中学数学教学指导之一

Chuantong
jiaocai
zhongdianhe
nandian
jiaoxue

传统教材
重点和难点教学

金昭范　编著

河南教育出版社

中学数学教学指导之一

传统教材重点和难点教学

金昭范　编著

河南教育出版社

中学数学教学指导之一

传统教材重点和难点教学

金昭范　编著

责任编辑　温　光

河 南 教 育 出 版 社 出 版
河南开封第一印刷厂印刷
河 南 省 新 华 书 店 发 行

787×1092毫米 32开本 10印张　213千字
1 986年5月第1版　　1986年5月第1次印刷
印数：1—3,340册
统一书号 7356·98　　定价 1.35元

前　言

我从事数学教学四十多年，晚年不幸跌伤致残。在帮助学生复习中学数学时，我将自己多年的教学实践和体会加以回顾整理，遂编写成《中学数学复习》（已由河南人民出版社出版）和《中学数学教学指导》（将分三册由河南教育出版社陆续出版），愿为祖国四化作绵薄贡献。

《中学数学教学指导》丛书是根据中学通用教材和教学大纲的精神和内容，将其中的重点和难点问题，结合个人的体会，提出教法和应注意的事项，供中学数学教师教学时参考。

这套丛书包括三部分内容：

1.重点和难点教学。这部分以精简的传统中学数学教材内容为主，选例说明，力求加强数学各科知识间的联系，并在此基础上，对现行教材内容作适当地拓宽、加深和提高。

2.中学教材中新增加的与高等数学有关的基础知识的教学。这部分编选了丰富的资料，供教学中参考使用。

3.教学经验和体会。这部分除对一般的教法加以探讨外，由于几何是训练学生逻辑思维和空间想象能力的重要一环，故特作专章论述。

以上三部分均配有足够分量的精选例题和习题（附提示或答案），可供教师教学时作补充举例或布置作业时选用。

考虑到读者阅读时的方便，我们将以上三部分内容分三

册分别出版。本书是其中的第一册，着重分析和阐述中学数学中函数、反函数以及方程（组）等重点内容，而对于其他一些教学中的难点，如一次不定方程、圆锥曲线等有关问题，内容上虽超出教学大纲而为教学中应具备的知识，则放在最后一章集中讨论。

因限于个人水平，书中对教法的建议和对知识的理解难免有错漏之处，望读者酌情取舍并批评指正。

编　者

1985年8月

目　录

第一章 函数的教学

一、关于定义域问题

1.定义域的引入

函数是教学中极为重要的概念之一。要使中学生正确理解函数问题，符合现代科学的原则，较为困难。本文试就函数定义的引入和定义域的求法，提出些个人见解，供教师教学中作参考。

函数概念和其他数学概念一样，是客观现实的反映，我们只有掌握各种函数的性质，才能运用它们来研究各种不同具体内容的物质变化过程，以解决实际的问题。根据这一要求，函数的引入与性质研究，应注意以下几点：

（1）必须让学生先通过观察，有了一些有关函数的感性知识并提出某些问题以后，再引入函数概念。

（2）对函数的解析讨论，不应当脱离它的图象来研究，因为图象能直观鲜明地帮助理解，还可以列表相对照，以加深学生的理解，使他们感到函数定义并非空洞的抽象。

（3）应当把函数与方程及不等式的求解和讨论结合起来，使它与解答应用问题布列方程密切联系，只有利用一切可能把理论用于实际，才能使学生易于接受函数的科学性定义。

（4）应引导学生独立地去研究一些新的函数，随着年级

的升高，问题应该逐步复杂化，与此同时，在学习过程中，亦应适当做一些练习题目。

2.关于函数概念的定义和给出定义的方式

函数概念最初是属于几何的内容，讨论的是“按照指定的法则变化的线段”，随着数学的继续发展，函数概念也发生了变化。开始使用“函数”这个词是在十七世纪，后来试图作函数的解析定义，也把画出的曲线叫作函数.数学分析的发展，使得函数的原始概念趋于科学、完整，并有所推广。应当特别指出的是，作为函数关系主要特征的，不是它们的解析表达式，也不是某种曲线的几何表示，而是两个量的数值间的对应关系。

对于函数概念，一般的规定是：“一个数量被每个 x 的值所给出，且与 x 一起变动，就把它叫做 x 的函数。”函数的值可以由解析表达式给出，也可由某种条件给出。条件指的可以怎样把所有的数进行计算，或者是函数关系本身（有时这种关系也可能无法用解析式具体表达）。这种广义的观点，是把一些数看成当其中的一方给出时另一方也一同给出。只在这种意义上才认为是函数关系。中学数学的函数定义就是据此表达出来的：“若对于自变量 x 的任何一个确定的值（在可能取的值的集合内），对应的量 y 有确定的值，y 就叫做自变量 x 的函数。”这个定义没有讲到在什么方式下建立二量间的数值对应关系，也不排斥 x 的每一个数值都对应着同一个值 Y 的可能性。这种在教学中学生常会遇到的以下可疑问题都可得到解决：

（1）由于定义中强调了变量的起变化，就认为 $y=a$ 或 $y=1^x$ 不是函数是错误的；

（2）学生只知道函数的表达式有三种方式（解析、列表、图象），而在解析法中总认为是用一个式子来表达，这也是不对的。因为函数也可以用语言叙述方式给出，或者在不同区间用不同的式子来给出，此外还有间接函数等等；

（3）关于单值函数和多值函数问题，也比较容易解决，没有必要限定只讨论单值函数（虽然最初学生所讨论的函数都是单值的），唯一性也不应该强调到不适当的程度；

（4）因而也解决了有着函数相关性但是无法用式子将其表达出来的问题，以及函数和方程的联系与区别问题。

3.关于用集合概念定义函数

集合论是现代数学中的重要概念，我们可以用集合概念对函数定义，并认为这是最基本的。例如："若对集合M的每一元素x，总有集合N的一个元素y与它对应着，则称在集合M上给出了一个函数，并写作：$y=f(x)$。这时元素x就叫做自变量，而元素y叫做函数值。"这个定义并不与前面的论述相抵触，而是更加普遍化了，采用它，我们就把变量看作它所有值的整体，也就是看作一个集合。

下面简单地介绍有关集合的基本概念，并解释记号$\in$、$\subset$、$\supset$、$\cap$、$\cup$、$\{\cdots\cdots\}$等的意义。

数学中讨论的对象，如代数中的数，几何中的点、直线等，我们可以统统叫做元素，有时简单地叫做元；若干个或无穷多个元的集体，叫做集合，或简单地叫做集。

要知道一个集，必定要知道它里面所有的元，也就是说，对于任意的一个元，要能够判断它是否在这个集中。例如，所有的整数组成一个集，因为我们随便拿一个数来，都可以判断它是否为整数。这个集又叫做整数集，常用Z来表

示。

每一个集都有它的特性，例如整数集中的任意元，都有整数这个特性；平面上的点组成的集与平面上的所有直线组成的集，也都各有其特性。因之，对于一个集可以用它的特性来判断任意元是否在它之中。任意一个元 a，若它有集合 M 的特性（也就是说它是 M 的元时），就用记号

$$a \in M$$

来表示；若它没有集合 M 的特性（也就是说它不是 M 的元时），就用记号

$$a \overline{\in} M \text{（或} a \notin M \text{）}$$

来表示。a 在 M 中我们也说 a 属于 M，同样，a 不在 M 中，我们也说 a 不属于 M。

一个集所含的元假如是有穷个，就叫做有穷集，否则就叫做无穷集。一个集所含的元的个数，叫做这个集的元数或浓度。有穷集的元数可选取正整数的一部分为例。

集合可以用列举它的所有元来表示。例如整数集 Z 可以写成 $Z=\{0, 1, 2, 3, \cdots\}$，

或 $Z=\{\cdots\cdots, -2, -1, 0, 1, 2, \cdots\}$。

一般地，集合 M 含有元 a、b、c，…，我们就用记号

$$M=\{a, b, c, \cdots\}$$

来表示。

通常一个集都含有一个以上的元。但是当它只含有一个元时，这个集就与它所含的那个唯一的元素常常不加区别。为了叙述方便，又假定不包含任何元的情况也成一个集，叫做空集，它的元数是零，例如，大于 1 而小于 2 的整数集合就是空集。

如果集合N中所有的元都是集合M中的元，也就是说N是M的一部分，或者说任意一个元，它具有N的特性，它一定也有M的特性，那么N叫做M的子集，M则叫做N的包含集，我们用记号

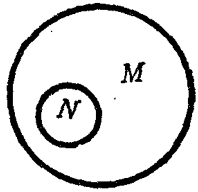

图 1

$$N \subseteq M \quad 或 \quad M \supseteq N$$

来表示。

子集与包含集的关系，可以用图 1 来说明。

显然有穷集的子集仍是有穷集，无穷集的包含集也是无穷集。为了方便，我们还假定任意集都包含着空集。

显然，我们从$A \subseteq B$及$B \subseteq C$，易于得到$A \subseteq C$。

如果M的所有元都属于N，同时N的所有元又属于M，即

$$M \subseteq N, \quad N \subseteq M,$$

也就是说，M与N的特性完全相同，我们就说M与N相等，用记号

$$M = N$$

表示，若$N \subseteq M$，但M、N不相等，那么N就叫做M的真子集，M叫做N的真包含集，用记号

$$N \subset M \quad 或 \quad M \subset N$$

表示。这时N的所有元都属于M，但M中至少有一个元不属于N。

以上是集合的基本概念，现在介绍它的两个结合法。

定义 1 若 A，B是两个集，属于A同时又属于B的所有元组成的集P，叫做A与B的交集，用记号

$$P=A\cap B$$

表示之。

可见P是A，B的子集，并且任何集只要它同时是A、B的子集，它一定是P的子集。因此P是包含在A、B中的最大集。关于交集的概念，可用图2来说明。

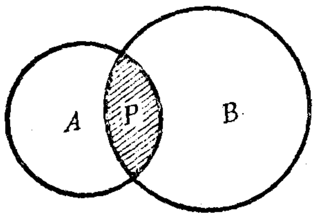

图 2

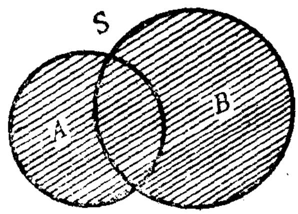

图 3

定义 2 若A、B是两个集，属于A或属于B的所有元组成的集S，叫做A与B的并集，用记号

$$S=A\cup B$$

表示之。

可见S是A，B的包含集，并且任何集只要它同时是A，B的包含集，它一定也是S的包含集，因此，S是包含A，B的最小集。关于并集的概念，可以用图3来说明。

若A、B、C是三个集，显然有关系：

$$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C),\ (A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C).$$

它们的交集与并集间的关系，有如下定理：

$$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C).$$

证：首先，因为

$$B\subseteq B\cup C,\ \therefore\ \ A\cap B\subseteq A\cap(B\cup C).$$

同理有 $$A\cap C\subseteq A\cap(B\cup C).$$

故有 $$(A\cap B)\cup(A\cap C)\subseteq A\cap(B\cup C).$$

再如$a\in A\cap(B\cup C)$，那么$a\in A$，$a\in B\cup C$；于是$a\in B$或$a\in C$。从前者说，$a\in A\cap B$；从后者说$a\in A\cap C$，

$$\therefore\ \ a\in(A\cap B)\cup(A\cup C).$$

即 $$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C).$$

所以定理成立。

同样，我们有

$$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C).$$

二、怎样进行函数教学

1.关于函数教学的几点建议

函数概念的发展，对我们在函数的教学中有很大启发，讲授时，应本着发展观点逐步深入，既要照顾科学性又须考虑使学生能够接受。

函数概念涉及面广，包含着唯一、确定、对应等许多知识内容，而对应则是最本质的，应放在突出的地位。

根据全日制十年制学校《中学数学教学大纲》（试行草案）中的有关规定，兹对中学函数教学提出如下建议：

(1) 在提出函数的定义以前，应进行些准备工作。例如，在初一讲数轴时，务使学生了解每一个数对应着（有了确定的坐标原点和单位长度的）数轴上的一个点，反之，数轴上的每一个点也都对应着一个确定的数；在联系数的发展、讲明运算法则中所取数值的许可范围相应的要随着扩大；教授

使用平方表和立方表时，应提出这就是两个量间互相制约的相依关系；在讲到不等式问题时，应暗示区间概念（当然不一定要讲“区间”这个词）；等等。

（2）每一个新的概念的引入，如分式、根式、乘法公式和因式分解等，都应当对比异同，把函数概念渗透进去，并加以讨论，指出对于数值的合理取舍的必要性。尤其是初二讲过无理数和根式运算及相似形，完成实数系之后，更应阐明“无意义”这一概念在实数范围都有哪些情况，即说明计算式必须有效，应排除除数为零和虚数，树立实变数函数概念。

（3）讲解方程和方程组是体现函数概念在生活和生产中应用的最好课题；通过文字系数的方程讨论，会加深函数概念的理解。讲解时还应举出实例说明；应该指出有时一个函数在不同的区间，由不同的条件来确定，并且有些函数虽明显地知道变量之间彼此有着相关性，但没有办法用式子表达出来。

下面举几个例子：

i　火车在9小时内从A站走到B站，在最初三个小时内，它的行驶速度为50公里/小时，接下来停止了二小时；在最后的四小时内，它以60公里/小时的速度到达B站。试列出路程和速度的关系式。

解：设以x表时间（单位为小时），以y表示走过的路程（单位为公里），可得到下面的关系式：

$$y=\begin{cases}50x, & \text{当}0\leqslant x\leqslant 3\text{时；}\\ 150, & \text{当}3\leqslant x\leqslant 5\text{时；}\\ 150+60(x-5); & \text{当}5\leqslant x\leqslant 9\text{时。}\end{cases}$$

此例可使学生初步建立间断函数概念。

ii　设三角形的两条边为定长，试求第三条边与它的对角的关系式。

解： 因为两边与其夹角可确定一个三角形，因之，当角 α（$0<\alpha<180°$）的值确定时，它的对边 x 的长自然也就完全确定了，但是这条边只能通过作图方法去求（每一个许可的 α 值，就可作出一个 x 的值），因此在学生没学过三角函数前，不会写出其关系式来。

至于一些抽象的函数题例子，我们将放到“函数及其图象”这一单元以后再谈。

（4）关于定义函数，一般来说初二以前，只是对函数学习的予备阶段，仅涉及到有关函数相关的一些感性知识，只有到初三学习坐标法以后，讲授“函数及其图象”才进入定义阶段。这时要提出函数这个名词，下定义，并使学生学会使用符号（如 $y=f(x)$，$\varphi(x)$ 等）。讲解时应紧密配合图象，抓住对应这一特征，把以前学过的有关函数的问题概括总结，使所学的知识更加明确、系统；与此同时，还须与轨迹知识加以联系，并加论述，为以后学习有关充要条件问题作准备。此外讲授时，结合图象变化，使学生对函数递增、递减、单调、奇偶、连续、间断等性质，有初步感性认识（暂时不必给这些性质下定义，等到高中阶段再讲）。应特别提出的是，所给函数定义，务必使学生易于接受，这时决不可用集合概念来给出函数的定义（这也是高中阶段的事）。

必须指出，引入定义和符号以后，切忌使学习带上纯粹性理论的性质。须知，只有经过多次的反复学习、辅以各种各样的练习，才能使问题更好地得到解决。为此，可使学习

作下述类型的练习题：

i 根据叙述的条件，求出一个量（函数）对于另一个量（自变量）的依赖关系式。这类题可以从几何、物理和其它应用问题中选取，务使学生明了这就是布列方程解决问题的一部分工作。还应使学生能作到用文字表示函数关系中所含的常量，说明参数所应当满足的条件。通过这些练习，使他们对参数与自变数有正确了解。

ii 根据函数的解析式确定自变量可取值的范围（凡使已知解析式有意义的那些自变量的值，都认为是可取值），简单的可作口头解答，复杂的列式求解，这些都是定义域的求法问题。

iii 布置一些力所能及的函数图象问题，使学生能对照图象的形状和它所在的范围，说明求得的定义域及值域是一致的，并通过讨论函数的变化，说明图象的性质。

2.关于函数教学中总结复习工作

(1) 中学学习的函数，指的都是实（数）函数，求其定义域和值域（函数存在域），也都是在实数范围内，平常所给的函数关系，多是用解析式表达的一元显函数，故求定义域方法，就是根据函数解析式的结构和性质，逐一列出包含自变量的不等式（函数值存在时（实数域），就须满足所有列出的不等式，且不使发生矛盾），然后解不等式组、标出取值范围（可用区间符号标出），得问题答案，务使学生掌握好这一解题方法。此外还应使学生了解有无公共解的情形都属可能，无解只是表示函数值在实数域内不存在。

复习时还应向学生介绍函数的分类知识。函数一般是按照算式$f(x)$中解析运算的特征来进行分类的．通常我们所讨