

KE XUE CONG SHU

中国科学院新世纪〈科学丛书〉 主编 何远光



几何画板

- ★ 在动态中表达几何关系的图版
- ★ 探索性学习的直观环境
- ★ 在知识的海洋中畅游
- ★ 培养创造性能力的实践园地



潘懋德
著

1

内蒙古大学出版社

责任编辑: 张 志

封面设计: 徐敬东

图书在版编目(CIP)数据

几何画板 / 潘懋德著. - 呼和浩特:

内蒙古大学出版社, 2000.5

(新世纪(科学丛书) / 何远光主编)

ISBN 7-81074-022-9

I. 几… II. 潘… III. 几何课 - 计算机辅助教学 - 中学 - 教学参考资料 IV. G634.633

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2000) 第 25085 号

顾 问

王大珩 院士

王佛松 院士

张广学 院士

王绶璜 院士

郭慕孙 院士

严陆光 院士

编 委

关定华 研究员

胡亚东 研究员

陈树楷 教授

周家斌 研究员

刘 金 高级工程师

何远光 高级工程师

史耀远 研究员

几何画板

潘懋德 著

内蒙古大学出版社出版发行

内蒙古瑞德教育印务股份

有限公司呼市分公司印刷

内蒙古新华书店经销

开本: 850 × 1168 / 32 印张: 0.5 字数: 12 千

2000 年 5 月第 1 版第 1 次印刷

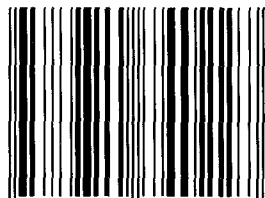
印数: 1-11000 册

ISBN 7-81074-022-9 / N · 1

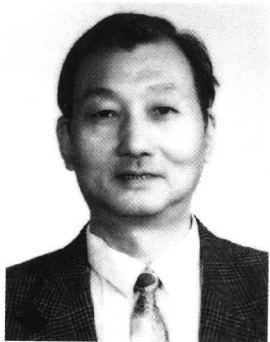
本书编号: 1 - 43

全套 50 册 定价: 50.00 元 (分册 1 元)

ISBN 7-81074-022-9



9 787810 740227 >



潘懋德,男,1939年生
于江苏省镇江市。北京师范大学
教育科学研究所教授;
全国中小学计算机教育研究
中心副主任;中国教育学会
教育专业委员会常务理事;
中国计算机学会普及委员会
委员。

1982年以来一直致力
于中小学计算机普及应用的
研究和推广工作。

目 录

崇尚科学(序)	(1)
在动态中表达几何关系的图版	(2)
探索性学习的直观环境	(3)
在立体几何中的运用	(6)
在其它学科中的运用	(7)
在知识的海洋中畅游	(8)
培养创造性能力的实践园地	(10)
发挥创造力的广阔空间.....	(13)
获取更多的知识.....	(14)

崇尚科学

——寄语青少年

江总书记在党的十五大报告中号召我们“努力提高科技水平,普及科技知识,引导人们树立科学精神,掌握科学方法”。面向 21 世纪,我们要实现科教兴国的战略目标,就是要大力普及科技知识,提高国人的科学文化素质。特别是对广大的青少年,他们正处于宇宙观、世界观、人生观、价值观的形成时期,对他们进行学科学、爱科学、尊重科学的教育,进而树立一种科学的思想 and 科学精神,学习科学方法对他们的一生将产生重大的影响,同时也是教育和科学工作者的重要任务之一。

由中国科学院和内蒙古大学出版社共同编纂出版的“科学丛书”就是基于上述思想而开发的一项旨在提高青少年科学文化素质,促进素质教育的科普工程。该“丛书”具有以下三大特色。

买得起:丛书每辑 50 册,每册一元。

读得懂:每册以小专题的形式,用浅显的表达方式,通俗易懂的语言,讲述各种创造发明成果的历程,剖析自然现象,揭示自然科学的奥秘,探索科技发展的未来。

读得完:每册字数万余字,配以相应的插图,一般不难读完。

我们的目的就是要通过科普知识的宣传,使广大青少年在获得科技知识、拓展知识面、提高综合素质的同时,能够逐步树立起科学的思想 and 科学的精神,掌握科学方法,成为迎接新世纪的优秀人才。

最后,真诚地祝愿你们——

读科学丛书,创优秀成绩,树科学精神,做创新人才。

中国科学院 沈元序

在动态中表达几何关系的图版

“几何画板”是美国软件“The Geometer's Sketchpad”的汉化版，是一个很适用于几何教学和学习的工具软件平台，也可用于代数、立体几何、解析几何、物理等其它学科的教学或学习中。

这个软件在 win3.x 或 win95/98 等环境中都能顺利运行，在硬盘和内存中都只占用很小的空间。打开“几何画板”后我们看到的界面，就像一块黑板(图 1)。

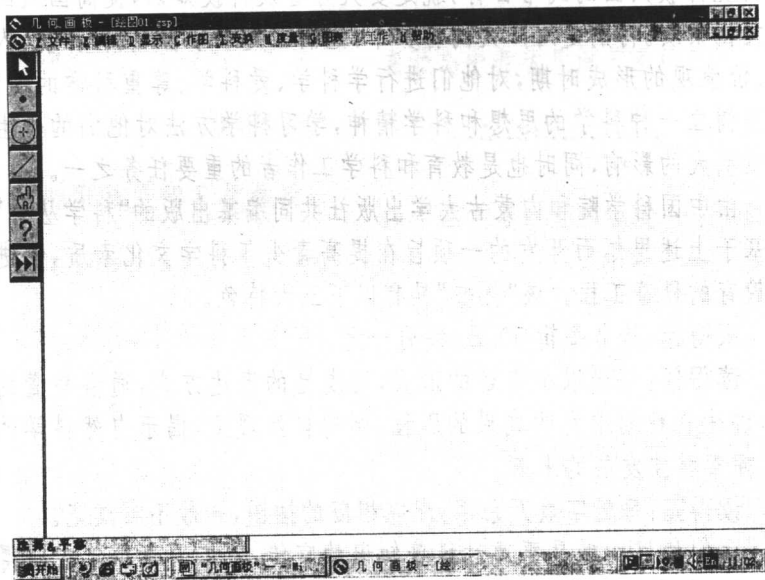


图 1

图版的左侧是一列工具图标：分别是移动、画点、画圆、画线和文字工具等等。用户可以利用这些工具按照尺规作图的法则，画出各种几何图形。

与黑板或草稿纸上的图形不同，在“几何画板”上画出的图形是动态的，并可在动态中保持设定的几何关系不变。如图 2，在画板上任意取 A、B、C 三点，连接成三角形，同时作出 AB 边上的中点 D。此时利用

“移动”工具拉动 A 点就看到了一个变化着的三角形,在变化中 D 点始终保持为线段 AB 的中点。

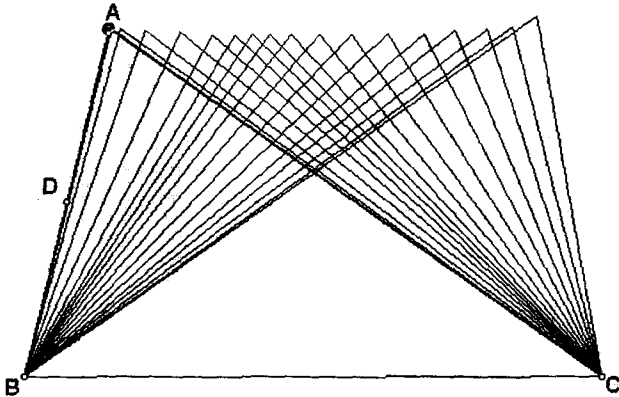


图 2

同样可以拉动 B、C 两点或是移动三角形的边(亦能运用一些技巧让某几个元素同时移动)。如果作出三角形 ABC 三条边上的中线,就可以在这种动态变化中清楚地观察到“任意三角形三中线交于一点”的现象(因为不会观察到三条中线未交于一点的情况)。过去讨论这一条几何定理是必须依靠逻辑证明的,现在利用“几何画板”可以根据观察来确认这个事实。

在几何画板上,不仅可以观看图形的变化,还可以利用系统提供的其它功能(例如度量的功能,动态地观察有关的数据)来发现图形中存在的规律和各种关系。也就是可以用一种区别于传统手段的全新的、更加直观的过程来学习几何。

探索性学习的直观环境

过去,我们讨论在同一个圆内,对应一段弧的圆周角与圆心角的关系,一般都需要进行证明。现在,我们可以利用“几何画板”进行直观的观察。如图 3:

$$\begin{aligned} \angle CDE &= 31^\circ \\ \angle COE &= 63^\circ \\ \frac{\angle CDE}{\angle COE} &= 0.50 \end{aligned}$$

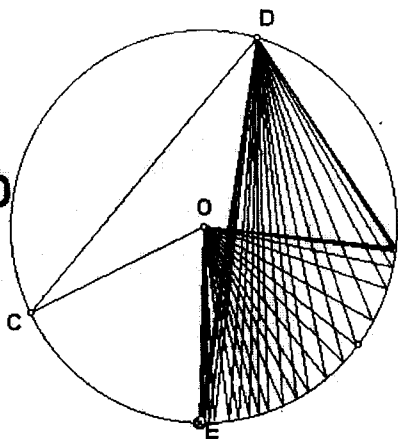


图 3

在圆 O 上任意作出 C 、 D 、 E 三点, 得到圆周角 CDE 和圆心角 COE ; 这时可以度量出它们的角度, 就能看出是圆周角为圆心角的一半; 如果因为度量中四舍五入的误差, 不能正好看出一半的关系, 可以把它们除一下。然后在圆上移动 E 点, 度量的值将随着 E 点的移动而变化, 但是总能看到圆周角是圆心角的一半的关系。从这里, 我们“看出了”这个定理。

我们还可以移动 D 点, 这时, 将看到所有的度量值不变化。其实这也是一个定理: “同弧上的圆周角相等”。当 D 点移动到与 C 、 O 在同一直线上时, 就是证明圆周角有关定理的特殊位置。这说明利用“几何画板”对图形观察的过程中, 也是可能启发我们得到进行逻辑证明的思路。圆 O 的大小和位置也是能够变化的, 从而保证了动态观察和分析的普遍性。

上述过程可以是在教师的指导下, 由学生独立或分组进行观察和分析, 不必用教师讲、学生听的传统教学方式。这就实现了既充分发挥教师的主导作用, 又使学生成为学习的主体, 是一个探索性学习的直观环境, 是一种新型的教学模式。

在“几何画板”上绘制函数图像也极为方便, 只要从图表栏中调出

坐标系,在 X 轴上任意取一点 P 并度量出 P 点的坐标,分离出它的横坐标(注意:随着 P 点在 X 轴上的移动,这个值是一个“任意”值)作为自变量的取值;从度量栏中调出计算器,计算出相应的函数值 $\sin x$;以 x 和 $\sin x$ 的值分别为横坐标与纵坐标用“图表”中的“绘点”功能,在坐标系中标出 $\sin x$ 函数图像中的“一个”点;由于 P 点是任意的,我们实际上已经找到了图像上所有的点,跟踪这个点并移动 P 点就会在坐标系中观察到 $\sin x$ 的图像。也能够利用“作图”中的“轨迹构造”功能画出它的图像。

同样,我们也可以作出 $\sin 2x$ 、 $2\sin x$ 等的图像。这使得我们在分析讨论函数时更加方便和得心应手。

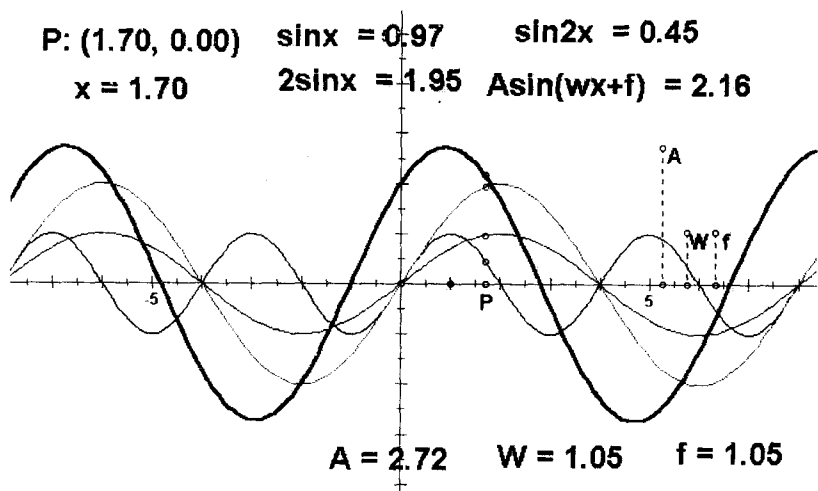


图 4

当然,还不仅仅如此,在图 4 中我们看到的由粗黑线描绘的是函数:

$$y = A\sin(\omega x + f)$$

的图像。其中的 A 、 ω 、 f 分别是图中三个点的纵坐标值。当移动这些点时,就改变了 A 、 ω 、 f 三个系数的值,该三角函数图像的振幅、频率、初相就会相应地随着变化。

这样就得到了一个“动态”的正弦函数图像,与图 4 中的图像以及其它表达各种典型状态的正弦函数图像相比较,我们就能明白 A 、 ω 、 f

等系数对正弦函数图像的影响和意义。这一部分教学内容,当然也可以在教师的指导下由学生自己或分组绘制、分析、讨论来进行主动的学习。既能使学习深入又能节省时间。

在立体几何中的运用

“几何画板”用于立体几何教学也很好。学习立体几何必须培养“空间想像能力”,即是要求学生看到三维立体的实物能绘出平面投影图,观看平面图就能准确地想像出立体的空间关系。这是学习立体几何必备的基础能力,对不少初学者是一个难关。由于用“几何画板”画出的图形中的若干元素可以适当地移动,就可帮助初学者较快地培养空间想像能力。

我们还可以根据规范的投影关系,画出三维空间关系的平面投影图。如图 5:

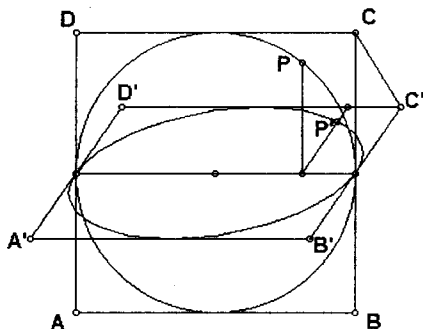


图 5

图 5 中平行四边形 $A'B'C'D'$ 可以看作正方形 $ABCD$ 的斜投影。亦可看作是围绕 AD 、 BC 两边中点连线为轴, 旋转适当角度的一个图形。正方形 $ABCD$ 的内切圆的投影, 应该是内切于对应的平行四边形的椭圆, 这个椭圆可以用如下的方法作出: 取圆上任意一点 P 作轴线的垂线, 由两线交点作 BC 的平行线; 然后再由 P 点作 CC' 的平行线, 两线交点 P' 就是椭圆上的对应点。作出该点的轨迹就是对应的椭圆。

“几何画板”让我们简单地设定一个按钮,点击该按钮就能使 P 点在圆上匀速运动,这时 P' 就会随着在椭圆上作相应的运动。如果在 ABCD 平面上作出一个与 P 点有密切几何关系的图形,其每个元素就可以按同样的投影关系在 A'B'C'D' 平面上得到投影图。基于这些元素再构造出的各种三维物体的投影图,将会随着 P 点的运动也围绕着一根过圆心的纵向轴线旋转,这将为立体几何的教学提供更好的直观环境。

在其它学科中的运用

对于与几何关系有密切联系的其它学科的教学内容,“几何画板”也可以提供有益的辅助作用。例如对物理中的运动学、动力学、静力学、几何光学等内容的教学就很有帮助。图 6 就是关于力的合成或分解的图示:

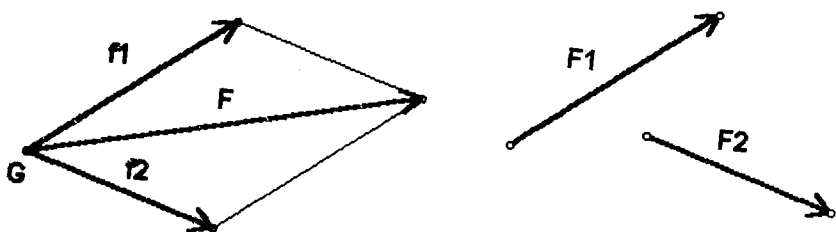


图 6

其中右侧是给定的两个力,左侧是将二力平移至 G 点并按法则得到合力 F。这时移动右侧力的末端来改变力的大小和方向,左侧力的合成图将随着变化。

观察这个力的合成的动态变化过程,就能讨论两个力同方向、反方向、夹角变化和大小变化等情况下的合力。学生主体学习的环境也就形成了。

图 7 中的物体 MN 的大小和位置都是可以调整的,焦点 F 的位置也是可以改变的。当物体 MN 改变时,它的像的大小和位置都会根据成像的规律,随着进行变化。度量出的焦距、物距、像距等数值也是随着

产生动态的变化。

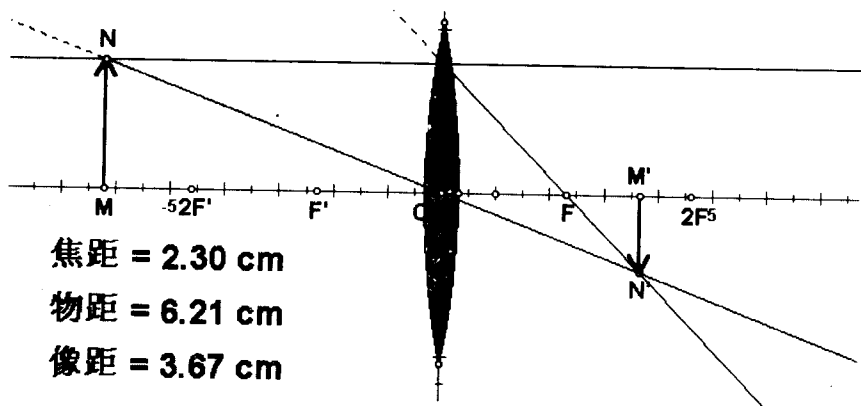


图 7

因此不但可以从动态的图形,看到一个反映成像过程的光路图,还可以计算焦距、物距、像距之间的数量关系,推导出反映凸透镜成像的关系公式。这又是一个让学生进行观察、分析、讨论来主动学习的例子,一个探索性学习的环境。

在知识的海洋中畅游

上面这些例子都是一些实际可以应用的课例,不过都还是一些具体规定了具体图形和规定了很具体的内容后,交给学生去观察、讨论的。其实,在教学中我们还可以安排一种更宽松的环境让学生去主动地学习。

有一些学校的教师就已经这样做了,例如让学生首先掌握“几何画板”的使用方法,然后利用它去探索、讨论各种几何问题。有这样一个实例:让学生根据二次曲线定义寻找画出这些曲线的方法。有一个班的30位同学,在一节课内分别找到了六种不同的方法。有一位教师收集到同学创造的17种以上画法。这是多么有效的学习过程啊!如果一位教师在课堂上用传统的教学方法给学生介绍二次曲线的作法,一节课内能讲完几种呢?而且,讲完了是否能保证学生都能理解呢?

有一位教师让学生利用“几何画板”讨论“圆内接三角形的面积”何时达到极值,并计算极值.解该题的传统方法是利用计算三角形面积公式进行计算,然后按求函数极值的方法做进一步的处理.课上有些同学没有用这种方法,而是找到了很多其它有趣的方法.

首先,如图 8 在圆 O 上画出内接任意三角形 ABC .

面积 $ABC = 6.57 \text{ cm}^2$

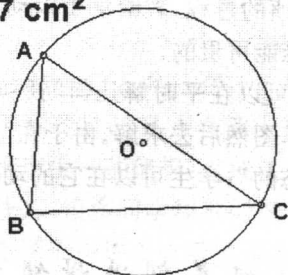


图 8

然后,度量出三角形 ABC 的面积,然后可以分别在圆 O 上移动三点就能看到面积数值的变化,直到找到最大值.这时,就可以直观地“看到”当三角形是等边三角形时面积达到极大.同时又找到了如图 9 所示的寻找极值位置和数值的方法.

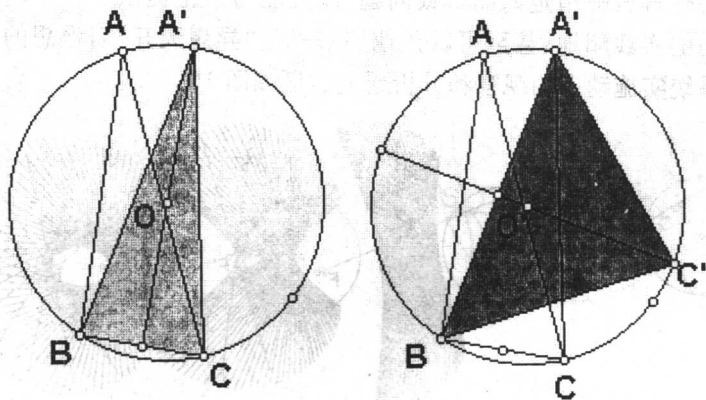


图 9

图左侧显示在与三角形 ABC 共有 BC 边的圆 O 的内接三角形中, 以 BC 为底的等腰三角形 $A'BC$ 面积最大。接着再如右侧以其腰 $A'B$ 为底作等腰三角形 $A'BC'$, 显然此三角形的面积更大。这个过程可以继续下去就得到了一递增、有界数列(此数列有极限), 其极限就是圆内接三角形的极值。

此方法可能不如传统的方法简单, 但是它直观地显示了圆内接三角形达到极值的过程, 教给学生以动态观察、求极限等等高等数学的思考方法, 是难能可贵的。

学生还可以在平时解几何问题时, 根据给定的已知条件, 用“几何画板”作出草图然后去求解。由于在“几何画板”上作出的草图不但准确而且是“动态的”, 学生可以在它的动态变化中的某些特殊位置, 找到求解的思路。

培养创造性能力的实践园地

在使用“几何画板”给予学生探索性学习的环境以后, 我们已经看到了培养他们创新精神和实践能力的奇特效果。从前面讲到的讨论圆内接三角形面积极限的创新解法, 就初见端倪了。

其实, “几何画板”提供的动态几何环境, 不仅能一般地帮助学生直观地去理解教师指定的图形或问题, 而且能为学生提供了一个培养创造能力的实践园地, 甚至可以让他们对一些“异想天开”而设想的几何图形系统实施动态的观察和分析研究。例如图 10:

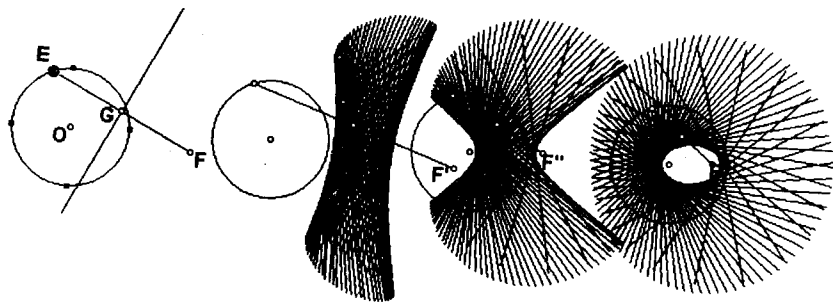


图 10

左侧的图是设想在圆 O 上任取一点 E 和圆外一点 F 作一线段,过线段中点 G 作垂线(由于图形的局限画了一条线段),若 E 点在圆上运动则垂线也将随之运动。现在,我们想知道垂线的运动规律。在这个设定的条件下,是可以讨论(推导)出某些结果的,但是对一般的学生(甚至对教师)来讲实在是要求太高了,在传统的学习环境下无论是观察和推导都很困难。

现在就不一样了,可以在“几何画板”上让 E 点在圆上移动,同时跟踪(使垂线现出轨迹)观察垂线的运动,看看出现什么样的图形,然后再作进一步分析和思考。右侧的三幅图形就是分别让 F 点在圆外较远处、在圆外较近处和在圆内三种不同位置时 E 点在圆上运动留下的垂线轨迹图形。看到这些直观图不难产生一些猜想:直线轨迹的包络线是二次曲线族(椭圆、双曲线、抛物线)。很多同学和教师这时可以进行进一步的分析和讨论,从而发现这组图形中许多有趣的现象和规律。

当然这样一类的图形系统是很多的,给学生(甚至给教师)通过观察、分析而探索许多几何知识的空间是十分广阔的。

下面我们介绍一些同学探索、创新的实例。

先给大家讲一个发现“广义蝴蝶定理”的故事。如图 11:

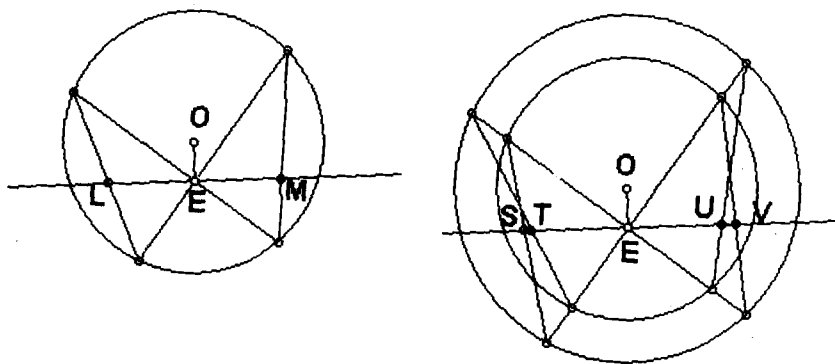


图 11

左侧的图是初中几何课本中的一个习题,从圆 O 任意一条弦的中点 E 作两根直线与圆交得四个点,连接两条线段后得图形像一只蝴蝶,两线段与弦分别交于 L、M 两点则有:

$$LE=EM$$

即“蝴蝶”两“翼”截得的线段相等,称为“蝴蝶定理”。

如果能完成这个练习,证出这一个定理就应该是一个好学生了。有一位同学并不满足于一般的证明完成这个练习,他使用“几何画板”度量了两条线段的长度,且移动 E 点观察两线段确实相等,“看到了”定理是成立的。

同时他又进一步想如果再加一个同心圆(如右侧的图),两圆与直线交得八个点,如图连接得一扩展的“蝴蝶”,其两“翼”与弦交得四点。他猜想左侧线段 SE、TE 与右侧线段 EU、EV 也应该有某种等式关系。他猜想可能有

$$SE + TE = EU + EV \text{ 或 } SE * TE = EU * EV$$

这种创新的猜想也许并不稀奇,但是在传统的学习环境下这些猜想很难证实或否定,因而最后只能不了了之而淹灭了创造的火花。现在这位同学利用“几何画板”度量了这些线段的长度,并进行了必要的计算,计算的结果否定了他的两个猜想。这也应该是一个成果,明确的否定结论也是有价值的。

这位同学没有停止探求,在他锲而不舍的努力下终于找到了它们之间的等式关系:

$$SE * TE / (SE + TE) = EU * EV / (EU + EV)$$

他不仅利用“几何画板”的度量和计算,找到了这个有趣的关系式,而且完成了有关这个关系的逻辑证明,他命名这个命题为“广义蝴蝶定理”。此后他还对这个图形进行了更多的扩展和深入的分析研究,这是一个多么令人兴奋的成果啊!

如果没有“几何画板”这样一个帮助他动态观察和分析计算的环境,这位同学大概不能如此顺利地得到这个成果。

对于一个中学生在学习的过程中,偶然发现的一些命题是否有这么大的价值,并不重要。重要的是培养了他的创新精神和创造性思维的

能力。研究“几何画板”如何为学生创设一个培养创新精神和实践能力的环境,是很有意义的。

发挥创造力的广阔空间

其实,在目前已经知道的学生或学生与教师共同运用“几何画板”安排探索性教、学的过程中,一些创新的命题和成果,也有很多可能是很有价值的。如图 12 中涉及的若干创新就可能很有价值:

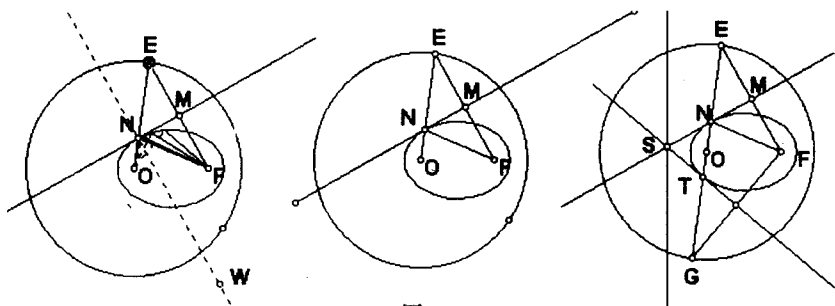


图 12

图 12 中间的图形,展现了几位同学按二次曲线的定义构造椭圆的过程:

在任意圆 O 上一点 E 和圆内一点 F 间连接线段;

作 EF 的中垂线 MN 与直线 OE 交于 N 点;

则随着 E 点在圆 O 上运动, N 点的轨迹就是一个椭圆。

作法十分简单但非常精妙,请看分析:

N 是 EF 中垂线上的点所以有:

$$NE = NF$$

就有 $NO + NF = NO + NE =$ 圆 O 的半径

也就是动点 N 至两个定点 O 与 F 的距离之和为定值, N 点的轨迹是以 O 、 F 为焦点的椭圆。这个构造椭圆的方法是很巧妙的,更妙的是同学们没有停留在找到构造椭圆上,而是在这个图形系统内发现了更有趣的内容。

看左侧的图,从图上可以看见直线 MN 似乎是椭圆的切线,但是

从一幅图形中看到的关系是不能立刻确认的,必须进行逻辑的推理和证明。不过现在不要紧,我们让E点在圆O上运动一周,看看MN是否保持与椭圆相切,我们看到直线MN时刻都与椭圆相切(尽管未经逻辑证明但看到的事实的确是真真切切,当然如果确实要逻辑证明可以再加上去)。

过N点作MN的垂线就是法线,从相关的几个角进行分析就可知道:若光线沿ON到达椭圆将沿NF反射出去,即从椭圆一个焦点射出的光线经二次曲线(曲面)反射后将会聚到另一个焦点。图中的黑影就是形象的示意,这是二次曲线(曲面)的光学性质。这个内容虽然与本节课的学习无关,但是这样的发现让同学以至教师都产生了难以言表的惊喜,从而更热心地去寻找创造的线索。

果然,同学们很快发现了新的情况,请看右侧的图:延长EO与圆交于另一点G、线段FG的中垂线ST是椭圆的另一条切线,与椭圆切于T点。ST与MN交于S点,S点的轨迹是一条直线,经过分析、推证,该直线是椭圆的一条准线,即N点到该直线的距离与NO之比为一定值。这个图是依据椭圆的第一定义作出来的,现在从图中构造和分析出了与椭圆第二定义相关的内容,是同学们自己找到了椭圆两个似乎不相关的两种定义的同源性。

这是一个十分有趣,或许也是十分有价值的发现,恐怕很多数学教师并不知道如何讲清楚这个问题的。现在我们从这个图形中可以直接看出这些关系,同时顺便看出了椭圆中过焦点的弦(图中过焦点O的弦NT即是这样的弦)的两端(即N、T两点)所作的椭圆的两条切线的交点在椭圆的准线上。

获取更多的知识

除了这些令我们大开眼界的“发现”以外,一些同学和教师还继续从“几何画板”上这个动态图形中,得到了更多的新知识。首先,当我们移动图中圆内的F点时,椭圆的离心率会随着变化(两焦点间距离变化引起椭圆形状变化);当F点移出圆外时轨迹变成了一对双曲线,其