GAODENG DAISHU XUEXI ZHIDAO YU XITI JIEXI

高等代数学习指导与习题解析

（与高教版北京大学编《高等代数》（第三版）配套）

李 星 李宏伟 主编
毛纲源 主审

6

◇归纳知识要点 提纲挈领
◇演绎解题技巧 新颖独特
◇解析典型例题 深入浅出
◇配套经典教材 学习必备

华中科技大学出版社

高等代数学习指导与习题解析

高等代数学习指导与习题解析

主　编　李　星　李宏伟

副主编　余绍权　陈兴荣

　　　　付丽华　李志明

主　审　毛纲源

华中科技大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等代数学习指导与习题解析/李 星 李宏伟 主编
武汉:华中科技大学出版社,2005年10月
ISBN 7-5609-3549-4

Ⅰ. 高…
Ⅱ. ①李… ②李…
Ⅲ. 代数-高等学校-教学参考资料
Ⅳ. O15

高等代数学习指导与习题解析 李 星 李宏伟 主编

责任编辑:万亚军 袁 冲 封面设计:潘 群
责任校对:刘 峻 责任监印:张正林

出版发行:华中科技大学出版社
武昌喻家山 邮编:430074 电话:(027)87557437

录 排:武汉佳年华科技有限公司
印 刷:湖北新华印务有限公司

开本:850×1168 1/32 印张:13.5 字数:327 000
版次:2005年10月第1版 印次:2005年10月第1次印刷 定价:19.80元
ISBN 7-5609-3549-4/O·369

内容简介

本书是根据北京大学数学系几何与代数教研室编写的《高等代数》(第三版)的章节顺序编写的，共十二章. 每章包括“本章知识要点”、“课后习题详解”、“典型例题分析”和“自测题及答案”四部分.

本书可作为高等学校数学类本科生学习“高等代数”课程的学习参考书，也可作为其他理工科专业学生学习“线性代数”或复习考研的重要参考资料. 本书还可供高校教师和工程技术人员参考.

前　言

高等代数是高等学校数学类本科生的重要基础课程，学习高等代数可以培养并提高学生的抽象思维、逻辑推理以及代数运算等能力．高等代数主要包括多项式和线性代数两部分内容，而线性代数又是数学专业以外各理工科学生的基础课程，因此高等代数不仅是学习后继数学基础课程和专业课程的必备基础知识，也是自然科学和工程技术领域中的重要数学工具．然而，高等代数具有内涵丰富、变化复杂、习题类型多、技巧性强等特点，所以在学习高等代数时，不仅需要系统学习基本概念和理论，还需要熟练掌握解题方法和技巧．为了帮助学生进一步理解基本概念、巩固基础理论、提高解题技能，我们根据长期的教学实践，参考了多种高等代数教材和复习资料，按北京大学数学系几何与代数教研室编写的《高等代数》(第三版)的章节顺序编写了本书．每章具体内容如下．

(1) 本章知识要点．本部分内容概括总结了相应章节的知识要点，包括基本概念、基本性质和重要定理等内容．在解题之前浏览一下这部分内容，既可以起到复习的作用，又能帮助学生理清思路．

(2) 课后习题详解．在理解并掌握基本概念、理论和方法的基础上，仍然需要演算一定数量的习题来达到巩固提高的目的．为此，我们给出《高等代数》(第三版)每章习题及补充题的详细解答，以便读者在解题时进行分析和对照．

(3) 典型例题分析．在对习题进行详细解答基础上，我们又精选一批典型例题进行分析与解答．读者从这些既有质又有量的分析、解题过程中，将逐渐领会和掌握解题和考试的要领．

(4) 自测题及答案．每章末给出了一定数量的自测题及答案或提示．读者可以通过这些测试题检验对该章知识的掌握程度，进

一步增强解题能力.

尽管本书是为数学专业学生而编写的，但除第一、八、十章外，本书其余章节内容也可作为其他理工科专业学生学习线性代数或复习考研的重要参考资料. 本书还可供高校教师和工程技术人员参考.

本书由李星、李宏伟主编，参加编写的有付丽华（第一章）、余绍权（第二、三章）、陈兴荣（第四、五章）、李宏伟（第六、九章）、李星（第七、十章）、李志明（第八章），统稿工作由李星和李宏伟完成.

本书参考了多本教材和辅导书籍，在此向这些书籍的作者表示衷心感谢，重要的参考资料列于书末. 华中科技大学出版社的袁冲、万亚军编辑为本书的出版给予了热情的支持和帮助，在此也一并表示感谢.

限于编者水平，书中错误和不妥之处在所难免，敬请读者批评指正.

编　者

2005 年 5 月

目　录

第一章　多　项　式

多项式是代数学中的一个基本研究对象，它与高次方程的讨论有着密切的联系．在进一步学习其他数学理论和解决实际问题时，也经常遇到多项式．虽然中学代数已经介绍过多项式，但对多项式的讨论侧重于多项式的运算，很少涉及多项式的理论．本章对多项式的理论做了比较深入、系统、全面的论述．

本章知识要点

一、数域

(1) 设P是由一些复数组成的集合，其中包括0与1．如果P中任意两个数(这两个数可以相同)的和、差、积、商(除数不为0)仍然是P中的数，那么就称P为一个数域．

注：数域是包含0与1在内，且关于加、减、乘、除(除数不为0)封闭的集合．

(2) 任何数域都包含有理数域Q．

注：实数域R与复数域C之间不存在其他的数域；有理数域Q与实数域R之间存在无穷多个数域．

二、一元多项式

1. 多项式的定义

形式表达式$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$($n$是非负整数)叫做数域$P$上的一元多项式．其中$a_0,a_1,\cdots,a_n$都是数域$P$中的数．如果$a_n\neq 0$，那么$a_nx^n$称为多项式的首项，$a_n$称为首项系数，$n$称为多项式的次数，记为$\partial(f(x))$．当$\partial(f(x))=0$时，即$a_n=\cdots=a_1=0,a_0\neq 0$，$f(x)$为零次多项式；当$f(x)=0$时，即$a_n=\cdots=a_1=a_0=0$，$f(x)$为零多项式．

注：零次多项式与零多项式的区别在于，零次多项式是非零常数，零多项式是0(也是常数)；前者有次数0，后者不定义次数．

2. 多项式相等

如果在多项式$f(x)$与$g(x)$中，除去系数为0的项外，同次项的系数全相等，那么$f(x)$与$g(x)$就称为相等，记为$f(x)=g(x)$.

注：(1) 两个多项式相等就是完全一样；

(2) $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0=0\Leftrightarrow a_i=0,i=0,1,\cdots,n.$

3. 运算律

多项式可进行加、减、乘、除四则运算，也满足一些运算律.

注：关于次数有$\partial(f(x)\pm g(x))\leqslant\max(\partial(f(x)),\partial(g(x)))$；$\partial(kf(x))=\partial(f(x))$，其中$k\neq0$；$\partial(f(x)g(x))=\partial(f(x))+\partial(g(x))$，其中$f(x)\neq0,g(x)\neq0$.

4. 一元多项式环

所有系数在数域P中的一元多项式的全体，称为数域P上的一元多项式环，记为$P[x]$. P称为系数域.

三、整除的概念

1. 带余除法的定义

对于$P[x]$中任意两个多项式$f(x)$与$g(x)$，其中$g(x)\neq0$，一定有$P[x]$中的多项式$q(x),r(x)$存在，使$f(x)=q(x)g(x)+r(x)$成立，其中$\partial(r(x))<\partial(g(x))$或者$r(x)=0$，并且这样的$q(x),r(x)$是惟一决定的. $q(x)$称为$g(x)$除$f(x)$的商，$r(x)$称为$g(x)$除$f(x)$的余式.

2. 整除的定义

数域P上的多项式$g(x)$称为整除$f(x)$，如果有数域P上的多项式$h(x)$使等式$f(x)=h(x)g(x)$成立. 此时，$g(x)$称为$f(x)$的因式，$f(x)$称为$g(x)$的倍式.

注：(1) $P[x]$中任意两个多项式$f(x)$与$g(x)$，其中$g(x)\neq0$，则$g(x)|f(x)$的充分必要条件是$g(x)$除$f(x)$的余式为零；

(2) 零多项式只能整除零多项式；任一多项式一定能整除它自身和零多项式；零次多项式能整除任一多项式；

(3) 两个多项式之间的整除关系不因系数域的扩大而改变.

3. 整除的性质

(1) $f(x)|g(x),g(x)|f(x)\Rightarrow f(x)=cg(x)$，其中$c\neq0$；

(2) $f(x)|g(x),g(x)|h(x)\Rightarrow f(x)|h(x)$；

(3) $f(x)|g_i(x)\Rightarrow f(x)|(u_1(x)g_1(x)+u_2(x)g_2(x)+\cdots+u_r(x)g_r(x))$，

$i=1,2,\cdots,r,u_i(x)$为任一多项式.

4. 有关计算

(1) 带余除法:用$g(x)$除$f(x)$得商$q(x)$和余式$r(x)$,即

$$\begin{array}{r|r|l} g(x) & f(x) & q(x) \\ & -q(x)g(x) & \\ \cline{2-2} & r(x) & \end{array}$$

(2) 综合除法:可很容易求出一次多项式$x-c$除任一多项式$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$所得的商式$q(x)$和余式$r(x)$,从而还可以判断是否$(x-c)\mid f(x)$.

$$\begin{array}{c|cccccc} c & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 & a_0 \\ & + & cb_{n-1} & cb_{n-2} & \cdots & cb_1 & cb_0 \\ \hline & (a_n=)b_{n-1} & b_{n-2} & b_{n-3} & \cdots & b_0 & c_0 \end{array}$$

从而$q(x)=b_{n-1}x^{n-1}+\cdots+b_1x+b_0,r(x)=c_0$.

四、最大公因式

1. 最大公因式的定义

多项式$p(x)\mid f(x),p(x)\mid g(x)$,则称$p(x)$是$f(x),g(x)$的一个公因式.设$d(x)$是多项式$f(x),g(x)$的一个公因式,若$d(x)$能被$f(x),g(x)$的每一公因式整除,则$d(x)$叫做$f(x),g(x)$的一个最大公因式.

注:(1) 任意两个多项式都有公因式,因为每个零次多项式都是它们的公因式;两个零多项式的最大公因式是0;

(2) 两个不全为零的多项式的最大公因式必是它们所有公因式中次数最高者;

(3) 多项式的最大公因式不是惟一的,至多相差一个非零的常数因子.用记号$(f(x),g(x))$表示两个不全为0的多项式的最高次首项系数为1的最大公因式;

(4) 最大公因式可以用辗转相除法求得,有时还可以用因式分解法,即

$$f(x)=ap_1^{\alpha_1}(x)p_2^{\alpha_2}(x)\cdots p_s^{\alpha_s}(x),\quad g(x)=bp_1^{\beta_1}(x)p_2^{\beta_2}(x)\cdots p_s^{\beta_s}(x),$$

其中,$p_i(x)$是首项系数为1的不可约多项式,a,b为常数,α_i,β_i为非零整数.令$\gamma_i=\min\{\alpha_i,\beta_i\}$,则

$$(f(x),g(x))=p_1^{\gamma_1}(x)p_2^{\gamma_2}(x)\cdots p_s^{\gamma_s}(x).$$

2. 有关性质

(1) 如果有等式$f(x)=q(x)g(x)+r(x)$成立，那么$f(x)$，$g(x)$和$g(x)$，$r(x)$有相同的公因式.

(2) 对于$P[x]$中两个多项式$f(x)$与$g(x)$，在$P[x]$中存在一个最大公因式$d(x)$，且$d(x)$可表成$f(x)$与$g(x)$的一个组合，即存在$u(x)$，$v(x)$使$d(x)=u(x)f(x)+v(x)g(x)$.

3. 互素

$P[x]$中两个多项式$f(x)$与$g(x)$，若$(f(x),g(x))=1$，则称$f(x)$与$g(x)$互素.

注：两个多项式互素不是它们无公因式，而是只有非零常数的公因式；零多项式与任一多项式都不互素.

4. 有关性质

(1) 设$f(x),g(x)\in P[x]$，则$(f(x),g(x))=1\Leftrightarrow\exists u(x),v(x)$使$u(x)f(x)+v(x)g(x)=1$.

注：还可由上述条件推出$(f(x),v(x))=(u(x),g(x))=(u(x),v(x))=1$；$(c,f(x))=1$，$c\neq 0$，$f(x)$是任一多项式.

(2) $f(x)\mid g(x)h(x)$，$(f(x),g(x))=1\Rightarrow f(x)\mid h(x)$.

(3) $f_1(x)\mid g(x)$，$f_2(x)\mid g(x)$，且$(f_1(x),f_2(x))=1$，则

$$(f_1(x)\cdot f_2(x))\mid g(x).$$

5. n个多项式的一个公因式

如果$h(x)$整除$f_1(x),f_2(x),\cdots,f_n(x)$ $(n>2)$中的每一个，那么$h(x)$叫做这n个多项式的一个公因式. 如果$f_1(x),f_2(x),\cdots,f_n(x)$的公因式$d(x)$能被这$n$个多项式的每一个公因式整除，那么$d(x)$叫做$f_1(x),f_2(x),\cdots,f_n(x)$的一个最大公因式.

注：两两互素可以得到全体互素，全体互素不一定是两两互素.

五、因式分解定理

1. 不可约多项式

数域P上次数$\geqslant 1$的多项式$p(x)$称为域P上的不可约多项式，如果它不能表成数域P上的两个次数比$p(x)$的次数低的多项式的乘积.

注：(1) 不可约多项式$p(x)$与任一多项式$f(x)$之间只能有两种关系：$p(x)\mid f(x)$或者$(p(x),f(x))=1$；

(2) 不可约多项式$p(x)$整除$f_1(x)f_2(x)\cdots f_s(x)$，那么$p(x)$至少可以整

除这些多项式中的一个；

(3) 一个多项式是否可约依赖于系数域.

2. 因式分解及惟一性定理

数域P上每一个次数$\geqslant 1$的多项式$f(x)$都可以惟一地分解成数域上一些不可约多项式的乘积. 如果有两个分解式：$f(x)=p_1(x)p_2(x)\cdots p_s(x)=q_1(x)q_2(x)\cdots q_t(x)$，那么必有$s=t$，并且适当排列因式的次序后有$p_i(x)=c_iq_i(x)$，$i=1,2,\cdots,s$.

3. 标准分解式

数域P上次数$\geqslant 1$的多项式$f(x)$的分解式：$f(x)=ap_1^{\gamma_1}(x)p_2^{\gamma_2}(x)\cdots p_s^{\gamma_s}(x)$叫做$f(x)$在数域$P$上的标准分解式，其中$a$是$f(x)$的首项系数，$p_i(x)$为首项系数是1的不可约多项式，而$\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_s$都是正整数.

六、重因式

1. 重因式

不可约多项式$p(x)$称为多项式$f(x)$的k重因式，如果$p^k(x)\mid f(x)$，而$p^{k+1}(x)$不能整除$f(x)$. 如果$k=1$，则称$p(x)$为$f(x)$的单因式；如果$k>1$，则称$p(x)$是$f(x)$的重因式.

2. 有关性质

(1) 不可约多项式$p(x)$是$f(x)$的k重因式($k>1$)，则$p(x)$是$f'(x)$的$k-1$重因式；

(2) 不可约多项式$p(x)$是$f(x)$的k重因式($k>1$)，则$p(x)$是$f(x)$，$f'(x),\cdots,f^{(k-1)}(x)$的因式，但不是$f^{(k)}(x)$的因式；

(3) 不可约多项式$p(x)$是$f(x)$的重因式$\Leftrightarrow p(x)\mid(f(x),f'(x))$；

(4) $f(x)$没有重因式$\Leftrightarrow(f(x),f'(x))=1$；

(5) 若$\partial(f(x))\geqslant 1$，则$\dfrac{f(x)}{(f(x),f'(x))}$没有重因式，但它与$f(x)$有完全相同的不可约因式.

注：这是去掉因式重数的有效办法.

3. 判断$f(x)$有无重因式的方法

(1) 由$f(x)$求$f'(x)$，求出$(f(x),f'(x))=d(x)$；

(2) 如果$d(x)=1$，那么$f(x)$无重因式；如果$d(x)\neq 1$，那么$d(x)$的每个不可约因式都是$f(x)$的重因式.

七、多项式函数

1. 余数定理

多项式$f(x)$被$x-c$除，所得的余数等于$f(c)$.

注：α是$f(x)$的根$\Leftrightarrow(x-\alpha)\mid f(x)$；若$x-\alpha$是$f(x)$的$k$重因式，则称$\alpha$是$f(x)=0$的$k$重根，当$k>1$时称为重根.

2. 性质

$P[x]$中n次多项式$(n\geqslant 0)$在数域P中的根不可能多于n个，重根按重数计算.

注：如果$\partial(f(x))\leqslant n$，$\partial(g(x))\leqslant n$，而$f(\alpha_i)=g(\alpha_i)(i=1,2,\cdots,n+1)$，那么$f(x)=g(x)$.

八、复系数与实系数多项式的因式分解

1. 代数基本定理

每个次数$\geqslant 1$的复系数多项式在复数域中有一根.

注：此定理可等价叙述为每个次数$\geqslant 1$的复系数多项式在复数域上一定有一个一次因式.

2. 复系数多项式因式分解定理

每个次数$\geqslant 1$的复系数多项式在复数域上都可以惟一地分解成一次因式的乘积.

注：复数域上只有一次多项式才是不可约的.

3. 多项式根与系数的关系

如果$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$是一个$n$次多项式，那么在复数域中$f(x)$有$n$个根$\alpha_1,\cdots,\alpha_n$，$f(x)$的根与系数之间的关系是

$$\begin{cases}\dfrac{a_{n-1}}{a_n}=-(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n),\\[2ex] \dfrac{a_{n-2}}{a_n}=\alpha_1\alpha_2+\cdots+\alpha_{n-1}\alpha_n,\\ \qquad\vdots\\ \dfrac{a_0}{a_n}=(-1)^n\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n.\end{cases}$$

4. 实系数根的特点

如果α是实系数多项式$f(x)$的一个复根，那么$\bar{\alpha}$也是$f(x)$的一个根.

注：实系数多项式的复根成对出现；奇次实系数多项式至少有一个实

根.

5. 实系数多项式因式分解定理

(1) 每个次数$\geqslant 1$的实系数多项式在实数域上都可以惟一地分解成一次因式与二次不可约因式的乘积.

注:实数域上不可约多项式只有一次和某些二次的因式.

(2) 实系数多项式具有标准分解式

$$f(x)=a_n(x-c_1)^{l_1}\cdots(x-c_s)^{l_s}(x^2+p_1x+q_1)^{k_1}\cdots(x^2+p_rx+q_r)^{k_r},$$

其中,$c_1,\cdots,c_s,p_1,\cdots,p_r,q_1,\cdots,q_r$全是实数,$l_1,\cdots,l_s,k_1,\cdots,k_r$是正整数,并且$x^2+p_ix+q_i$不可约,即适合条件$p_i^2-4q_i<0,i=1,2,\cdots,r$.

九、有理系数多项式

有理数域上任意次的不可约多项式都存在.

1. 本原多项式的定义

一个非零的整系数多项式,若其所有系数是互素的,则称$f(x)$是一个本原多项式.

注:两个本原多项式的乘积还是一个本原多项式.

如果一个非零的整系数多项式能够分解成两个次数较低的有理系数多项式的乘积,那么,它就一定能分解成两个次数较低的整系数多项式.

2. 艾森斯坦判别法

设$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$是一个整系数多项式,若能够找到一个素数$p$,使

(1) p不能整除a_n;

(2) $p|a_{n-1},\cdots,a_0$;

(3) p^2不能整除a_0.

那么,$f(x)$在有理数域上是不可约的.

3. 求整系数多项式的有理根的方法

设有整系数多项式$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$,则求其有理根的步骤为:

(1) 求出a_0和a_n的所有因数;

(2) 以a_0的因数作分母,a_n的因数作分子,写出所有可能的既约分数$\dfrac{u}{v}$;

(3) 对步骤(2)求出的分数$\frac{u}{v}$逐个进行检验,若$\frac{f(1)}{1-\frac{u}{v}}$与$\frac{f(1)}{1+\frac{u}{v}}$都是整数$\left(\left(1-\frac{u}{v}\right)\Big|f(1),\left(1+\frac{u}{v}\right)\Big|f(1)\right)$,则这个$\frac{u}{v}$有可能是$f(x)$的根;若两数不全为整数,则这个$\frac{u}{v}$就不会是$f(x)$的根;

(4) 对于经步骤(3)检验得到的所有$f(x)$的可能根$\frac{u}{v}$,用$x-\frac{u}{v}$去除$f(x)$(可用综合除法),若余数为零,则$\frac{u}{v}$是$f(x)$的根,否则$\frac{u}{v}$不是$f(x)$的根.

十、多元多项式

1. 多元多项式

(1) P 是数域,$x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是n 个文字,称形如$ax_1^{k_1}x_2^{k_2}\cdots x_n^{k_n}$ ($a\in P,k_i$ 为非负整数)的式子为n 元单项式. 若干个n 元单项式的代数和,称为n 元多项式. 当$n\geqslant 2$ 时,n 元多项式称为多元多项式.

注:n 元多项式的全体记为$P[x_1,x_2,\cdots,x_n]$.

(2) 若$a\neq 0$,令$m=k_1+k_2+\cdots+k_n$,则称单项式的次数为m. n 元多项式中各个单项式的次数的最高者,叫做此n 元多项式的次数.

注:若在一个多项式中,各单项式的次数都是m,则称此多项式为m 次齐次多项式.

2. 字典排列法

$ax_1^{k_1}x_2^{k_2}\cdots x_n^{k_n}$ 与$bx_1^{l_1}x_2^{l_2}\cdots x_n^{l_n}$ 为某一个n 元多项式的两项,当$k_1=l_1,\cdots,k_i=l_i,k_{i+1}>l_{n+1}$ ($i<n$)时,$ax_1^{k_1}x_2^{k_2}\cdots x_n^{k_n}$排在$bx_1^{l_1}x_2^{l_2}\cdots x_n^{l_n}$ 前面. 这样,在单项式之间就给出了一个先后次序的排法,这种排法称为字典排列法. 在字典排列法中,第一个系数不为零的单项式称为此多元多项式的首项.

注:多元多项式除按字典排列法外,还有按某一文字的降幂排列法.

两个n 元多项式$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$与$g(x_1,x_2,\cdots,x_n)$的乘积的首项等于这两个多项式首项的乘积. 特别地,两个非零多项式的乘积也不等于零.

注:两个非零多项式的乘积的次数等于这两个多项式次数的和.

十一、对称多项式

1. 对称多项式

若n 元多项式$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$对于任意的$i,j(1\leqslant i<j\leqslant n)$,都有

$$f(x_1,\cdots x_i,\cdots x_j,\cdots,x_n)=f(x_1,\cdots x_j,\cdots x_i,\cdots,x_n),$$