

教与学 · 教与学 · 教与学 · 教与学 · 教与学

高中代数

第一册



天津科学技术出版社

教 与 学

高中代数

第一册

丛书顾问 崔孟明

编 者 周去难 等

天津科学技术出版社

教 与 学
高 中 代 数
第 一 册

丛书顾问 崔孟明

编 者 周去难 等

◆

天津科学技术出版社出版

天津市赤峰道130号

天津新华印刷一厂印刷

新华书店天津发行所发行

◆

开本787×1092毫米 1/32 印张11.5 字数244 000

1988年4月第1版

1988年4月第1次印刷

印数：1—589 00

ISBN 7-5308-0294-1/G·56 定价：2.20元

前 言

教学过程是师生双边活动统一的过程。但应强调指出：教学活动的中心是学生，教和学都是为使学生尽多尽快地增长知识和才干；教学活动的主体也是学生，不论多么高明的教师用怎样巧妙的方法去教，学生都必须经过自己的实践和思维，才能最后牢固地掌握知识和增长能力。因此，教师的主导作用，首先是激发学生学习的积极性、主动性，同时要及时地满足学生对知识的需要，恰当地帮助学生克服学习中的困难。在整个教学活动中教师都要注意，不要伤害学生的主动性和积极性，不要破坏学生思维的连续和完整。要做到这一点，教师就必须充分了解学生的学习过程和心理活动。因此，当今国内外，都把对学习方法的研究作为教法研究的一项重要内容，以使教学活动更好地适应学生需要，进一步提高教学效率。

《教与学》丛书就是基于上述思想和多年实践经验编写而成的，旨在从教和学两方面启发学生主动探求，积极思维，尽多尽快地增长知识和自主学习的能力。

本丛书包括数学、物理、化学、生物、语文和英语六个学科，每科与课本对应分册，每册均按章或单元设有若干栏目。因这些栏目是根据学科内容需要设置的，因此，有共同的，也有专设的。

“知识结构”是用图表或简短文字说明相关范围内各项

知识间的推演、包含等内在联系，从中可找到学习的途径、知识的重点和把握知识的关键。可见它既是学习入门的向导，也是掌握知识的纲领。

“知识反馈”是一组检查课堂学习效果的练习题。它的编写，既考虑了覆盖面，也考虑了重点、难点和能力、方法的训练。因此，通过这套练习题，不仅能了解课堂效果，而且能使所学知识得到及时的巩固和进一步的理解，并可提高对知识的运用能力。

“课堂以外”是一在较大知识范围设立的比较活跃的栏目，可满足多方面的需要。其内容既与教材紧密衔接，又属课堂以外，有动脑的也有动手的。希望通过它能启迪智力、训练能力、开阔视野、疏通思路。

“教材提示”和“学法指导”，一方面是给学生以具体的知识，一方面是通过具体的学习过程教给学生一些富有成效的学习方法。

本丛书由景山学校校长、特级教师崔孟明同志任学术指导，由李勃梁、宋志唐、邢永庆等同志分任主编，由京津部分有多年教学经验的教师编写。

本书的编写，虽几经讨论修改，但由于是经验性材料，难免有不足之处，欢迎读者批评指正。

目 录

第一章 幂函数、指数函数和对数函数 (1)

第一单元 集合 (1)

知识结构 (1)

教材提示 (7)

知识反馈 (19)

学法指导 (34)

第二单元 映射与函数 (41)

知识结构 (41)

教材提示 (51)

知识反馈 (90)

学法指导 (104)

第三单元 幂函数、指数函数和对数函数 (115)

知识结构 (115)

教材提示 (125)

知识反馈 (159)

学法指导 (183)

第二章 三角函数的定义、图象和性质 (203)

知识结构 (203)

教材提示 (210)

知识反馈 (242)

学法指导	(25 6)
------------	---------

第三章 两角和与差的三角函数.....(271)

知识结构	(271)
教材提示	(274)
知识反馈	(312)
学法指导	(333)

第一章 幂函数、指数函数和 对数函数

第一单元 集 合

【知识结构】

一、为什么要学习集合

现代数学除研究数字和几何图形外，还需研究更多更广泛的对象，希望能用统一的观点和有力的手段来处理研究对象，数形结合的方法是用统一方法处理不同对象（元素）的萌芽，使之能较深刻地研究对象的性质。例如：阿基米德和阿波罗尼两位数学家，尽管知道了面积、体积、圆锥曲线等的很多性质，但是，由于没有建立点和“数对”的对应，也无法得到曲线和函数的对应，使得研究只能停留在初等几何语言的表达阶段，无法用方程描述曲线，而深刻地揭示研究对象的性质。直角坐标系的引入，使数形结合进入了一个新的比较完美的阶段，使几何初步代数化、通过数研究形，通过形研究数。

集合论的产生使数形结合达到更高级的阶段，它不仅可用字母表示数、点、图形，还可以用字母表示向量、矩阵、线性变换、概率中的事件、对策论的策略、计算机上的信号和电路的开闭等等。大到宏观世界的银河系，小到微观世界的粒子的多种研究对象，都可以用字母运算来表达它们的各种

演变，并在字母代数研究中抽象出它们的共同规律，研究解决各种问题。所以，集合论是近代数学最基本的内容之一，许多重要的数学分支，如数理逻辑、近世代数、实变函数、泛函分析、概率统计、拓扑学等，都建立在集合理论的基础上。

学好集合的知识，不仅能更深刻，更透彻地理解初等数学的概念，而且还为今后学习近代数学及其他学科的学习，准备和创造了必要的条件。

二、集合的基本概念及相互之间的区别与联系

1. 集合的概念（简称集） 集合是数学中最原始的概念之一，是不定义的概念，即不能用其它的基本概念给它下定义，只能作描述性的说明。同几何中的点（没有形状大小），线（没有粗细），面（没有厚薄）等原始概念一样，把集合的概念描述为每一组对象的全体，是用全体解释集合的概念，不是定义集合的概念。所以对集合下定义并且每一组对象的全体叫做集合的提法是不恰当的。集合概念的内涵很小，只要一组对象即可，甚至连一组对象是否具有共同性质都未要求。但集合的外延却很大，小到粒子，大到宇宙的任何对象都可以。

2. 对于给定集合的特征 凡是给定的一个集合，集合中的元素都是确定的。在同一集合中不应重复出现同一元素，也无需考虑它们的顺序，两个集合若所含元素相同就是同一个集合。即集合元素的确定性，互异性与无序性。

3. 集合的表示法

（1）列举法 是把给定集合中的元素，不重复，不计次序，不遗漏地一一列出，放在集合符号{ }内。元素之

间用逗号“，”分开。

(2) 描述法 是把集合中元素的公共属性描述出来写在大括号内，描述法可用文字描述，也可用数学式子描述。数学式子描述时的常用模式是 $\{x|P\}$ ， x 是集合的代表元素，竖线是隔开符号， P 是指元素 x 所具有的公共属性。要注意的是，①需要多层次描述属性时，可选用关联词“且”、“或”等联结。若描述部分出现元素以外的字母时，要进一步对新字母说明其含义或指出取值范围；②集合的代表元素不能用单个字母表示时，可用代表元素 (x, y) 或 (x, y, z) 等来表示。

例 用描述法表示下列集合

①所有有理数的集合

②所有负数且不等于 -1 的数的集合

③使 $\sin\alpha = 1$ 成立的 α 的集合

④抛物线 $y = x^2$ 上所有的点的坐标组成的集合

解：①可表示为{有理数}

②可表示为 $\{x|x < 0 \text{ 且 } x \neq -1\}$

③可表示为 $\left\{\alpha \mid \alpha = 2k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$

④可表示为 $\{(x, y) \mid y = x^2\}$

(3) 韦恩 (Venn) 图法 用圆圈表示集合，注意圆圈的大小，不表示该集合中元素的多少，(除一圆包含在另一圆内)。

这些集合的表示方法，各有利弊，可以根据题目的要求和方便选择一种表示法。

4. 数集的常用记号 数集是以数为元素的集合，点集是

以点为元素的集合，这是中学数学里主要研究对象，因此要熟记数集的常用记号。

全体自然数的集合简称自然数集，记作 N ；

全体整数的集合简称整数集，记作 Z ；

全体有理数的集合简称有理数集，记作 Q ；

全体无理数的集合简称无理数集，记作 $\bar{Q}$ ，（这是全集在实数集的前提下）；

全体实数的集合简称实数集，记作 R ；

全体复数的集合简称复数集，记作 C 。为了方便，有时用 Q^+ 表示正有理数集， Q^- 表示负有理数集， R^+ 表示正实数集， R^- 表示负实数集， ϕ 表示空集， I 表示全集。若是在实数集的前题下， $\bar{Q}$ 表示有理数集的补集即无理数集， $\bar{Q^-}$ 是负有理数集的补集，即包含正有理数集、零和无理数集。若是在有理数集是全集的前提下，则 $\bar{Q^-}$ 表示的是负有理数集的补集，即非负有理数集，它包含着正有理数集和零。

5. 集合的种类（根据集合中含有元素的个数分）

（1）有限集 含有有限个元素的集合；

（2）无限集 含有无限个元素的集合；

（3）空集 不含任何元素的集合。

6. 集合的有关符号 集合通常用大写拉丁字母表示，集合的元素用小写拉丁字母表示。例如： $A = \{a, b, c\}$ ；“ $\in$ ”为属于符号，“ $\notin$ ”（或“ $\bar{\in}$ ”）表示不属于符号，它们表达出元素和集合之间的从属关系。因此这种符号只适用于元素和集合的关系上，符号不能反过来用，且习惯元素在左，集合在右，同时元素 a 与集合 A ，在 $a \in A$ （读 a 属于集合 A ）或 $a \notin A$ （读 a 不属于集合 A ）中必有一种且只有

一种成立。

用于集合与集合之间的关系的符号有“ $\subseteq$ ”、“ $\subset$ ”读做“包含于”；“ $\supseteq$ ”、“ $\supset$ ”读做“包含”；“ $\not\subseteq$ ”、“ $\not\subset$ ”读做“不包含于”；“ $\not\supseteq$ ”、“ $\not\supset$ ”读做“不包含”；“ $=$ ”读做“等于”。它们表示出集合与集合间的各种包含或不包含关系，因此，这些符号是包含符号。

7. 集合与集合之间的关系

(1) 子集与真子集的联系与区别 从定义上看，当且仅当对任意 $x \in A$ 都有 $x \in B$ ，那么集合 A 叫集合 B 的子集，记作 $A \subseteq B$ (或 $B \supseteq A$)，从韦恩图上看，图1-1和图1-2中集合 A 都是集合 B 的子集，因此它包含着两层意思，

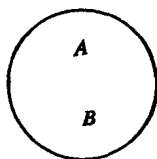


图 1-1

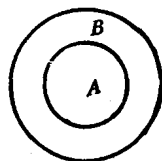


图 1-2

即集合 A 的元素可能和集合 B 的元素相等，也可能集合 A 的元素是集合 B 的元素的一部分。若集合 A 是集合 B 的真子集，它不仅要求 A 是 B 的子集，还要求 B 中至少有一个元素不属于 A ，符号是 $A \subset B$ (或 $B \supset A$)。只有图1-2表达 A 是 B 的真子集，因此真子集是子集，反之则不成立。

(2) 等集的含义 若 $A \subseteq B$ 且 $B \subseteq A$ ，则 $A = B$ 。说明等集的元素要完全相等。由此得到一种证明方法，如要证 $A = B$ ，只要证 $A \subseteq B$ 与 $B \subseteq A$ 两者都成立即可。

(3) 交集、并集、补集的区别与联系 A 与 B 的交集是由所有属于 A 且属于 B 的元素组成的集合，记作 $A \cap B$ (读作 A 交 B)。

A 与 B 的并集是由属于集合 A 或属于集合 B 的元素组成的集合。记作 $A \cup B$ (读作 A 并 B)。它们都是表示集合与集合之间关系的。但是 $A \cap B = \{x | x \in A \text{ 且 } x \in B\}$ ，而 $A \cup B = \{x | x \in A \text{ 或 } x \in B\}$ ，交集是用“且”字描述，是 A 、 B 的公共元素组成的集合；并集是用“或”字描述，是 A 、 B 中不同的元素组成的集合。当然两个集合中的公共元素只能出现一次。从韦恩图上看：图1-3的(1)、(2)

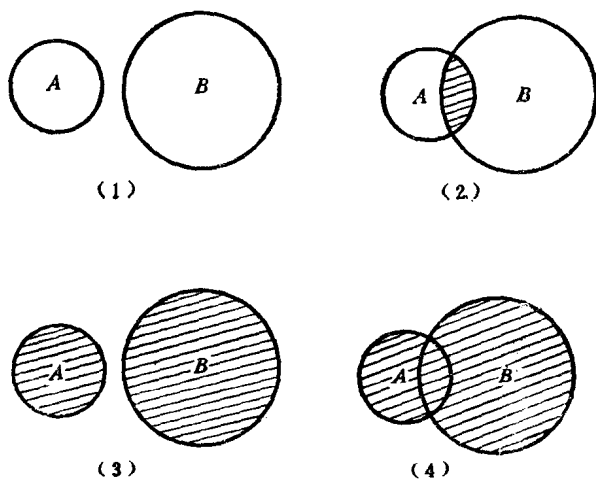


图 1-3

阴影部分表示集合 A 、 B 的交集，图1-3的(3)、(4)

阴影部分表示集合 A 、 B 的并集。

补集是在全集 I 中研究的，若集合 $A \subseteq I$ ，所有不属于 A 的元素组成的集合，记作 $\overline{A}$ （读作 A 补），即 $\overline{A} = \{x \mid x \in I, \text{ 且 } x \notin A\}$ ，如图1-4. 这些定义不仅用文字描述，也能用数学式子描述，还能用韦恩图描述。

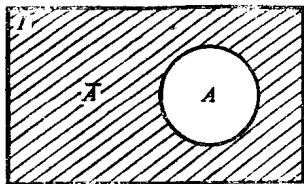
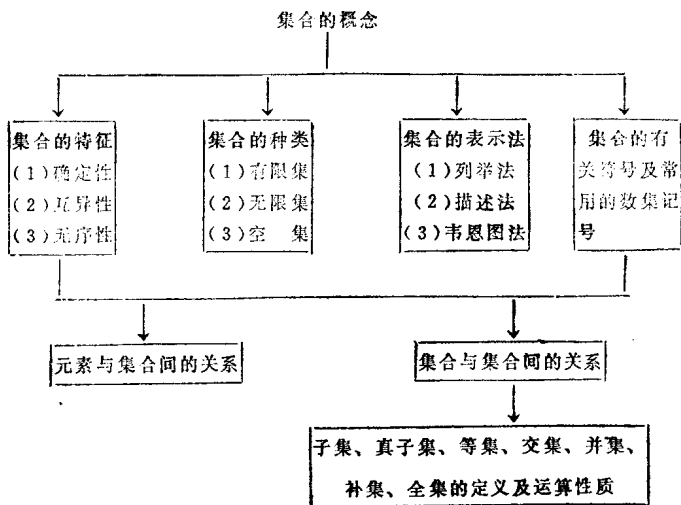


图 1-4

三、集合的知识结构图



【教材提示】

本单元概念多，抽象且运算方法新，对概念内涵的理解往往不透彻，概念与概念之间的联系与区别不易鉴别，在运用集合概念解决问题时，则含混不清，为掌握本单元知识，

可进行分层次的启导、阅读，对比分析，结合实例与图形讲述或讨论，达到逐步对概念理解的深化和运用。

一、启发引导

由于学生对学习集合的意义不清楚而影响学习的积极性，所以可先介绍为什么学习集合，集合在教学及各科学领域的作用，再介绍知识结构图使之对集合的知识内容、概貌有个初步轮廓的了解，给学生自学、研究绘出一幅入门的线路图，为主动的学习创造条件。

二、阅读

根据线路图配备阅读提纲。例如在阅读过程中给出如下问题：

- 1.为什么要学习集合？
- 2.能问集合的定义是什么吗？为什么？试描述集合的概念。
- 3.元素的定义是什么？
- 4.对于给定的集合应有哪些特征？
- 5.集合的表示方法有哪些？试举例说明。
- 6.集合常用的数集记号有哪些？集合有哪些常用的符号？
- 7.用文字叙述及数学式子表达的方式说明子集、真子集、交集、补集、并集的定义，通过阅读及对以上问题的讨论，对集合的概念有个初步的了解。

三、研讨

通过以下类型的问题，揭示概念的内涵，深刻理解概念的实质。

- 1.观察型 通过对事物的观察或问题的思考，获得对某

种事物的某种特性的认识。

2. 类比型 对类似而又有区别的概念提出问题，更进一步认识概念之间的相同点和互异点。

3. 变换型 抓住概念的本质属性，从不同的角度，以不同的方式提出问题。

4. 辨析型 对既有正确又有错误的问题加以辨析。

例1 判断下列每组对象，能否描述为集合？为什么？并说明集合可由哪些对象组成？

(1) “自然数的全体”。

(2) “与一条线段两个端点的距离相等的所有的点”。

(3) “很大的数的全体”。

(4) “所有著名的艺术家”。

(5) “细长的长方形的全体”。

(6) “大于1小于40的整数”。

(7) “接近于0的数的全体”。

(8) “离原点O的距离小于3的所有点”。

解：其中(1)、(2)、(6)、(8)是集合，(3)、(4)、(5)、(7)不是集合，因为它们的对象不确定。集合的对象可以是数、点、形、式子、人、物体等，任何对象都可构成集合。

说明：尽管集合可以由任何对象构成，但对象应是确定的，互异的可以是无序的。

例2 用列举法表示下列集合：

(1) 星期的集合。

(2) 自然数的集合。

(3) 小于10的素数的集合.

(4) $A = \{x \mid x^2 < 50, x \in \text{正奇数}\}.$

(5) $B = \left\{ y \mid y = \frac{p}{q}, p + q = 5 \text{ 且 } p, q \text{ 为正整数} \right\}.$

(6) $C = \{z \mid z^3 - z = 0\}.$

(7) $D = \{(x, y) \mid y = x^2 \text{ 且 } y = x\}.$

(8) 不超过10的非负偶数集.

解: (1) {星期一、星期二、星期三、星期四、星期五、星期六、星期日}.

(2) $N = \{1, 2, 3, 4, \dots\}.$

(3) $\{2, 3, 5, 7\}.$

(4) $A = \{1, 3, 5, 7\}.$

(5) $B = \left\{ \frac{1}{4}, \frac{2}{3}, \frac{3}{2}, \frac{4}{1} \right\}.$

(6) $C = \{-1, 0, 1\}.$

(7) $D = \{(0, 0), (1, 1)\}.$

(8) $\{0, 2, 4, 6, 8, 10\}.$

说明: 集合与其它知识的综合, 要求所有知识都准确无误, 才能保证最后的正确, 第(7)题代表元素成“数对”出现, 若写成 $\{0, 1\}$ 是错误的.

例3 用描述法表示下列集合:

(1) 自然数集合、整数集合、有理数集合、实数集合.

(2) 被5除余1的正整数集合.