数学分析入门

楊　宗　磐

科　学　出　版　社

数学分析入门

楊宗磐

科 学 出 版 社

1 9 5 8

內 容 簡 介

作者在这本書里試圖清理一下入門阶段数学分析里学到的一些基本概念，目的要尽可能縮短入門書籍同近代著作之間的距离．內容分七章：集，实数及極限，点集，函数，微分法，积分法，复数分析等．有例及習題各一百多个，習題有提示．書末附名辭对照．只要学过一些大学一、二年級数学分析，尤其独学的讀者都可以用作参考．

数 学 分 析 入 門

楊 宗 磐 著

*

科 学 出 版 社 出 版（北京朝陽門大街117号）

北京市書刊出版業營業許可證出字第061号

中国科学院印刷厂印刷　新华書店总經售

*

1958年9月第一版　　書号：1392　字数：322,000

1959年9月第二次印刷　　开本：787×1092 1/18

（京）4,046—6,645　　印張：17

定价：（10）2.40元

序

这本書倘若对讀者有了一些用处，作者願意同讀者一起感謝党和毛主席，因为党給带来了这样的时代，不然这本書是不会同讀者見面的。这本書是将 1943 年以来經四、五次大改写的講授笔記最后修訂成的。当时的願望是为学者，同时作者自己也一起，清理一下基础概念，以为进一步学習的阶梯。十余年来，很多同志賜教了宝貴的意見，作者也貢献了可能付出的精力，千虑中或有一得，为学習入門阶段基础概念的参考似乎也还有些用处。特别对于独学之士，及以往学过、久置遺忘而目前重理旧業的人，或許有些"帮助"。打算看一看入門概念初学的人如何难于接受，也許有用，因为作者在本書里合盘托出了自己如何迂迴地試圖了解这些入門概念的願望。

清理入門概念，鵠的如此，焉敢遽言企及，不过給內容带来了取舍。大体說，只考虑了函数个体的問題；举凡函数关系，有关应用的問題均未涉及，一則限于作者能力，二則作者認为这些是进一步的；作者决非輕視这些，故意使数学分析入門簡单化，概念化；相反地，为了更好地学習这些，作者以为必須将比較单純的問題認眞地考虑一番才行。例如，在作者学習过程中，遇到上極限有各种定义方式，如果在 Dedekind 無理数論系統里看，很难断定用分划的定义方式不一定比其它方式"优先"些。既是这样，不在 Dedekind 無理数論系統里，反过来，在具体的实数系里，看看与 Dedekind 分划平行的命題有些什么？这样一来，不但上極限定义方式的問題有了解决，同时还能看出在比較一般的系統里，起着重要作用（未必同値）的性質，竟是实数系里（同値）性質的發展。作者以为这样，对进一步学習是有益的。这想法就决定了应当根据这样一个原則：材料要具体，討論要深入，不祖述一家，而融会各說。所以通篇离不开实数、复数、欧氏空間。至于討論的項目呢？实数、复数、函数不必說，或則函数定义域值域的点集的几何性質，或則数学分析的基本运算方法，一共选了如目次中每章标題所說的七項。每項的內容，又限定在每节标題所說的样子。虽是因为本書是入門，范圍狭仄，实际决定性的原因是作者識見局促，所見甚淺，有以致之的。上面提出的原則，也只作了一半，即討論流于表面，难免堆砌，未能水乳，挂一漏万。作者沒有見过，沒有体会出的东西太多了；不过提出来作为作者自勉的指标，是沒有不可以的。

列宁对于数学的光輝指示說："就是初等数学也充滿着矛盾"；毛主席的英明教导說："科学研究的区分，就是根据科学对象所具有的特殊的矛盾性"(見选集，第二卷，775頁)。1947年 П. С. Александров 指出純粹及应用数学的有机融合，抽象及具体数学的辯証統一是苏維埃数学的本質。1951年 А. Д. Александров 特别提出了离散性同連續性的对立来証明列宁的不朽思想。按这些指示同啓發，数学分析入門里，应当怎样抓住它的特殊性呢？据作者的管窺，应当着重地将离散性同連續性作为它的基本矛盾。在这里，采取了完全归納法为离散性的表現(見豫篇)。首先，由有穷、無穷的对立产生了超穷归納法(§1.4)。其次，用極限的概念代替自某阶段起相等，上(下)确界代替最大(小)数，这样由离散性發展为(实数的)連續性(§2.1)。以上这些都是在全序性成立的条件下得到的結果。一旦連續性确立之后，全序性及其对立成为主要的問題，換言之，就是一維与高維空間(狭义的)对立的表現(見 Klein [1]，卷一，286—287頁)。为了克服这个困难，由欧氏計量出發引进拓扑对应，到达了欧氏空間的連續性表現：列紧性及通性(§§3.3—3.4)。完全归納法在有穷运算領域相互之間的变換研究里起决定性的作用，是周知的。同样，連續性在極限运算里也起决定性的作用。不过首先处理的是离散定义域的变換(§2.2)，然后，由离散变动过渡到連續变动，提出几种基本变換由連續性所影响的性質(§§4.1—4.2)。在§4.4，特别处理全序性成立条件之下的由連續性所規定的变換的性質。由这些，首先将一般計量空間的連續变动，又复改为全序性的变动；其次，由具体例引出半序性，将沒有全序性的連續变动提高到半序性連續变动，亦即目前極限的"最高"形式——Moore-Smith-Шатуновский 極限。在这概念里，序性，不过是半序性，又复轉化为主导的地位。虽然分别在§4.1，§4.4 已經提出考虑函数的两个着重点：局部性質同全体性質，在第五章、第六章更提出两个基本运算方法，并且突出地显示出上(下)極限在微分法(局部性質)，上(下)确界在积分法(全体性質)的效能。微分法及积分法是有名的对立概念，在第六章举例說明一般情形原函数与积分并不一致。解决的方法，目前有二：一則提高积分理論，另則加强函数性質。今則采取后者，即 §7.4 的解析函数，这样，不但可微性及可积性对单通域的一意函数得到一致，并且得到連續性的(几何)表現之一——通性——所起的重要作用。同时第七章还略示函数値域全序性不成立时的初步情形，最后以空間(C)不能滿足离散性的又一表現——有穷連鎖律——結束(例7·4·4)。

Zermelo 公理，自1904年提出以来，就成了爭論的对象，直到如今不断。作者同意波兰学派宗师 Sierpiński 的态度，他是非用不可的时候就用，能不用的时候不

用，尽可能看是否可以不用。作者認为这不是二元論，而是面对現实的态度。通常总以为 Zermelo 公理只牽涉高深繁难的問題，多年来作者的体会却不然。硬去掉的人不是沒有(如 Vallée Poussin, de la [1])，这种观点与直观学派的原始态度有些相象，說服力不强。并且越来越使作者相信 Zermelo 公理是完全归納法的發展。以上略陈作者的愚見，自知膚淺不足道，但作者願意提出来，請讀者指正。

本書的預备知識，只假定赵訪熊[1]，叙述虽是尽作者力所能及求其詳明(有錯在外)，但仍要求讀者一定的努力。閱讀中偶尔需要赵 [1] 以外的都附了最經見的書籍。考虑到 Натансон [1]，Фихтенгольц [1] 一定在讀者座右，所以引用的机会特别多。为了帮助了解本文，約有 178 个例，130 个習題。有些例及習題，初次閱讀时可以略去。又为独学着想，篇末附有習題提示，有的作得很詳細，不过仅供参考，希望讀者不先看它，自己作出更好的来，所說的解法也未必对，即使对也未必是最好的。总注在初次閱讀时也可略去。参考文献只列举了与本書有直接关系的或繕写时参考过的。作者沒有見过的，或关系不直接的好文章多的很，無法一一收录了。讀者稍稍注意，就看出来本書的內容是古典的，在参考文献里都可以找到。但是在有些地方，作者也还是花了不少的心思，这些地方还希望讀者能不憚煩地賜教才好。

回想起在黑暗的日子里，業师曾远荣教授，前輩程廷熙教授，余介石教授給作者很大的鼓励；畏友張庆芳副教授不但从本書雛型到这次完稿始終关怀，給作者很多的宝貴意見，而且在困难时期为作者抄录供給了不少的文献；1955 年業师华罗庚教授，学长关肇直研究員向科学出版社推荐出版；北京大学数学力学系圖書室彭清杰同志，数学研究所圖書室郑坤常同志，以及南开大学圖書館，数学系資料室的汪俊青等位同志对作者一再优容給作者借閱的方便；出版社的編輯同志，印刷厂的工人同志都以一貫的合作态度，提出宝貴意見去掉了不少錯誤，滿足了作者的麻煩要求并且力使版面美观；爱人錢亚愼十余年来，对作者的工作有極大的理解，为作者尽力創造些条件，安排时間，这次完稿时更为作者編纂索引清繕底稿核对校样；要不是这些位的鼓励和帮助，这本書的出版还是不可能的。作者在这里謹致謝意。

一九五八年夏　楊宗磐識

凡　例

1) § 2.1 表示第二章第一节.

2) 定理 3·1·1 (或例 3·1·1) 表示第三章第一节第一定理(例).

3) 文句中字的右肩有⑫符号的地方表示見总注⑫.

4) 参考文献分为三部分. 国內著作,按著者姓名笔划排列;苏联著作,按著者姓名 А, Б, В 排列;其他国家著作,則按著者姓名 A, B, C 排列. 例如赵訪熊[1], Натансон[1], Klein[1]分見各該部分.

5) 書中名辞尽可能采取标准通用的. 書后名辞对照、索引按笔划排列, 同一笔划中則按ㄅ, ㄆ, ㄇ 排列. 外文对照作者有找不到恰当对应的,暫付闕如,并不是該种外文里沒有; 有些是作为索引無須乎再注外文的. 另一部分索引是按拉丁字母排列的.

目　次

豫　篇

希望讀者有的預备知識是：

I. 自然数、有理整数、有理数、实数（用十进法）的定义、其运算法則及实数的十以外的进法表示。数系的公理建設与本篇無关。

II. 坐标概念。

III. 經常用的形式邏輯上的几件事①：

所謂“定理”就是像：

若命題甲，則命題乙；或由甲得乙　　　　(1)

这样表示命題間关系的命題，并且足以保証它成立。例如

	(甲)	(乙)	
	等边三角形，	其內角全相等。	(2)
	等边三角形 ABC，	其两边 $AB=AC$。	(3)

对于(1)，作

若命題乙，則命題甲。　　　　(4)

叫(4)作(1)的“反理”。一般(1)虽成立，而(4)未必成立。例如，由(3)所作的反理就不成立；成立的也有，例如由(2)所作的反理。这样的反理，叫作“反定理”。

命題甲的“否定”写作“非甲”，例如

命題：等边三角形，它的否定：至少有两边不等的三角形。

对于(1)，作

由非乙得非甲。　　　　(5)

叫(5)作(1)的“逆否”，例如

(2)的逆否：內角不全等的三角形，不是等边三角形；

(3)的逆否：$AB\neq AC$ 的 $\triangle ABC$，不是等边三角形。

非甲的否定，我們公認为就是原来的甲。所以(1)就是(5)的逆否。(1)成立，則公認为(5)必成立；同样，(5)成立，則公認为(1)必成立。

在(1)，甲又叫作定理(1)的“假設”，乙是它的“終結”。所謂“証明”就是由假設用邏輯推断終結成立的过程。由以上說明，任何定理的証明方法，只有两种：

i) 由假設出發，逐步推論，得出終結，所謂“直接証明”。

ii) 否定終結的成立，逐步推論，引出新命題，得出矛盾。所謂得出矛盾，約分三种形式，即新命題或与定理的假設冲突，或与其它已知事实冲突，或与临时假定(終結的否定，或是于推論时引出的命題)冲突。这种方式的証明，統叫作“間接証明”或“归謬法”。以第一种情形最为普遍。

例 1. 归謬法的三种例.

i) 由 $\triangle ABC$ 的两頂点 B, C 向对边任引綫段 BD, CE. 两綫段决不在其交点 O 互相平分.

証：設 BD, CE 在 O 互相平分，則四边形 $EBCD$ 是平行四边形. 所以 $BE//CD$，不得有交点 A. (証完)

ii) $x//y$, $z\neq x$ 且与 x 相交，則 z 亦交于 y.

証：称 x, z 的交点是 O，若 z 不交于 y，則 $z//y$，是通过点 O 有两个直綫平行于 y. (証完)

iii) 梯形 $ABCD$ 的两底边 AD, BC 的中点叫作 M, N. 則直綫 BA, CD, NM 相交于一点.

証：設 BA, NM 的交点是 O；CD, NM 的交点是 O', $O\neq O'$.

在 $\triangle OBN$，因为 $AM//BN$，故 $OM:ON=AM:BN$.

在 $\triangle O'NC$，因为 $MD//NC$，故 $O'M:O'N=MD:NC$.

但据假設 $AM=NO$, $BN=NC$，由上两式推出 $OM:ON=O'M:O'N$.

这表示 O, O' 是 MN 的相同的外分点，只应有一个.(証完)

假設、終結二者之間的关系，又常用下面那样說法。在(1)，甲是乙的充分条件，或乙是甲的必要条件。在(4)，乙是甲的充分条件，或甲是乙的必要条件。命題同它的反理，若能同时成立，我們說：甲(乙)是乙(甲)的充分必要(或簡作充要)条件。这样的两个命題叫作同值。同值两命題的內容是相同的。

IV. 自然数基本性質之一. 下列四个命題是同值的：

A) 完全(或有穷)归納法：每一个自然数 n，对应一个命題 $P(n)$. $P(1)$ 眞，任給 k，若 $P(k)$ 眞，則 $P(k+1)$ 眞. 于是 $P(n)$ 均眞.

B) 完全归納法第二形式：每一个自然数 n，对应一个命題 $P(n)$. $P(1)$ 眞，任給 m，若所有 $k<m$ 所对应的 $P(k)$ 均眞，則 $P(m)$ 亦眞. 于是 $P(n)$ 均眞.

C) 良序原則：自然数的一部分，只要有数，必有一个最小数在这部分里.

D) 自然数的一部分，只要有数，若全部都較某固定数小或相等的时候，这部分里一定有一个最大数.

証：A)$\Longrightarrow$B)②

1) 作命題 $Q(k)$：任給自然数 k，只有有穷个(參看 §1.3)自然数滿足

$$k_1<k_2<\cdots<k_j<k,$$

$Q(1)$显然成立．今設$Q(n)$成立，往証$Q(n+1)$也成立．注意沒有自然数a滿足$n<a<n+1$．因之，

$$n_1<n_2<\cdots<n_l<n$$

的时候，可令$n=n_{l+1}$．于是，得$n_1<n_2<\cdots<n_{l+1}<n+1$．由A)，得所欲証．

2) 倘B)不成立，于是有$P(n')$不眞．由B)的假設，有$m<n'$，使$P(m)$不眞．由1)，使$P(m)(m<n')$不眞的自然数可写如

$$n_1<n_2<\cdots<n_i<n'.$$

$n_1\neq1$．但按n_1的定义，$P(k)(k<n_1)$均眞．由B)的假設，$P(n_1)$也眞，与n_1的定义不合．

B)$\Longrightarrow$C)

1) 肯定任一自然数$\geqq1$．

2) 作命題$P(n)$：自然数的一部分，含一数$\leqq n$，必有一个最小数在这部分里．

由1)，$P(1)$成立．

任給$m>1$．設已知$P(k)(k<m)$成立．只須討論該部分含一数$\leqq m$，而不含任何数$\leqq k(k<m)$情形就可以．否則已由$P(k)$得証．但这时候的最小数就是m，也就是說$P(m)$成立．由B)得所欲証．

C)$\Longrightarrow$D)

在比这已給部分里的数全部都大或相等的自然数里，按C)，有最小数，叫作n_0．n_0就是欲求的最大数．

D)$\Longrightarrow$A)

設A)不成立．于是有n'使$P(n')$不眞．比n'小而能使$P(n')$成立的自然数里，按D)，有最大数n_0，并且$P(n_0)$眞．而$P(n_0+1)$不眞．与A)的假設不合，所以A)应成立．（証完）

例2. 完全归納法証命題的例．

$a_1,a_2,\cdots,a_n$是正数，則$\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}\leqq\frac{1}{n}(a_1+a_2+\cdots+a_n)$．这里除$n=1$之外，等号只限于$a_1=a_2=\cdots=a_n$．

証1：$n=1,2$时显然命題是正确的．設$n=k$时成立，于是$n=2k$的时候，

$$\sqrt[2k]{a_1a_2\cdots a_{2k}}=\left(\sqrt[k]{a_1\cdots a_k}\sqrt[k]{a_{k+1}\cdots a_{2k}}\right)^{\frac{1}{2}}\leqq\frac{1}{2}\left(\sqrt[k]{a_1\cdots a_k}+\sqrt[k]{a_{k+1}\cdots a_{2k}}\right)\leqq$$

$$\leqq\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}a_i+\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}a_{k+i}\right)=\frac{1}{2k}\sum_{i=1}^{2k}a_i.$$

次証$n=k$时成立，則$n=k-1$时也成立．在

$$\sqrt[k]{a_1\cdots a_{k-1}\lambda}\leqq\frac{1}{k}(a_1+\cdots+a_{k-1}+\lambda),$$

令 λ 适合

$$\frac{1}{k}(a_1+\cdots+a_{k-1}+\lambda)=\frac{1}{k-1}(a_1+\cdots+a_{k-1}),$$

得 $\lambda=\frac{1}{k-1}(a_1+\cdots+a_{k-1})$. 将 λ 代入后計算之即可.

为了証明第二部分，将問題形式稍加变更. 設 $g=\sqrt[n]{a_1\cdots a_n}$，用 g 除欲証的不等式的两端，得：正数 $a_1\cdots a_n=1$ 的时候，

$$\sum_{i=1}^{n}a_i\geqq 1,$$

等号只限于 $a_1=\cdots=a_n=1$.

設 $n=k$ 时成立. 若 $a_1=a_2=\cdots=a_{k+1}=1$，則不必証. 因此，不妨設 $a_1<1, a_2>1$. 由 $a_1+\cdots+a_{k+1}=k+1$，得

$$(a_1+a_2-1)+a_3+\cdots+a_{k+1}=k\leqq(a_1a_2)+a_3+\cdots+a_{k+1},$$

若这里等号成立，則証完. 若等号不成立，則 $a_1a_2>a_1+a_2-1$ 与 $a_1<1, a_2>1$ 冲突.

証 2： 兹証变更后的形式. 設 $n=k(\geqq 2)$ 时成立，往証

$$a_1+a_2+\cdots+a_{k+1}\geqq k+1.$$

$a_1=a_2=\cdots=a_{k+1}=1$ 时，則不必証. 因此，不妨設 $a_1<1,\ a_{k+1}>1$. 根据归納假設 $a_1a_{k+1}+a_2+\cdots+a_k\geqq k$，所以

$$a_1+a_2+\cdots+a_{k+1}=[(a_1a_{k+1})+a_2+\cdots+a_k]+a_{k+1}+a_1-(a_1a_{k+1})\geqq$$
$$\geqq k+1-1+a_{k+1}+a_1-(a_1a_{k+1})=k+1+(1-a_1)(a_{k+1}-1)>k+1.\text{（証完）}$$

注：以上告訴我們，依据的原理尽管一样，步驟可以不同. 关于第一証法参看上述A)$\Longrightarrow$B)的1).

V. E. Zermelo 公理（或称一般选出原則）

任給不空集系 $\mathfrak{M}=\{M\}$，必有一个集 N，N 与每个 M 共有一个元.

这里所用名詞，具見本文，关于公理的論述，超出本書范圍以外，录此仅喚起注意而已；但希望讀者通过本文中公理的簡单应用，初步地了解公理的作用. 例如在定理 3·3·2，就是作 $\mathfrak{M}=\{A_n\backslash A_{n+1}|n=1,2,3,\cdots\}$，由公理保証了 $N=\{p_n\}$ 的存在.

第一章　集

§1.1　集的基本运算

据 G. Cantor，集是由总括某些个体成一个整体而产生的；对于每个个体，只設其可为思考对象，辨别它的异同，个体之間并不須要有任何关系。这里不是集的定义，因为按現在这个解釋，能得出許多形式邏輯的矛盾；避免矛盾的講法又不适于初学③，所以只采取这朴素(naiv)观点，約略說明集的涵义。所謂总括，不指行为，只指結果。簡单地說，集就是"烏合之众"，不考虑是怎样"烏合"起来的。"众"可以具体，可以抽象。譬如国民党反动軍队，只看作是有某种标志的武装人員的集的时候，則不考虑是拉夫来的或者是怎样湊起来的，这个就很具体。譬如正有理数集就非常抽象。

所謂某些，当然有一定的取舍，因此，任一个体 a 与集 A 之間，有两种关系：

a 屬于 A	用符号	$a\in A$	表示。
a 不屬于 A		$a\notin A$ 或 $a\bar{\in} A$	

这关系确定后，集就看作是"存在"，或集已被"定义妥貼"。确定的方法，則多憑概念性的命題。例如"1956 年的帝国主义国家"，就确定了如美国、英国等国家。又如"自然数中的虛数"，这是不会有的。为方便起見，不含个体的集，叫作空集，以 $\emptyset$ 或 0 或 Λ 表示。所以上述第二个命題所規定的虛数集是空集。集旣由所含个体确定，所以有时将它明白写出。例如：

自然数集：$N=\{1,2,3,\cdots,n,\cdots\}$；

1，10 間的奇数集：$O=\{1,3,5,7,9\}$。

个体 $2\notin O$，$2\in N$。

屬于 A 的个体，又叫作 A 的元。

任两集 A,B 之間，有下面四种关系：

i) A 的元均含于 B，叫作 A 含于 B，或 B 含 A。用 $A\subset B$ (約定 $B\supset A$ 的代表意义与 $A\subset B$ 同)或 $A\subseteq B$(約定 $B\supseteq A$ 的代表意义与 $A\subseteq B$ 同)表示。

ii) B 的元均含于 A，叫作 B 含于 A，或 A 含 B。

iii) i)，ii)同时成立，則称 A,B 相等，用 $A=B$ 表示。所以，$A=B$ 只是 $A\subset B$，

$B\subset A$ 同时成立的又一个表示。

iv) 有 $a\in A$ 而 $a\notin B$, 同时又有 $b\in B$ 而 $b\notin A$.

例如, 令 A 是上述的 O, B 是上述的 N, 則滿足关系 i); $A=N$, 而 $B=\{-9, -8, \cdots, 0, 1, 2, \cdots, 9\}$, 則两集間的关系是 iv).

若 B 含 A, 則称 B 为 A 的上集, A 为 B 的子集或下集. 若知道确有一个 $b\in B$ 而 $b\notin A$ 則叫 B 是 A 的眞上集, A 是 B 的眞子集. 我們約定空集是任何一个集的子集. 用这些名詞, 例如豫篇的良序原則就可以說成:

自然数集的任一不空子集必有最小数.

注: 虽如上述, 給了一个明显地可以認为定义妥貼的集, 如有理数集, 而問一个数, 例如 Euler 常数 C, 是否屬于它, 有时很困难, 甚至于在目前情况还無法回答. 又集的元也不一定能明白地写出来, 例如 Гольдбах 假設如成立, 則集 A 由数 0 組成, 不然則由数 1 組成, 在目前情况, 虽集 A 只由一个元构成但不能明白地写出来. Гольдбах 問題也可以解釋成大于 2 的偶数集 B 与可写成两素数之和的偶数集 C 是否相等. 这两个集 B, C 定义都很明确, 但 $B=C$ 是否成立, 在目前还不知道. $C\subset B$ 是显然的, 因此 Гольдбах 問題即問 $B\backslash C$ (符号意义見下) 是否是空集. 这就是說, 不能低估空集, 由一个元构成的集的复杂性.

由 B 去掉屬于 A 的元, 所剩下的叫作 B 中 A 的余集. 以符号 $B\backslash A$ 或 $B-A$ 表示. 作 $B\backslash A$ 又称作差. 应当注意的是作差的时候, 两集 A, B 之間并不須要有什么关系, 例如 B 是 A 的上集等等. 讀者更不要同数的减法相混, 無所謂"負"集, $B\backslash A=\emptyset$ 也未必 $B=A$.

例 1·1·1 $A=\{1,3,5,7,9\}$, $B=\{1,2,3,4\}$ 的时候, $A\backslash B=\{5,7,9\}$, $B\backslash A=\{2,4\}$.

併(有旁). 屬于 A 或屬于 B 的元 (屬于 A 而不屬于 B, 屬于 A 同时屬于 B, 屬于 B 而不屬于 A) 所成的集, 叫作 A, B 的併. 以 $A\cup B$ 或 $A+B$ 表示.

例 1·1·2 $A=\{1,2,3,4,5\}$, $B=\{1,3,5,7,9\}$ 的时候, $A\cup B=\{1,2,3,4,5,7,9\}$ (1, 3, 5 幷不数两次!).

交(有旁). 旣屬于 A 又屬于 B 的元所成的集, 叫作 A, B 的交. 以 $A\cap B$, $A\cdot B$ 或 AB 表示.

例 1·1·3 $A=\{$偶数$\}$, $B=\{$奇数$\}$, 則 $A\cap B=\emptyset$, $A\backslash B=A$.

併或用 $\bigcup\limits_{i=1}^{2} A_i$, $\sum\limits_{i=1}^{2} A_i$, 交或用 $\bigcap\limits_{i=1}^{2} A_i$, $\prod\limits_{i=1}^{2} A_i$ 表示, 当然这是每个集都有足碼的时候才可以. 两种运算滿足:

i) 交换、締合及分配律:

$$A\cup B=B\cup A, \qquad A\cap B=B\cap A,$$

$$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C), \qquad (A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C),$$

$$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C),\quad (A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C).$$

只証末一等式．任取 $x\in(A\cap B)\cup C$, 按定义 $x\in A\cap B$, 所以既 $x\in A$ 又 $x\in B$。今 $A\subset A\cup C, B\subset B\cup C$, 所以, $x\in A\cup C$, 同时 $x\in B\cup C$, 即

$$x\in(A\cup C)\cap(B\cup C).$$

或 $x\in C$。今 $C\subset A\cup C, C\subset B\cup C$, 所以

$$x\in(A\cup C)\cap(B\cup C).$$

总之,

$$(A\cap B)\cup C\subset(A\cup C)\cap(B\cup C).\tag{1}$$

次任取 $y\in(A\cup C)\cap(B\cup C)$, 即 y 同时屬于 $A\cup C, B\cup C$。得四种情形:

a) $y\in A$ 同时 $y\in B$, 于是 $y\in A\cap B\subset(A\cap B)\cup C$.

$$\left.\begin{array}{l}\text{b) } y\in C \text{ 同时 } y\in B\\ \text{c) } y\in A \text{ 同时 } y\in C\\ \text{d) } y\in C\end{array}\right\}\text{, 都 } y\in C\text{。于是 } y\in(A\cap B)\cup C.$$

总之,

$$(A\cup C)\cap(B\cup C)\subset(A\cap B)\cup C.\tag{2}$$

合(1), (2), 按相等定义, 得所欲証。

ii) A. de Morgan 定律:

A_1, A_2 同为 E 的子集, 設 $B_1=E\backslash A_1, B_2=E\backslash A_2$, 则

$$E=\left(\bigcup_{i=1}^{2}A_i\right)\cup\left(\bigcap_{i=1}^{2}B_i\right)=\left(\bigcap_{i=1}^{2}A_i\right)\cup\left(\bigcup_{i=1}^{2}B_i\right).$$

只証第一个等式．$A_i, B_i\,(i=1,2)$ 都是 E 的子集, $E\supset\left(\bigcup_{i=1}^{2}A_i\right)\cup\left(\bigcap_{i=1}^{2}B_i\right)$ 已明显。今任取 $x\in E$, 得下列三种情形:

a) $x\in A_1$。因为 $A_1\subset A_1\cup A_2\subset(A_1\cup A_2)\cup(B_1\cap B_2)$。所以 x 屬于右端。

b) $x\in A_2$。同 a)。

c) $x\notin A_1$ 同时 $x\notin A_2$。于是按定义, $x\in B_1$ 同时 $x\in B_2$。也就是 $x\in B_1\cap B_2\subset(A_1\cup A_2)\cup(B_1\cap B_2)$。(証完)

由 de Morgan 定律, 得

$$E\backslash(A_1\cup A_2)=(E\backslash A_1)\cap(E\backslash A_2),$$

$$E\backslash(A_1\cap A_2)=(E\backslash A_1)\cup(E\backslash A_2).$$

以上二式作为練習。

以上所說併、交及諸律可推广到任意个集. 有穷个的时候,可以利用有穷归納法. 不然的时候,可以仿上独立地定义它. 例如有集 $A_n(n=1,2,3,\cdots)$, $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ 的意思是屬于每个 A_n 的元所成的集. (注意不要将 $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ 仿有穷情形拆开加以解釋,說成 $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = A_1 \cap \cdots \cap A_n \cap \cdots \cap A_\infty$ 是錯誤的,因为沒有 A_∞!) 这叫作無穷运算(参看 §4.1 末). 以后用併、交两字时,不一一区别其为有穷或非有穷(关于有穷見 §1.3).

習 題

1) 証:

$$A\backslash(B\cup C)=(A\backslash B)\backslash C, \qquad (A\cup B)\backslash C=(A\backslash C)\cup(B\backslash C),$$
$$(A\cap B)\backslash C=(A\backslash C)\cap(B\backslash C), \qquad A\cap B=B\backslash\{(A\cup B)\backslash A\}.$$

2) 下列各式恒成立否?

$$(A\backslash B)\cup C=A\backslash(B\backslash C), \qquad (A\backslash B)\cup B=A.$$

3) 証: 任給 A_n $(n=1,2,3,\cdots)$, 作 $A'_n=\bigcap_{j=1}^{n} A_j$, 于是 $A'_n \supset A'_{n+1}$, $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n=\bigcap_{n=1}^{\infty} A'_n$, $\bigcap_{n=1}^{\infty} A'_n=A'_1\backslash\{(A'_1\backslash A'_2)\cup(A'_2\backslash A'_3)\cup\cdots\cup(A'_n\backslash A'_{n+1})\cup\cdots\}=A'_1\backslash\bigcup_{n=1}^{\infty}(A'_n\backslash A'_{n+1})$.

4) 証:

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}\{(A_n\cap X)\cup B_n\}=\{X\cap\bigcap_{n=1}^{\infty}(A_n\cup B_n)\}\cup\bigcap_{n=1}^{\infty}B_n.$$

§1.2 序 对

有两集 A, B. 由 A, B 的元作序对 (a, b), a, b 的前后順序不得变动 $(a\in A, b\in B)$. 两个序对的相等定义是

$$a=a', b=b' \text{ 时且只此时 } (a,b)=(a',b').$$

注意 (a,b) 与 §1.1 的 $\{a,b\}$ 不同.

例 1·2·1 平面点的坐标,复数都是实数序对.

設 P 为序对的集. 任取 $(a,b)\in P$. 叫 b 为 a 的像, a 为 b 的原像. 由 P 所确定的 A, B 的子集 A_1, B_1 之間的关系,叫作自 A_1 至 B_1 上的变换,或函数,或叫作自 A_1 至 B 中的变换. 若每个 a 只有一个像 b, 用符号 $b=f(a)$ 表示这个关系,叫 f 作在 A_1 定义(或定义于 A_1)的一意函数,叫 A_1 作 f 的定义域, B_1 或 B 作 f 的值域. 若 b 更只有一个原像,再用符号 $a=g(b)$ 表示这个关系. 于是,得一个在 B_1 定义的一