，x_{14}分别为1号，2号，……，14号出矿点明年的矿石年产量（万t），并设Z为总开采成本（万元），则

❶ s.t.为subject to的缩写。

该问题的数学模型为：

$$
\begin{array}{lll}
\min Z = 1.35x_1 + 1.54x_2 + \cdots + 1.64x_{13} + 1.70x_{14} & & (0) \\
\text{s.t.} \quad x_1 & \leqslant 70.0 & (1) \\
\qquad x_2 & \leqslant 7.0 & (2) \\
\qquad \ddots & & \vdots \\
\qquad x_{13} & \leqslant 1.2 & (13) \\
\qquad x_{14} & \leqslant 7.4 & (14) \\
\qquad x_1 + x_2 + \cdots + x_{13} + x_{14} & = 120 & (15) \\
\qquad \dfrac{37.16\% x_1 + 51.25\% x_2 + \cdots + 40.73\% x_{13} + 50.29\% x_{14}}{120} & \geqslant 45\% & (16) \\
\qquad x_1, x_2, \cdots, x_{13}, x_{14} \geqslant 0 & & (17)
\end{array}
$$

其中 (1)～(14) 式分别为14个出矿点的年产量限制条件；(15) 式为全矿年产量限制条件；(16) 式为选厂要求的入选原矿平均品位的限制条件； (17) 式为产量不可能为负值的限制条件。(0) 式为该问题规划时所要达到的目标。在此，因为是求“最小”，故用“min”表示。

表 1-2

出矿点	平均品位 (%)	最大年产量 (万 t)	单位开采成本 (元/t 或万元/万 t)
1号	37.16	70.0	1.35
2号	51.25	7.0	1.54
3号	40.00	17.0	1.46
4号	47.00	23.0	1.70
5号	42.00	3.0	1.43
6号	49.96	9.5	1.57
7号	51.41	1.0	1.41
8号	48.34	15.4	1.56
9号	49.08	2.7	1.60
10号	40.22	7.6	1.48
11号	56.90	13.5	1.71
12号	56.92	2.7	1.69
13号	40.73	1.2	1.64
14号	50.29	7.4	1.70

从形式上看，例1-2较例1-1的数学模型复杂些，变量个数较多，不等式数量也较多，其中不仅有“≤”，也有“≥”，此外，还有等式。但该问题建立数学模型的过程和方法与例1-1则完全相同。

例1-2即为采矿工程中常见的一类配矿问题。

例 1-3 某钢铁联合企业有三个矿山，它们日产铁矿石分别为5000t、3000t和1000t。假定这些矿石的品位较高，可以不经选矿而直接供给四个炼铁厂炼铁。这四个炼铁厂每天需要的矿石量分别为4000t、2500t、1000t和1500t。三个矿山运往四个炼铁厂的矿石运输

单价如表1-3所示。问该企业怎样安排运输方案才能使总运输费用最低？

表 1-3

运输单价(元/t) 炼铁厂 / 矿山	1号	2号	3号	4号
1 号	5.0	3.0	4.1	1.6
2 号	4.5	3.0	3.2	3.4
3 号	3.3	4.0	2.4	5.5

同前两例一样，通过分析后，我们也可建立起该问题的数学模型。在这类问题中，为方便起见，我们可以应用带两个脚标的变量，即设从第i个矿山每天运往第j个炼铁厂的矿石量为x_{ij}吨。在此例中，$i=1, 2, 3$；$j=1, 2, 3, 4$。因而计有x_{11}，x_{12}，x_{13}，x_{14}；x_{21}，x_{22}，x_{23}，x_{24}；x_{31}，x_{32}，x_{33}，x_{34}；共计12个变量。又设总运输费用为Z元，则该问题的数学模型为：

$$\begin{aligned}\min Z= &\ 5.0x_{11}+3.0x_{12}+4.1x_{13}+1.6x_{14}\\ &+4.5x_{21}+3.0x_{22}+3.2x_{23}+3.4x_{24}\\ &+3.3x_{31}+4.0x_{32}+2.4x_{33}+5.5x_{34}\end{aligned} \quad (0)$$

$$\text{s.t.}\quad x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}=5000 \quad (1)$$

$$x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24}=3000 \quad (2)$$

$$x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34}=1000 \quad (3)$$

$$x_{11}+x_{21}+x_{31}=4000 \quad (4)$$

$$x_{12}+x_{22}+x_{32}=2500 \quad (5)$$

$$x_{13}+x_{23}+x_{33}=1000 \quad (6)$$

$$x_{14}+x_{24}+x_{34}=1500 \quad (7)$$

$$x_{11}, \cdots, x_{14}, x_{21}, \cdots, x_{24}, x_{31}, \cdots, x_{34}\geqslant 0 \quad (8)$$

其中(1)～(3)式分别为三个矿山的日产矿石量限制条件；(4)～(7)式分别为四个炼铁厂的日需矿石量限制条件；(8)式为运输量不可能为负值的限制条件；(0)式为该问题安排运输方案所要达到的目标。

这类问题统称为运输问题，其中若各原料产地的供应量之和与各销地的需要量之和相等，又称为“平衡运输问题”；否则，称为“不平衡运输问题”。例1-3显然属于前一类问题。

分析以上三例所建立的数学模型，可以发现，它们都是由以下三部分组成的：

第一部分就是上述三例中的(0)式，它的物理意义是反映这些实际问题所要达到的目标（如产值最高、开采费用最低和运输费用最小等）。由于它表示为若干个变量的函数形式，即$Z=f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，故称此部分为“目标函数”。

第二部分就是上述三例中除(0)式和最后一式以外的其他各式，这些式子的物理意义是反映该实际问题所受到的种种限制条件（如原料供应、产量、品位、供应量、需求量等），故称此部分为“约束条件”。

第三部分就是上述三例中的最后一式，它的物理意义是反映所设定的这些变量的取值所应满足的条件。在上述三例中，这些变量均为非负的连续变量，故称此部分为“非负条件”。

再作进一步地分析可知，上述三例的目标函数尽管可能有求max和求min的区别，但其目标是单方向的，而且它总是与诸变量的一次幂有关。也就是说，这类问题的目标函数都是线性形式。此外，这类问题的约束条件尽管有数量多少和“$\geqslant$”、“$\leqslant$”、“$=$”型之分，但都可视为是一不等式或等式约束条件组，或由等式与不等式混合组成的约束条件组，而且，该约束条件组中的每一个式子也都是线性的。我们把具有上述特征的数学模型就称为线性规划数学模型。

在此，我们从数学上可给线性规划下如下的定义：凡是求在一组线性约束条件下的单方向、线性目标函数的极值问题就称为线性规划。需要说明的是，在此定义中并未涉及变量非负条件，这就是说在线性规划中变量可以有非负要求，也可以没有非负要求。不过，对于多数的线性规划问题而言，变量是有非负要求的。在此，还应特别指出的是，在线性规划中，无论变量有无非负要求，变量的类型都是属于连续型。

根据线性规划的定义，若用单脚标表示的变量个数为n个，约束条件个数为 m 个，并假定变量均有非负要求，那么，线性规划问题的数学模型就可以抽象为如下的一般形式：

$$\begin{array}{l} \max \\ \min \end{array} \quad Z=c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_nx_n \qquad (0)$$

$$\text{s.t.} \quad a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n \begin{array}{c}\geqslant\\=\\\leqslant\end{array} b_1 \qquad (1)$$

$$a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n \begin{array}{c}\geqslant\\=\\\leqslant\end{array} b_2 \qquad (2)$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$a_{m_1}x_1+a_{m_2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n \begin{array}{c}\geqslant\\=\\\leqslant\end{array} b_m \qquad (m)$$

$$x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n\geqslant 0 \qquad (m+1)$$

上述形式书写不便，若引用求和号“Σ”就可将其简化。假定其目标函数为求max，约束条件为一组“$\leqslant$”型的不等式，此时，就可简写为：

$$\max\ Z=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j$$

$$\text{s.t.}$$

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\leqslant b_i \qquad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ m)$$

$$x_j\geqslant 0 \qquad (j=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

二、线性规划数学模型的标准形式和标准化方法

按实际问题建立的线性规划数学模型的形式很多：目标函数可以是求max，也可以是

求min；约束条件组又有“≥”、“≤”、“=”型；变量可以有非负要求，又可无非负要求。这种形式上的不统一，会给寻求线性规划的解法带来不便。能否把各种实际问题所建立起来的线性规划数学模型转化成一种统一的形式？如果这个想法可以成立，那么，只要找到了这种统一形式的求解方法，就等于解决了所有线性规划各具体形式的求解方法。

通过分析，各种线性规划数学模型是可以转化为某种统一形式的，称此统一形式为线性规划数学模型的标准形式。

线性规划数学模型的标准形式可有以下两种：

$$\left.\begin{aligned}&\min\ Z=\sum_{j=1}^{n}c_j x_j\\&\text{s.t.}\quad \sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j=b_i \qquad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ m)\\&\qquad\qquad x_j\geqslant 0 \qquad (j=1,\ 2,\ \cdots,\ n)\\&\text{其中}\qquad b_i\geqslant 0 \qquad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ m)\end{aligned}\right\}\tag{1}$$

和

$$\left.\begin{aligned}&\max\ Z=\sum_{j=1}^{n}c_j x_j\\&\text{s.t.}\quad \sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j=b_i \qquad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ m)\\&\qquad\qquad x_j\geqslant 0 \qquad (j=1,\ 2,\ \cdots,\ n)\\&\text{其中}\qquad b_i\geqslant 0 \qquad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ m)\end{aligned}\right\}\tag{2}$$

（1）、（2）两种形式所不同的仅在于第一种形式的目标函数是求min，第二种形式的目标函数是求max。这两种标准形式都很常用，它们间可以相互转换。在本书中我们选用第一种形式。需要说明的是，在上述标准形式中的变量个数n与未转化为标准形式前的变量个数n所用符号虽然相同，但一般来说，二者的含义和数量是不相同的。关于这一点，后面还要加以说明。

从线性规划数学模型的标准形式中可以看出，它具有以下三个特点：

（1）目标函数为求min（或求max）；

（2）所有的约束条件均为等式，且等式右端的常数项均为非负值；

（3）全部变量的取值均要满足非负要求。

将一个线性规划数学模型由非标准形式转化为标准形式的过程称为“标准化”。下面按三个部分分别说明标准化方法：

1．目标函数标准化

目标函数标准化就是如何将一个原来是求max的线性规划问题转化为求min的线性规划问题。

如图1-1所示，若原函数为$y_1=f(x)$，它在x_1点具有极小值，在x_2点具有极大值，则其反号函数$y_2=-f(x)$，就在x_1点具有极大值，而在x_2点具有极小值，且：

$$y_1(x_1)=-[y_2(x_1)] \qquad y_1(x_2)=-[y_2(x_2)]$$

利用这一性质，我们就可把一个原来是求max的线性规划问题转化为求min的线性规

1. (1),(5), 2.(1),(2) 3.(1),(2) 4.(1),(2)
5. 8, 9

划问题（反之，当然也可把一个原来是求min的线性规划问题转化为求max的线性规划问题）。

例如原问题的目标函数是：$\max\ Z=1200x_1+800x_2$，标准化后的目标函数则应是：

$$\min\ Z'=-1200x_1-800x_2$$

显然，这一转化并不影响原问题的解，只是两个问题的目标函数值间相差一个负号。

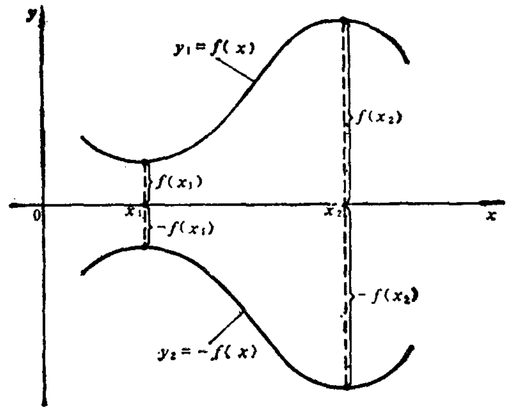

图 1-1

总起来说，对于一个原问题的目标函数是求极大化的线性规划问题：

$$\max\ Z=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j$$

标准化后的目标函数应为：

$$\min\ Z'=-\sum_{j=1}^{n}c_jx_j$$

当求得标准形式中原有变量的最优解X^*（关于什么是最优解见本章第二节）及其相应的目标函数值$\min Z'$后，还原成原问题的最优解应仍为X^*，其相应的目标函数值应为：

$$\max\ Z=-\min\ Z'$$

2．约束条件标准化

约束条件标准化包括以下两方面内容：一是将约束条件中的不等式（≤、≥）转化为等式；二是将转化为等式约束后右端常数项小于零的方程转化为大于零的方程。

（1）将不等于约束转化为等式约束。

对于任何形式的一个不等于约束（≤或≥）均可采用引进一个满足非负要求的新变量x_s将其转化为等式约束。

例如原约束条件为：

$$3x_1+4x_2\leqslant 1700 \tag{1}$$

$$7x_1-3x_2\geqslant 1500 \tag{2}$$

欲将这两个不等式约束转化为等式约束，可在（1）式和（2）式中分别引进一个满足非负要求的新变量x_3和x_4，这样便可将它们转化为下列形式：

$$3x_1+4x_2+x_3=1700 \tag{1'}$$

$$7x_1-3x_2-x_4=1500 \tag{2'}$$

$$x_3,\ x_4\geqslant 0$$

引进新变量后的新问题的解并不影响到未引进新变量前的原问题的解，二者所不同的只是新问题的解中包括的变量个数增多了。如果在新问题的解中除去引进的新变量，则就是原问题的解。由于引进了上述新变量，将原不等式约束转化成了等式约束，而还原成原问题的解时还要将它除去，故称此类变量为“松弛变量”。松弛变量具有一定的物理意义，例如它可表示某种限制条件的剩余量（$\leqslant$）或超出量（$\geqslant$）等。

松弛变量的脚标可以在原有变量（也称结构变量或设计变量等）的基础上顺序往下编排，其个数视约束条件中不等式约束的个数而定，若原有变量的个数为k个，不等式约束的个数为t个，则松弛变量可排列为x_{k+1}，x_{k+2}，……，x_{k+t}。由此可知，在一般情况下，标准化前的变量个数与标准化后的变量个数是不等的。标准化后的变量个数不仅包括原有变量，而且还包括了引进的松弛变量等新变量，这就是二者的区别。

（2）将右端常数项小于零的等式约束转化为大于零的等式约束。

在完成将不等式约束转化为等式约束后，如果右端常数项小于零，则只需在等式两侧同乘以（-1），就可将其转化为大于零。显然，这样作不会影响原问题的解。

3．非负条件标准化

非负条件标准化，就是将原有变量中取值无非负要求的变量转化为有非负要求的变量。由于引入的松弛变量均有非负要求，故松弛变量无需再作标准化。

如前所述，多数的线性规划问题，变量是有非负要求的，此时，当然就不必再作这步工作。但是，也有少数的线性规划问题，全部或部分变量并无非负要求，此时就必须进行非负条件标准化。

非负条件的标准化视原有变量的不同可区分为以下几种方法：

（1）原有变量为自由变量。

变量的取值若不受限制，则称此变量为自由变量。此时可用两个满足非负条件的新变量之差来取代它。

例如原有变量x_k为自由变量，为将其标准化，可令：

$$x_k=x_k'-x_k''$$

$$x_k',\ x_k''\geqslant 0$$

在目标函数和约束条件中凡遇见x_k之处，均用（$x_k'-x_k''$）代之。求得新变量x_k'和x_k''的解值后，再用上式便可还原得原有变量x_k的解值，当然，求得的x_k可能是大于零的，也可能是小于或等于零的。

（2）原有变量要求为非正。

例如原有变量$x_k\leqslant 0$，此时可令：

$$x_k=-x_k'$$

则
$$x_k'=-x_k\geqslant 0$$

然后用（$-x_k'$）代替x_k，代入目标函数和约束条件中，便可将其标准化。求得x_k'的解值后，再用上式便可还原得x_k的解值。

（3）原有变量为有界变量。

变量的取值若有上、下界限制，则称此变量为有界变量。

例如原有变量x_k的要求为：$a \leqslant x_k \leqslant b$（$a$、$b$均为实数）。此时可有两种方法将其标准化。一种方法是令：

$$x_k = x_k' + a$$

则
$$x_k' = x_k - a \geqslant 0$$

此时除要将它代入目标函数和约束条件外，在约束条件中还需添加一个不等式，即：

$$x_k' \leqslant b - a$$

另一种方法是令：

$$x_k = x_k' - x_k''$$
$$x_k',\ x_k'' \geqslant 0$$

此时除要将它代入目标函数和约束条件外，在约束条件中还需添加两个不等式，即：

$$x_k' - x_k'' \geqslant a$$

和
$$x_k' - x_k'' \leqslant b$$

无论采用哪种方法，求得新变量的解值后均可还原得原有变量x_k的解值。

下面举一数例来说明线性规划数学模型的标准化方法。

例 1-4 将下述线性规划数学模型化为标准形式：

$$\max\ Z = 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 - x_4 \qquad (0)$$
$$\text{s.t.}\quad 4x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 \leqslant 10 \qquad (1)$$
$$x_1 + 3x_2 - 3x_3 - 3x_4 = -16 \qquad (2)$$
$$-3x_1 - 4x_2 + 2x_3 + x_4 \geqslant 8 \qquad (3)$$
$$x_1 \geqslant 0;\ x_2 \leqslant 0;\ x_3\text{无限制};\ 1 \leqslant x_4 \leqslant 3 \qquad (4)$$

解

1. 将原有变量标准化

令 $x_2 = -x_2'$ $\qquad x_3 = x_3' - x_3''$ $\qquad x_4 = x_4' + 1$

则 $x_2',\ x_3',\ x_3'',\ x_4' \geqslant 0$

然后用$-x_2'$代替x_2、用$x_3' - x_3''$代替x_3、用$x_4' + 1$代替x_4代入原目标函数和约束条件中，并要添加一不等式，则得：

$$\max\ Z = 3x_1 - 4x_2' - 2x_3' + 2x_3'' - x_4' - 1 \qquad (0')$$
$$\text{s.t.}\quad 4x_1 - 3x_2' - x_3' + x_3'' + 2x_4' \leqslant 8 \qquad (1')$$
$$x_1 - 3x_2' - 3x_3' + 3x_3'' - 3x_4' = -13 \qquad (2')$$
$$-3x_1 + 4x_2' + 2x_3' - 2x_3'' + x_4' \geqslant 7 \qquad (3')$$
$$x_4' \leqslant 2 \qquad (4')$$
$$x_1,\ x_2',\ x_3',\ x_3'',\ x_4' \geqslant 0 \qquad (5')$$

2. 将目标函数标准化

得新问题的目标函数为：

$$\min\ Z' = -3x_1 + 4x_2' + 2x_3' - 2x_3'' + x_4' + 1$$

3. 将约束条件标准化

在（1′）、(3′)和（4′）中分别引入满足非负条件的新变量x_5，x_6和x_7，并将（2′）乘以（−1)后得：

$$4x_1 - 3x_2' - x_3' + x_3'' + 2x_4' + x_5 \qquad = 8$$