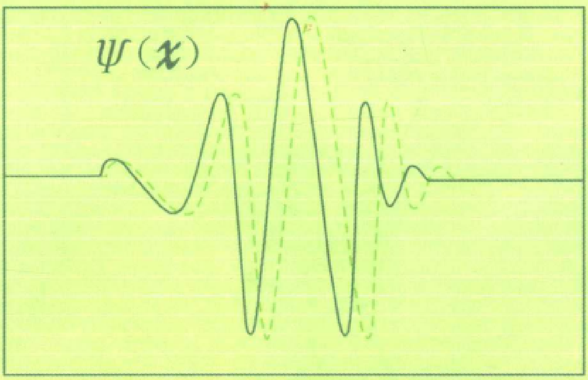
小波分析

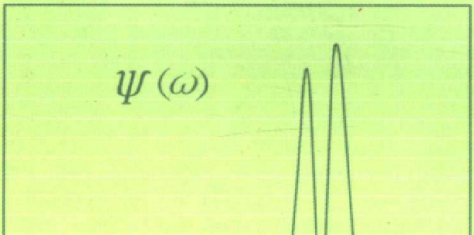
王经民 编著



西北农林科技大学出版社

责任编辑：魏宏升

封面设计：孙连忠



ISBN 7-81092-103-7

9 787810 921039 >

ISBN 7-81092-103-7/O·2

定价：15.60元

小 波 分 析

王 经 民　编著

西北农林科技大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

小波分析/王经民编著。—杨凌：西北农林科技大学出版社，2004.4

ISBN 7-81092-103-7

Ⅰ.小… Ⅱ.王… Ⅲ.小波分析 Ⅳ.0177

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2004）第 080947 号

小波分析

王经民　编著

出版发行	西北农林科技大学出版社
地　　址	陕西杨凌杨武路 3 号　　邮　编：712100
电　　话	总编室：029—87093105　　发行部：87093302
电子邮箱	press0809@163.com
印　　刷	西北农林科技大学印刷厂
版　　次	2004 年 8 月第 1 版
印　　次	2004 年 8 月第 1 次
开　　本	850×1168　　1/32
印　　张	6.5
字　　数	163 千字

ISBN 7-81092-103-7/0 • 2

定价：15.60 元

前　言

小波分析是近十多年来在Fourier分析基础上发展起来的一门新兴学科，应用领域十分广泛。许多专业的研究生和本科生也将小波分析列为必修课或选修课。本书就是在为本科生开设的小波分析课的讲稿的基础上完成的。

为了使具一般数学知识的大学生能较好地学习小波分析，本书分九章讲述。第一章介绍了学习小波的一些必要知识。包括距离空间、线性赋范空间、线性算子与线性泛函、Hilbert空间，以及与小波分析有密切关系的Fourier变换等。第二章从多分辨分析入手，系统讲授了一般小波函数的构造方法，小波变换系数的Mallat分解算法和重构算法。第三章讨论了在应用上十分重要的紧支小波的构造方法，以及对称小波、尺度函数与小波函数初始值的计算方法。还给出了一些常用小波函数的例子。第四章讲授窗口Fourier变换和连续小波变换，并将连续小波变换延伸到易于计算机处理的二进小波变换。第五章介绍在降低了小波函数正交性要求后双正交小波函数的概念、构造方法，以及变换的Mallat分解算法和重构算法。第六章我们将前面函数空间$L^2(R)$的小波分解推广到正交小波包分解、双正交小波包分解以及相应的Mallat分解算法和重构算法，讲述了函数展开的最优基选择。第七章将一维小波的概念利用张量积的方法推广到二维小波，介绍了二维正交小波的构造方法，二维小波分解的Mallat算法。第八章为一维周期函数的小波分解。先介绍周期多分辨分析的概念，再给出正交周期尺度函数与正交周期小波函数的构造方法，同时注意到

与一般小波的区别。第九章简单介绍了小波分析在信号的奇异性检测以及二维图像的压缩方面的应用，同时给出在 MATLAB 中的实现问题。

本书吸收了许多专业书籍的长处。内容安排由易到难，贴近教学实际。宜作有关本科生和研究生的教材，也可作为学习小波分析的入门读物。

限于作者水平，错误与疏漏在所难免，衷心希望读者提出批评和建议。

作　者

2004 年 3 月

目　录

第一章　函数空间与 Fourier 变换

小波分析是近年来由 Fourier 分析派生出的一门应用十分广泛的数学分支，数学基础涉及实变函数及泛函分析。为了便于更多的读者阅读，我们先介绍一些必要的基本知识。

§1.1　距离空间

在微积分及线性代数课程中,我们先后学习了空间 R^2、R^3 及 R^n 上两点间的距离，其距离 ρ 都满足下列三个条件（以 R^n 为例）：

(1) 非负性　$\rho(x,y)\geqslant 0$，　$\rho(x,y)=0 \Leftrightarrow x=y$；

(2) 对称性　$\rho(x,y)=\rho(y,x)$；

(3) 三角不等式　$\forall x,y,z\in R^n$ 有

$$\rho(x,y)\leqslant \rho(x,z)+\rho(z,y)$$

以上三个条件与一般函数空间的诸多重要概念和结论（如收敛和极限的唯一性）有密切联系。此外它在研究数值逼近方面也是必须的。

定义 1.1　设 X 是由某些元素组成的非空集合，$\forall x,y\in X$，按某确定的法则 ρ 对应一个实数 $\rho(x,y)$，满足

(1) 非负性　$\rho(x,y)\geqslant 0$，　$\rho(x,y)=0 \Leftrightarrow x=y$；

(2) 对称性　$\rho(x,y)=\rho(y,x)$；

(3) 三角不等式　$\forall x,y,z\in X$ 有

$$\rho(x,y)\leqslant \rho(x,z)+\rho(z,y)$$

则称 $\rho(x,y)$ 为 x 与 y 两点间的距离，X 与 ρ 一起称为距离空

间，记为（X，ρ），简记为 X。

【例 1.1】 设 R 是全体实数构成的集合，$\forall x,y\in R$，定义

$$\rho(x,y)=|x-y|$$

则易验证 ρ 满足定义 1.1，即按通常意义的理解，R 成为距离空间，此距离称为欧氏距离。

在 R 上还可以用其他方式定义距离，如

$$\rho_1(x,y)=\frac{|x-y|}{1+|x-y|},$$

上式定义的 ρ_1 显然满足距离公里的（1），（2）。下面再验证 ρ_1 满足（3），即三角不等式。

由于 $t>0$ 时，函数

$$\varphi(t)=\frac{t}{1+t}$$

为单调递增，故有

$$\begin{aligned}\rho_1(x,y)&=\frac{|x-y|}{1+|x-y|}\leqslant\frac{|x-z|+|z-y|}{1+|x-z|+|z-y|}\\&=\frac{|x-z|}{1+|x-z|+|z-y|}+\frac{|z-y|}{1+|x-z|+|z-y|}\\&\leqslant\frac{|x-z|}{1+|x-z|}+\frac{|z-y|}{1+|z-y|}=\rho(x,z)+\rho(z,y)。\end{aligned}$$

【例 1.2】 n 维欧氏空间 R^n R^n 是由全体 n 维实向量 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 组成的集合，定义 R^n 中的两点 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 与 $y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$ 到非负实数集的映射为

$$\rho(x,y)=(\sum_{k=1}^{n}(x_k-y_k)^2)^{\frac{1}{2}}, \tag{1.1}$$

$\rho(x,y)$显然满足距离公理的条件（1），（2）。为验证三角不等式，先证 Cauchy 不等式

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right)$$

其中 a_k、b_k（k=1，2，…，n）为实数。

由于λ的二次三项式

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k+\lambda b_k)^2=\sum_{k=1}^{n}a_k^2+2\lambda\sum_{k=1}^{n}a_k b_k+\lambda^2\sum_{k=1}^{n}b_k^2$$

非负，故判别式不大于 0，即 Cauchy 不等式成立。

由 Cauchy 不等式有

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^2&=\sum_{k=1}^{n}a_k^2+2\sum_{k=1}^{n}a_k b_k+\sum_{k=1}^{n}b_k^2\\&\leqslant\sum_{k=1}^{n}a_k^2+2\left(\sum_{k=1}^{n}a_k^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{k=1}^{n}b_k^2\right)^{\frac{1}{2}}+\sum_{k=1}^{n}b_k^2\\&=\left[\left(\sum_{k=2}^{n}a_k^2\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\sum_{k=1}^{n}b_k^2\right)^{\frac{1}{2}}\right]^2,\end{aligned}$$

令 $a_k=x_k-z_k$， $b_k=z_k-y_k$（k=1，2，…，n），则有

$$\rho(x,y)\leqslant\rho(x,z)+\rho(z,y),$$

R^n按(1.1)成为距离空间，称为 n 维欧氏空间。

同样可以在R^n中定义如下距离

$$\rho_2(x,y)=\max_{1\leqslant k\leqslant n}\{|x_k-y_k|\}$$

由以上例子可以看出，在同一个集合中，可以用不同的方式定义不同的距离，得到不同的距离空间。在没有特别声明的情况下，R^n均指 n 维欧氏空间。

【例 1.3】 函数空间 $C[a,b]$ $C[a,b]$是由定义在$[a,b]$上的全体连续函数构成的集合，对 $x(t),y(t)\in C[a,b]$，定义

$$\rho(x,y)=\max_{a\leqslant t\leqslant b}\{|x(t)-y(t)|\},$$

可以验证ρ满足距离公理（1）、（2）、（3），即$C[a,b]$按上式成为距离空间。

【例 1.4】 $L^2[a,b]$空间　$L^2[a,b]$是由定义在$[a,b]$上且满足式

$$\int_a^b |x(t)|^2\mathrm{d}t<+\infty$$

的函数$x(t)$组成的集合。其上的距离可定义为

$$\rho(x,y)=\left[\int_a^b |x(t)-y(t)|^2\mathrm{d}t\right]^{\frac{1}{2}},$$

$a=-\infty$，$b=+\infty$也可以。

【例 1.5】 l^2空间　l^2表示由满足$\sum\limits_{k=1}^{\infty}x_k^2<+\infty$的全体实数序列$x=(x_1,x_2,\cdots,x_k\cdots)$构成的集合，$x=(x_1,x_2,\cdots,x_k\cdots)$与$y=(y_1,y_2,\cdots,y_k,\cdots)$两点间的距离定义为

$$\rho(x,y)=\left(\sum_{k=1}^{\infty}(x_k-y_k)^2\right)^{\frac{1}{2}}。$$

在极限理论中，收敛序列极限的唯一性是基本性质。在一般距离空间中，我们可以定义点列的收敛性，它们也有许多与实数极限理论相似的性质。

定义 1.2　设$\{x_k\}$是距离空间X中的一点列，若当$n\to\infty$时，$\rho(x_n,x_0)\to 0$，则称点列$\{x_k\}$收敛于x_0，记为$x_n\to x_0$，$n\to\infty$或$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$。

定理 1.1　距离空间X中的极限是唯一的。

定理 1.2　在距离空间中，距离$\rho(x,y)$是两个变元x，y的二元连续函数，即在距离空间中，当$x_n\to x_0$，$y_n\to y_0$

时，$\rho(x_n, y_n) \to \rho(x_0, y_0)$（$n \to \infty$）。

定理 1.3 距离空间中收敛点列必有界。

完备性是距离空间的一个重要概念，它是通过 Cauchy 点列引进的。距离空间中的 Cauchy 点列$\{x_k\}$是指$\{x_k\}$满足 $\rho(x_n, x_m) \to 0$（$n,m \to \infty$，）。

定义 1.3 距离空间 X 叫做完备是指 X 中的任意 Cauchy(基本)点列必有收敛于 X 中的点。

由定义可直接得到以下结论：

1° 距离空间中的收敛点列必是 Cauchy 点列。

2° 完备距离空间的任何子空间也是完备的。

【例 1.6】 例 1.3 中 $C[a,b]$,例 1.4 中 $L^2[a,b]$,例 1.5 中 l^2 均为完备空间。

【例 1.7】 $C[a,b]$按距离

$$\rho(x, y) = \left(\int_a^b (x(t) - y(t))^2 \mathrm{d}t \right)^{\frac{1}{2}}$$

不是完备距离空间。

由于距离空间的完备性在许多方面起着重要作用，因而可以对那些不完备的距离空间通过增加"一些点"使其完备。这就是完备化的概念。

定义 1.4 设 X，X_1是两个距离空间，如果存在一个由 X 到 X_1的映射 T，使得 $\forall x, y \in X$，便有

$$\rho_1(Tx, Ty) = \rho(x, y)$$

其中 ρ，ρ_1分别为 X ,X_1的上距离，则称 T 为 X 到 X_1的等距映射，此时称 X 与 X_1等距。

定理 1.4 (完备化定理) 对于每个距离空间 X ,必有一个完备的距离空间 X_1,使得 X 与 X_1等距。

稠密性与可分性也是距离空间中的重要概念。

定义 1.5 设 A，B 为距离空间 X 的子集，若 $\forall x \in A$，总存在 B 中的点列$\{x_k\}$收敛于 x，则称 B 在 A 中稠密。

注意：稠密并不要求 $A \supset B$ 或 $B \supset A$。若 B 在 A 中稠密，则有 $\overline{B} \supset A$（也有用此形式定义 B 在 A 中稠密）。

定义 1.6 距离空间 X 叫做可分空间是指 X 中存在一个可列的稠密子集。

【例 1.8】 $C[a,b]$是可分空间，因为$[a,b]$上的有理系数多项式全体构成的集合在 $C[a,b]$上稠密，而有理系数多项式的集合是可列集。

【例 1.9】 $L^2[a,b]$是可分空间，因为 $C[a,b]$在 $L^2[a,b]$中稠密。

【例 1.10】 l^2是可分空间。

定义 1.7 设 X, X_1是两个距离空间，T 是 X 到 X_1的映射,若 $\forall \varepsilon > 0$，存在 $\delta > 0$，使得当 $\rho(x,x_0) < \delta$ 时有

$$\rho_1(Tx,Tx_0) < \varepsilon$$

则称映射 T 在 x_0 处连续。若 T 在 X 上的每一点连续，则称 T 是 X 到 X_1的连续映射。

特别地，若 X_1是实数集 R，则称 T 是 X 上的泛函，若 T 是连续的，则称 T 是 X 上的连续泛函。

定理 1.5 距离空间 X 到 X_1的映射 T 连续的充要条件是 $\forall x \in X$，当 $\{x_k\}$($x_k \in X$)收敛于 x 时，相应地 Tx_n 在 X_1中收敛于 Tx。

§1.2 线性赋范空间

定义 1.7 设 E 为实（复）的线性空间，若 $\forall x \in E$，则都有一个非负的实数 $\|x\|$ 与之对应，且满足

(1) $\|x\|=0 \iff x=0$ （非负性）;

(2) $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$，$\alpha \in F$（$F$ 为实数域或复数域）（齐次性）;

(3) $\|x+y\| \leqslant \|x\|+\|y\|$，　$x, y \in E$　（三角不等式）;

则称 E 为实（或复）的线性赋范空间，$\|x\|$ 称为向量 x 的范数。

由定义直接看出，线性赋范空间中的任何一个向量都可以度量其大小，并且线性赋范空间都是距离空间。因此，线性赋范空间中任意两点 x, y 之间的距离都可以通过向量的范数来定义，反之则距离空间不一定都是线性赋范空间。

由于线性赋范空间就是距离空间，那么自然就有收敛的概念。

定义 1.8　设 E 为线性赋范空间，$\{x_k\}$ 是 E 中的点列，若

$$\lim_{n\to\infty}\|x_n - x_0\| = 0,$$

则称点列 $\{x_k\}$ 依范数收敛于 x_0，或称点列 $\{x_k\}$ 强收敛于 x_0，记为

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0(\text{强})。$$

【例 1.11】　在 R^n 中定义范数

$$\|x\| = \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

或

$$\|x\|_1 = \max_{1\leqslant k\leqslant n}\{|x_k|\}$$

那么 R^n 成为线性赋范空间。

【例 1.12】　在 $C[a,b]$ 中定义范数为

$$\|x(t)\| = \max_{a\leqslant t\leqslant b}\{|x(t)|\}$$

则 $C[a,b]$ 为线性赋范空间。

【例 1.13】　在 $L^2[a,b]$ 中定义范数为

$$\|x(t)\| = \left(\int_a^b [x(t)]^2 \mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}}$$

则 $L^2[a,b]$成为线性赋范空间。

【例 1.14】 在 l^2 中定义范数为

$$\|x\| = \left(\sum_{k=1}^{\infty} x_k^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

则 l^2 成为线性赋范空间。

由于线性赋范空间 E 按照 $\rho(x,y)=\|x-y\|$ 成为距离空间，那么 E 可能是完备的，也可能是不完备的。我们把完备的线性赋范空间称为 Banach 空间。

对于同一线性空间中的不同范数，我们有下列概念：

定义 1.9 设 $\|x\|$ 与 $\|x\|_1$ 是线性空间 E 的两个范数，若存在常数 C_1、$C_2>0$，使得

$$C_1\|x\|_1 \leqslant \|x\| \leqslant C_2\|x\|_1$$

成立，则称范数 $\|x\|$ 与 $\|x\|_1$ 等价。

§1.3 线性算子与线性泛函

定义 1.10 设 E 与 E_1 都是线性赋范空间，$T: E \to E_1$ 的映射且满足：$\forall x,y \in E$ 及常数 α,β 有

$$T(\alpha x+\beta y)=\alpha T(x)+\beta T(y)$$

成立，则称 T 为 E 到 E_1 的线性算子；若 E_1 是实数域 R，则称 T 为 E 上的线性泛函。

线性算子的性质

① 线性算子 T 在一点 $x_0 \in E$ 处连续，则 T 在 E 上连续。

由连续映射的定义知，线性算子 T 在一点 $x_0 \in E$ 处连续等价于 $\forall x_n \in E$，当 $x_n \to x_0$时，有 $Tx_n \to Tx_0$。

② 线性算子 T 有界（既存在正数 M，$\forall x \in E$，有 $\|Tx\| \leqslant M\|x\|$）的充要条件是 T 是连续线性算子。

③ 设T：$E\to E_1$的线性算子，T在E上有界等价于T把E上的有界集映射到$TE\subset E_1$上的有界集。

设$\beta(E\to E_1)$为E到E_1的全体有界线性算子集合，那么按照算子的加法与数乘，$\beta(E\to E_1)$是线性空间。若定义范数

$$\|T\|=\sup_{\|x\|\neq 0}\frac{\|Tx\|}{\|x\|}=\sup_{\|x\|=1}\|Tx\|,$$

则$\beta(E\to E_1)$成为线性赋范空间。若E_1是 Banach 空间，则可证$\beta(E\to E_1)$是 Banach 空间。

④ 设T是线性算子，则T有界的充要条件是$\|T\|$有界。

线性赋范空间中常见的几种收敛形式

① 强收敛（按范数收敛）

设E线为性赋范空间，$x_n,x\in E$,若

$$\|x_n-x\|\to 0\,(n\to\infty),$$

则称序列$\{x_n\}$强收敛于x。记为$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x$(强)。

② 弱收敛

设E为线性赋范空间，$x_n,x\in E$,若对E上的任意有界线性泛函f有$f(x_n)\to f(x)\,(n\to\infty)$，则称序列$\{x_n\}$弱收敛于$x$。记为$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x$(弱)。

③ 一致收敛

设E，E_1为线性赋范空间，T，$T_n\in\beta(E\to E_1)$，若$\|T_n-T\|\to 0\,(n\to\infty)$，则称算子序列$\{T_n\}$一致收敛于$T$，记为$\lim\limits_{n\to\infty}T_n=T$(一致)。

④ 算子序列强收敛

设E，E_1为线性赋范空间，T，$T_n\in\beta(E\to E_1)$，若$\forall x\in E$有 $\|(T_n-T)x\|\to 0\,(n\to\infty)$，则称算子序列$\{T_n\}$强