轨迹

GUIJI

轨　迹

赵慈庚　陈荷生

陕西人民出版社

轨 迹

赵慈庚 陈荷生

陕西人民教育出版社出版发行

（西安长安南路吴家坟）

安康印刷厂印刷

787×1092毫米 1/32开本 3.25印张 65千字

1988年6月第1版 1988年6月第1次印刷

印数：1—1.000

ISBN 7—5419—0392—2/G·335

定 价：0.90元

编 者 的 话

许多人以为数学难学。数学书籍的文字障碍可能是原因之一，它不象文学语言那样琅琅上口，字里行间还夹杂些路障似的符号，几乎一句一步推理，让你的思想不得顷刻放松，这都是难学的原因。几十年前我们曾想把数学编得象小说那样，尽管不够严肃，但能使读者方便，不也是可行的吗！

一九八〇年，我们按这想法尝试着将难度集中的轨迹问题写了这个小册子。轨迹理论在中学课本里几乎没有了，而用点集定义轨迹的理法贯穿到解析几何以至函数理论，学生早日取得一点这样知识是有好处的，这是写这小册子的一个意图。

大家都说教书要注意基本训练，到底如何训练才可以打好基础？答案又莫衷一是。本书二、三两节，大都是傅种孙先生《高中平面几何》的素材。这里包含着这位数学教育家对基本训练的苦心孤诣，我们愿意把这些经验介绍给中学教师作为借鉴。这是写这书的主要意图。

这些想法是否对头？让青年在这方面耗费精力，也会使人怀疑是否值得？我们都不敢自信。陕西人民教育出版社，在保存文化原貌的原则上不惜工本，使这小册子出版，我们表示感谢。

赵慈庚　陈荷生

一九八七、十二、廿四。

引　　言

——你怎么踢的那样准？

操场的墙上涂着一片直径三尺的白灰圆片，上面写的标语已经脱落了。高爽在地面上离墙脚十米的地方放一个皮球，噔地一脚把球向墙踢去，正好打在这片白灰上，一连几次都这样。王保踢了几次，总也打不中这片白灰。于是他问高爽："怎么这球那样听你脚的指使，而不听我这脚的命令"？高爽说："我也说不清其中有什么道理，反正踢去的方向和用力的大小都有关系。这两个因素配合得适当，就能使球打中目标"。

他们去问张老师，老师说高爽的话有道理，把炮弹的初速度和发射角调整好，就能打中几公里外的目标。只凭最初的速度（包括发射角）加上自然条件的约束，就能把炮弹的运动路线完全确定。飞机投射炸弹，夜间天空的流星，都不外乎是这样运行的。将来你们学了物理学就会明白。

天体都在几乎不变的条件下运行，于是它们才有固定的轨道。人们认识了这类轨道，就能预报日蚀、月蚀、彗星出没等现象。人们又依照这种原理发射导弹和人造卫星。那么掌握物体运动的路线，便是人类生活中值得注意的一件事情。把问题抽象起来，可以粗略地说，一个动点在运动中经过的一切位置，集合起来就是这一点的运动路线，路线是由动点的无穷多位置组成的。这动点在运动之中，一直满足某种条

件；也正是这条件约束着动点使它走成一定形状的路线。在几何学里，这属于轨迹问题。

张老师接着又说：我们在数学课本里已经学了一点简单的轨迹，但是以后不少地方要用轨迹的理论，应该再深入地学一下，我看可以作为我们数学小组的一个讨论专题。那么告诉大家，明天就开始吧。

第二天到了小组活动时间，教室里静悄悄地坐着二十几个数学小组的同学。张老师走进来和大家坐在一起，先把昨天对高爽和王保说的话重述一遍，把问题归到轨迹上去。最后说，为了把轨迹理论说得透澈，需要复习几个学过的概念。

平时不多说话的艾真，听课一贯认真，他把各次小组讨论的内容都记下来了。下边是他写了之后经过老师修改的笔记。

目　录

§4. 轨迹问题

§5. 用轨迹定理解轨迹问题

§6. 轨迹的应用

§7. 解析几何的轨迹

§1. 预备知识

1.1 甜的必然是蜂蜜吗？

数学里时常用到“必要且充分的条件”或者“必然且充分的条件”，这是“必要条件”与“充分条件”合并成的名词．想要明白“必要且充分的条件”，需要先知道什么是“必要条件”，什么是“充分条件”．这两个名词是互相对峙的，不能单独存在．数学里说的条件是情形、条文、或事项（如名词、图形、现象、关系、条理，……），例如蜂蜜、天落雨、甜味、马路湿、相加、相等、……都是事项，都是组成条件的材料．事项与事项之间往往由因果关系构成完备的判断．例如，

蜂蜜必然是甜的，

天落雨必然马路湿，

2 减 2 必然等于零．

因果关系必须包括两个事项（条件），一个处在原因地位，一个处于结果地位；处于结果地位的事项叫做**必要条件**．上边三句话里“是甜的”、“马路湿”、“等于零”都是前半句的必要条件；处于原因地位的事项（条件）“是蜂蜜”、“天落雨”、“2 减 2”都是后半句的**充分条件**．扼要地说，前因是后果的充分条件，后果是前因的必要条件．由充分条件产生必要条件，数学里常用记号$\Longrightarrow$表示它们间的关

系，例如，

$$是蜂蜜 \Longrightarrow 有甜味，$$

$$天落雨 \Longrightarrow 马路湿，$$

$$2减2 \Longrightarrow 等于零。$$

箭头所向的一端是必要条件，所背的一端是充分条件。

把这几句话的前后两半对换了就都变成错误的判断。有甜味未必是蜂蜜，马路湿未必天落雨，等于零未必是2减2。所以“蜂蜜”不是“甜味”的必然结果，“天落雨”也不是“马路湿”的必然结果。因此充分条件与必要条件不能混淆。

又如大学的入学考试，假定各科平均分数够60就能录取。某甲的平均分数是83，那么“83分”这条件能充分保证他升入大学；然而能升入大学的话，平均分数并不必然是83分。83分是升入大学的充分条件而不是必然条件。这就是充分条件与必要条件的不同。

然而也有不少的两件事情互为因果。“两直线平行”与“内错角相等”互为因果。“内错角相等”既是“两直线平行”的必要条件，又是充分条件；这时便省事地说“内错角相等”是“两直线平行”的必要且充分的条件。显然这时“两直线平行”也是“内错角相等”的必要且充分的条件。“两三角形全等”与“三对对应边相等”也互为因果，这种关系写做

$$两直线平行 \Longleftrightarrow 内错角相等，$$

$$两个三角形全等 \Longleftrightarrow 三对对应边相等。$$

关于必要且充分的条件，有一句话附带在这里说一下，希望大家记住。数学中的定义都是使一个概念成立的必要且充分的条件。例如，

和圆只有一个公共点的直线叫做这圆的切线.

可以从两方面使用. 当你知道直线和圆仅有一个公共点时，可以根据这定义说这直线是圆的切线；当你知道一条直线是圆的切线时，又可以根据这定义断定它和圆仅有一个公共点.

1.2 不是四足的动物必然不是马

仿照前面的话，说

马必然是四足动物 (1)

是对的；说

四足动物必然是马 (2)

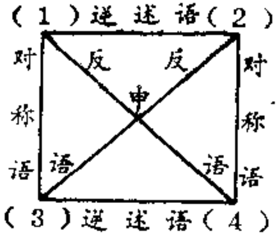
就错了；说

不是马必然不是四足动物 (3)

也错；但是说

不是四足动物必然不是马 (4)

又是正确的. 数学内容主要是形式逻辑. 形式逻辑所用的普通语言，一般不外乎上边这四种格式. 这四种格式之间有三种关系. (1)与(2)，或(3)与(4)的不同，是前因与后果互相对换；有这样关系的两句话称为**互逆的**. (2)是(1)的逆述语；(1)也是(2)的逆述语. (3)与(4)也这样. 把(1)里前后两件事都换成否定语气，就变成(3)，自然把(3)中前后两件事换成否定语气，就又回到(1). 有这样关系的两句话，说它们是**对称的**. (3)是(1)的对称语，(1)也



是(3)的对称语.(2)与(4)的关系也如此.(1)的前半段改成否定语气作为后半段，又把原来的后半段改成否定语气作为前半段，便是(4).同样方式可以把(4)改造成(1).我们说(1)和(4)是互相反申的两句话.(2)和(3)也互为反申语.上页下图足以简洁地表示这三种关系.

互逆的两句话或对称的两句话可能一个正确一个错误，上边的例句就这样；也可能都对，也可能都错.例如，

两直线平行$\Longrightarrow$内错角相等，

内错角相等$\Longrightarrow$两直线平行，

两直线不平行$\Longrightarrow$内错角不相等，

内错角不相等$\Longrightarrow$两直线不平行.

其中互逆的两对句子和对称的两对句子都正确.至于

两圆相交$\Longrightarrow$连心线$>$半径和，

连心线$>$半径和$\Longrightarrow$两圆相交，

两圆不相交$\Longrightarrow$连心线$\not>$半径和，

连心线$\not>$半径和$\Longrightarrow$两圆不相交.

其中两对逆述语和两对对称语都错.

唯有互相反申的两句话，要对就都对，要错就都错.上边的例句已经可以说明这一点.这事实表示互相反申的两句话效果一致.因此在逻辑论证之中可以互相代替.某句话说不透彻时，可以用它的反申语再说.例如，不容易从内错角相等证明两线平行时，可以试用"两直线不平行则内错角不相等"去证明.

1.3 要敢于挑刺儿

老师转问大家还记得"集合"的概念吗？尽管以前讲

过，还是有不少人已记忆模糊了。有人说“是一堆东西”，有人说“是有某种共同性质的一群东西”。老师问：“那么一支钢笔、一顶帽子、三辆牌号不同的汽车，是否为集合？”同学们都迟疑起来。老师说：

这也是集合。集合的成员不一定有共同性质，只要有方法判断一件东西是否为集合的成员就够了。一群事物合在一起叫做一个**集合**，简称为**集**。集中的事物叫做这集的**成员**。a是集A的成员，就说a**属于**A，记作 $a\in A$。成员可以有共同性质，也可以没有。成员没有共同性质的集，只好用列举法说明它。成员有共同性质时，可以用这共同性质说明这集。例如“有北京市户口的人”，“一九八〇年的礼拜日”，“一个公园里的老虎”，……。

王保一听老师说公园里的老虎也是集，马上不以为然地说：“那么景山公园的老虎是什么集呀”？说得大家都笑起来。有人说他问得没道理，这是挑刺儿。王保说：“既然没有说什么公园，怎么不允许我想到景山公园呢”？老师肯定了王保的提问，然后说：

读书要有这样质疑问难的精神，任何事情要想一想，不该人云亦云。如果人人都不提出新问题，人类知识就无从进步了。景山公园里确实没有老虎，但是在数学里也承认这公园的老虎是一个集，只是这集里没有成员。没有成员的集叫做**空集**。空集的记号是$\varnothing$。不要以为空集是无聊的概念，它在集论里却起着不小的作用。它有些象实数里的零。请想想如果实数里没有零，还能进行多少运算！

1.4 不要忽视平凡的推理

生活实践，自然现象，有许多东西总是一类一类地存在着，这是集论的物质基础。物理学家、数学家各是一个集，两者都在科学家这个大集之内。有的人既是物理学家又是数学家，那么物理学家与数学家两个集之间又有交叉，这都是集与集之间的关系，都是集论所要讨论的内容。轨迹理论只用其中最简单的一点关系，数学课本里也有。现在重提一下，第一条简单关系是大集包括小集。例如科学家包括数学家，黄种人是人类的一部分，直角三角形的集是三角形的集的一部分。假若A集的每个成员属于B集，即是

$$a\in A\Longrightarrow a\in B$$

时，便说A是B的**子集**；记作

$$A\subseteq B\text{或}B\supseteq A.$$

读作"A含于B"或"B含着A"。如果B里有不属于A的成员，就说A是B的**真子集**；记作$A\subset B$或$B\supset A$。读作"A含于B内"或"B内含着A"。例如，当m与b是任意常数时，$y=3x+b$包含的无穷多方程是一个集，这是$y=mx+b$所表示方程集的真子集。

两个集可以称谓不同或表示方法不同，而成员却完全一样。这是集与集之间的第二个简单关系。例如，"持有第三中学学生证的人"和"第三中学的在校生"，又如几何里"三边形的集"和"三角形的集"说法虽然不同，成员却完全一样。有这样关系的两个集A、B说它们相等，记作$A=B$。这关系的正式定义是

$$A=B\Longleftrightarrow A\subseteq B\text{而且}A\supseteq B.$$

其实这些数学语言，是常识的反映，是数学化了的常识。$A \subseteq B$，必然A的成员都在B里，B的成员不少于A的成员；$A \supseteq B$，必然B的成员都在A里，B的成员又不多于A的成员。B的成员不少于A的成员又不多于A的成员，所以两集的成员完全一样。

坐在旁边的毕勤觉得老师这些话平淡无味，有些不耐烦，嘟嘟囔囔地说："两集相等就是它们的成员一样，还捣鼓什么谁包含谁干啥？"老师知道毕勤平时对于学基本概念不够耐心，今天特别对他说：

不然，毕勤，数学一切理论都从十分平淡的概念开始。就有许多人因为忽视最初的平淡理论，闹得后来堕入十里烟雾。现在告诉大家，两集相等的概念，是轨迹理论的基本环节。鉴于毕勤的这种思想情况，我现在反问大家一个问题，就是应该怎样证明两集相等。前边所举相等的集的例题，都显而易见；毕勤以为此话无聊，不足奇怪，万一碰到两个不知其是否相等的集而要鉴别它们的关系，你该如何处理这问题呢？

1.5 如何证明两集相等？

证明两集相等，要从两集相等的定义着想。

例1. 假定我们不知道：

等边三角形的集=等角三角形的集，应该怎样证明它呢？从两集相等的定义来说，这要证明两个命题：

(a) 等边三角形的集$\subseteq$等角三角形的集；

(b) 等角三角形的集$\subseteq$等边三角形的集。

要证明这两个命题，又得要靠子集的定义。关于第一条需要

证明

$\triangle ABC \in$等边三角形的集

$\Longrightarrow \triangle ABC \in$等角三角形的集。

这实际是要证明

等边三角形必是等角三角形。

具体证法不必再写。关于第二条，需要证明

$\triangle ABC \in$等角三角形的集

$\Longrightarrow \triangle ABC \in$等边三角形的集。

这实际是要证明

等角三角形必是等边三角形。

证完了这两条才知道：

等边三角形的集=等角三角形的集。

老师接着又问：是否证明这命题的路子只有这一条？高爽想了想，说：(a)的代用语“等边三角形必是等角三角形”可以换作和它等效的反申语。

(a') 不等角三角形必是不等边三角形。

同样地(b)的代用语“等角三角形必是等边三角形”也可以换成它的反申语

(b') 不等边三角形必是不等角三角形。

老师又问毕勤：那么你说共有几种方法可以证明这命题？毕勤说：“从(a)、(a')中任取一条，再从(b)、(b')中取任一条证明都可以，一共能搭配四种证法；除去前边说的一种以外还有

$$\begin{cases}\text{等边三角形必是等角三角形，}\\ \text{不等边三角形必是不等角三角形；}\end{cases}$$